Logique et ensemble

Calculs propositionnels

Exercice 1

Quelles sont les manières de placer les parenthèses dans l'expression $\neg p \vee q \wedge \neg r$? On comparera les tables de vérité de ces propositions.

Exercice 2

Donner les tables de vérités des propositions suivantes.

1. $(p \vee q) \wedge ((p \wedge r) \wedge (r \vee \neg q)$
2. $\neg((p \wedge q) \vee \neg(\neg r) \vee (p \wedge q))$

Exercice 3

Simplifier les propositions suivantes.

1. $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$
2. $\neg r \wedge (\neg r \vee (p \wedge \neg r \wedge (q \vee p)))$
3. $(\neg p \vee q) \wedge \neg q$
4. $q \Rightarrow (p \vee \neg r)$
5. $(p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg q)$
6. $(((p \wedge q) \vee \neg q) \wedge ((p \wedge \neg q) \wedge q))$

Exercice 4

On note $\veebar$ le *ou exclusif*, dont la table de vérité est

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. Montrer à l'aide d'une table de vérité que $p \veebar q = (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.
2. En vous servant du résultat précédent et des règles CANDIMATICA montrer les formules suivantes.

(a) $p \veebar p = 0$

(b) $p \veebar 0 = p$

(c) $p \veebar 1 = \neg p$

(d) $p \veebar \neg p = 1$

(e) $p \veebar q = q \veebar p$

(f) $p \veebar (q \veebar r) = (p \veebar q) \veebar r$

(g) $(p \veebar q = 0)$ si et seulement si $p = q$

(h) $\neg(p \veebar q) = (\neg p) \veebar q = p \veebar (\neg q) = (\neg p) \veebar (\neg q)$

(i) Si $(p \veebar q = r)$ alors $(q \veebar r = p)$

Ensembles Discrets

Exercice 5

On considère dans le référentiel $\mathcal{E} = \{a, b, c, d\}$, les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{b, c, d\}$. Déterminer en extension les ensembles suivants.

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $\overline{A}$
4. $\overline{B}$
5. $\overline{A \cap B}$
6. $\overline{A} \cap \overline{B}$
7. $(A \cap \overline{B}) \cup B$
8. $(A \cup \overline{B}) \cap A$
9. $(A \cap B) \cap \overline{B}$

Exercice 6

Donner le cardinal de chacun des ensembles suivants.

1. $A = \Big\{a, b, (a, b)\Big\}$
2. $B = \Big\{(1, 2), 7, 9, \varnothing\Big\}$
3. $C = \Big\{\{a\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}\Big\}$
4. $D = \Big\{\varnothing, (a, b), \{a, b\}, a, b, \{\varnothing\}\Big\}$
5. $E = \Big\{b, c\Big\}$
6. $F = \Big\{\{b, c\}\Big\}$
7. $G = \varnothing$
8. $H = \Big\{\varnothing\Big\}$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, reproduire dans un diagramme de Venn les parties correspondantes.

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $\overline{A}$
4. $\overline{A \cap B}$
5. $\overline{A} \cap \overline{B}$
6. $\overline{A \cup B}$
7. $(A \cap B) \cap \overline{B}$
8. $\overline{A} \cup \overline{B}$

Exercice 8

Dans le référentiel $\mathcal{E} = \Big\{\varnothing, a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}\Big\}$ dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

1. $\varnothing \in \mathcal{E}$
2. $\{a, b\} \in \mathcal{E}$
3. $\{b, c\} \subseteq \mathcal{E}$
4. $c \in \mathcal{E}$
5. $b \in \mathcal{E}$
6. $\{a, b\} \subseteq \mathcal{E}$
7. $\varnothing \subseteq \mathcal{E}$
8. $\{a, \{a\}\} \subseteq \mathcal{E}$

Exercice 9

Simplifier les expressions suivantes.

1. $A \cap (\overline{A} \cap B)$
2. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$
3. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
4. $A \cup (A \cap B)$
5. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$
6. $(A \cup B \cup \overline{C}) \cap C \cap \overline{B}$
7. $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup B \cup (\overline{B} \cap C)$
8. $(A \cup B \cup \overline{C}) \cap A$

Exercice 10

Soient A, B, C et D quatre ensemble d'un référentiel $\mathcal{E}$.

1. Donner une relation simple entre $\#(A \cup B)$ et $\#A$, $\#B$ et $\#(A \cap B)$.
2. Donner une relation simple entre $\#(A \cup B \cup C)$ et $\#A$, $\#B$, $\#C$, $\#(A \cap B)$, $\#(A \cap C)$, $\#(B \cap C)$ et $\#(A \cap B \cap C)$.
3. Sur le même schéma, exprimer $\#(A \cup B \cup C \cup D)$.

Exercice 11

Fixons un référentiel $\mathcal{E}$. Soient A et B deux partie de $\mathcal{E}$. On pose

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

1. Représenter $A - B$ sur un diagramme de Venn ou de Caroll.
2. Montrer que $A - B = (A \cup B) - B$.
3. Montrer que $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$.

Exercice 12

Dans une école comprenant 1100 élèves, 950 sont inscrits a cours d'espagnol, 520 au cours de russe et 250 au cours d'italien.

On précise que 400 élèves font de l'espagnol et du russe, 150 font de l'espagnol et de l'italien et 130 font du russe et de l'italien.

Tous les élèves font au moins une langue.

Combien d'élèves ne pratique qu'une seule langue ?