Logarithme et Exponentielle

Exercice 1

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les nombres suivants : $A = \ln(8)$, $B = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$ et $C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
2. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les nombres suivants : $A = \ln(24)$, $B = \ln(144)$ et $C = \ln\left(\frac{8}{9}\right)$
3. Mettre les nombres suivants sous la forme $\ln(X)$ pour un certain réel X.

$$A = 2\ln(3) + \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \qquad B = \frac{1}{2}\ln(9) - 2\ln(3)$$

Exercice 2

Un capital de 5000€ est placé à intérêts composés au taux annuel de 6%. Déterminer le nombre d'année n à partir duquel le capital acquis sera supérieur à 12000€.

Exercice 3

1. On considère la fonction $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$.
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Calculer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
   (c) Calculer la dérivé de la fonction g.
   (d) En déduire les variations de g.
   (e) En déduire le signe de g.
2. On considère la fonction $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln(x)}{x}$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer la limite de f en 0^+.
   (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (d) Prouver que la droite $y = \frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
   (e) Prouver que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
   (f) En déduire les variations de f.
   (g) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On fera apparaitre les asymptotes.

Exercice 4

1. On considère la fonction $g(x) = -x^2 + 1 - \ln(x)$.
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Calculer les limites de g aux bords de son ensemble de définition.
   (c) Calculer la dérivé de la fonction g.
   (d) En déduire les variations de g.
   (e) En déduire le signe de g.
2. On considère la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{\ln(x)}{2x}$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer la limite de f en 0^+.
   (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(d) Prouver que la droite $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

(e) Prouver que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

(f) En déduire les variations de f.

(g) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On fera apparaitre les asymptotes.

Exercice 5

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{x-1} + 1 \end{array}$$

Partie A. Étude de la fonction.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter ce résultat.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer la dérivé f' de f.
4. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B. Recherche d'une tangente.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On note T_a la tangente à la courbe représentative de f, d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer que T_a passe par l'origine si et seulement si le nombre réel a vérifie l'équation

$$1 - a^2e^{a-1} = 0$$

3. Étudier la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$.
4. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$.
5. Calculer $g(1)$. En déduire la valeur exacte de α.
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f qui passe par 0.

Exercice 6

Résoudre l'équation suivante :

$$e^{2x} = e^x + 1$$