

Trigonométrie

Exercice 1

1. Convertir en degrés :

(a) $\frac{\pi}{3}$

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{5\pi}{6}$

(d) $\frac{5\pi}{9}$

(e) $\frac{5\pi}{36}$

2. Convertir en radian :

(a) 45°

(b) 120°

(c) 30°

(d) 40°

(e) 125°

Exercice 2

Donner la classe des angles suivants modulo 2π , dans $[-\pi; \pi[$.

1. $\frac{15\pi}{6}$

2. $\frac{197\pi}{3}$

3. $-\frac{81\pi}{18}$

4. $\frac{1025\pi}{15}$

5. $-\frac{2048\pi}{12}$

6. $-\frac{75\pi}{6}$

7. $\frac{12321\pi}{44}$

Exercice 3

1. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 4

1. Déterminer la mesure de l'angle x tel que $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ \sin(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$

2. Déterminer la mesure de l'angle x tel que $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ \cos(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 5

Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{5\pi}{2}; \pi\right]$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

5. $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

4. $\cos(2x) = \sin(3x)$

6. $\sin(3x) < \frac{1}{2}$

Exercice 6

On considère la fonction $f(x) = 2x - \sin(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$.

2. En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 7

Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(1;0)$, $M(\cos(x); \sin(x))$, $P(\cos(x);0)$. On considère de plus le point T intersection de (OM) et de la perpendiculaire à (OA) en A .

1. Faire un dessin.
2. Montrer que $AT = \tan(x)$.
3. Soient A_1 l'aire du triangle OAM , A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT . En comparant ces aires, prouver que $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.
4. En déduire que $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$.
5. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{2 + \cos(x)}$

1. Justifier que f est bien définie sur \mathbb{R} .
2. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
3. Étudier les variations de f sur $[-\pi; \pi]$.
4. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (1 + \sin(x)) \times \cos(x)$$

1. Montrer que $f'(x) = -2\sin^2(x) - \sin(x) + 1$.
2. (a) Factoriser le polynôme $-2x^2 - x - 1$.
(b) En déduire une forme factorisée de f'
3. En déduire le tableau de variation de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Tracer la fonction f sur \mathbb{R} .
5. Déterminer l'équation de la tangente à f en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)(1 + \cos(x))$.

1. Démontrer que f est impair et périodique. En déduire que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0; \pi]$.
2. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
3. Donner l'allure de la courbe sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3(x) - \sin^3(x)$.

1. Démontrer que f est périodique de période 2π .
2. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x)$
(b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
3. A l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variations sur $[-\pi; \pi]$.
4. (a) Montrer que pour tout réels a et b , $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
(b) Déterminer les antécédents de 0 par f .