Exercices corrigés pour s'entrainer

Généralités sur les fonctions

Exercice 1

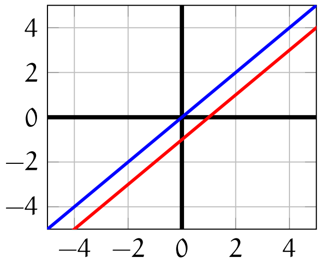
Après avoir déterminé leur domaine de définition, tracer à main levée l'allure des courbes représentatives des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = x - 1$
2. $f_2(x) = \sqrt{x-1}$
3. $f_3(x) = \sqrt{1-x}$
4. $f_4(x) = |1-x|$
5. $f_5(x) = \sqrt{x} - 1$
6. $f_6(x) = x^2 + x + 1$
7. $f_7(x) = -x^2 + 3x + 4$
8. $f_8(x) = x^2 + 1$
9. $f_9(x) = \sqrt{|x-1|}$

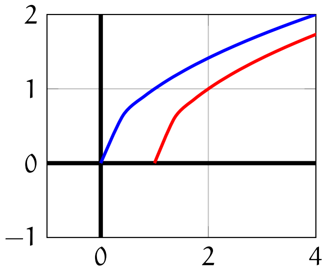
Correction

Pour répondre à ces questions, nous représentons en bleue les fonctions de référence utilisées et en rouge les fonctions demandées, translation des fonctions de références

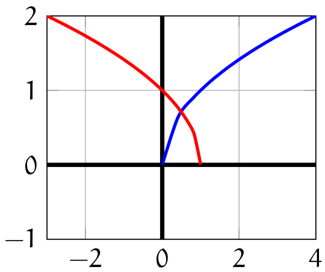
1. $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$. C'est la fonction $x \mapsto x$ translatée de 1 à droite.



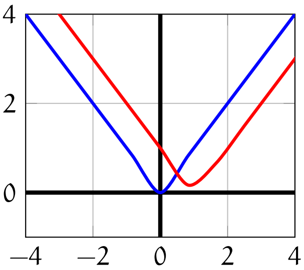
2. $\mathcal{D}_{f_2} = [1; +\infty[$. C'est la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ translatée de 1 à droite.



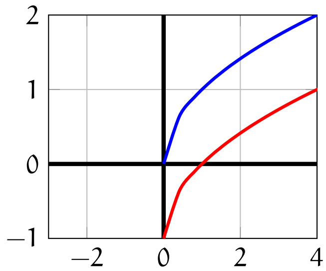
3. $\mathcal{D}_{f_3} =]-\infty; 1]$. C'est la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, symétrique par rapport aux ordonnées et translatée de 1 à droite.



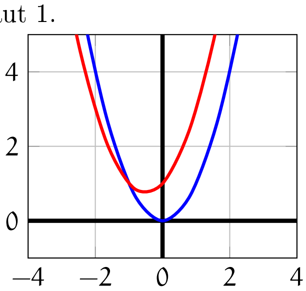
4. $\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R}$. C'est la fonction $x \mapsto |x|$, symétrique par rapport aux ordonnées et translatée de 1 à droite.



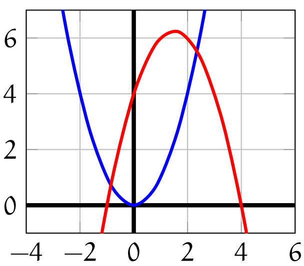
5. $\mathcal{D}_{f_5} = [0; +\infty[$. C'est la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, translatée de 1 vers le bas.



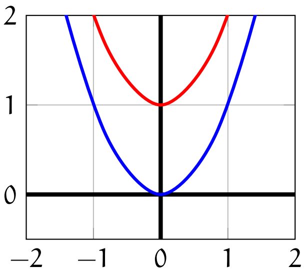
6. $\mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R}$. C'est un polynôme de degré 2 (une parabole), de coefficient dominant positif donc tournée vers le haut et qui en 0 vaut 1.



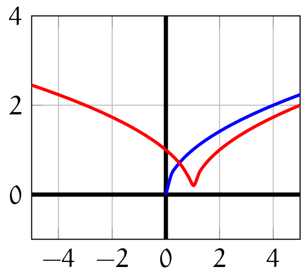
7. $\mathcal{D}_{f_7} = \mathbb{R}$. C'est un polynôme de degré 2 (une parabole), de coefficient dominant négatif donc tournée vers le bas et qui en 0 vaut 4.



8. $\mathcal{D}_{f_8} = \mathbb{R}$. C'est la parabole de référence, translatée de 1 vers le haut



9. $\mathcal{D}_{f_9} = \mathbb{R}$. On prend la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ que l'on représente en miroir par rapport à l'axe des ordonnées et que l'on translate de 1 vers la droite.



Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de a.

1. $x \mapsto x^2$, $a = 1$
2. $x \mapsto x^3 - x$, $a = 0$
3. $x \mapsto 3x - 1$, $a = 1$
4. $x \mapsto x^3 - 2x - 1$, $a = -1$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$, $a = 0$

Correction

Trouver Les antécédents de a, c'est résoudre $f(x) = a$.

1.
$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\longleftrightarrow x^2 = 1 \\ &\iff x^2 - 1 = 0 \\ &\iff (x-1)(x+1) = 0 \\ &\iff x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$
Les antécédents de 1 par $x \mapsto x^2$ sont -1 et 1.

2.
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x^3 - x = 0 \\ &\iff x(x^2 - 1) = 0 \\ &\iff x(x-1)(x+1) = 0 \\ &\iff x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$
Les antécédents de 0 par $x \mapsto x^3 - x$ sont -1, 0 et 1.

3.
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 3x - 1 = 1 \\ &\iff 3x = 2 \\ &\iff x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$
L'unique antécédents de 1 par $x \mapsto 3x - 1$ est $\dfrac{2}{3}$.

4.
$$\begin{aligned} f(x) = -1 &\iff x^3 - 2x - 1 = -1 \\ &\iff x^3 - 2x = 0 \\ &\iff x(x^2 - 2) = 0 \\ &\iff x = 0 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \end{aligned}$$
Les antécédents de -1 par $x \mapsto x^3 - 2x - 1$ sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

5.
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{1}{x-1} = 0 \\ &\iff 1 = 0 \end{aligned}$$
Il n'y a pas d'antécédent de 0 par $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.

Limites

Exercice 3

Calculer la limite suivante.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

Correction

En remplaçant x par 2 dans l'expression littérale on trouve $\dfrac{0}{0}$ ce qui est une forme indéterminée. Cela montre en particulier que le dénominateur admet 2 comme racine. Déterminons toutes les racines de ce polynôme. Le discriminant de $x^2 - 3x + 2$ est $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1 > 0$. Il y a donc deux racines $x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$. En particulier on a la forme factorisée $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Par une identité remarquable on a aussi $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ de sorte que l'on a $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x+2}{x-1}$. Passons à nouveau à la limite pour pouvoir conclure :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-1} = 4$$

Exercice 4

1. Une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ est tel que pour tout $x > 0$, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

(a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant \frac{1}{x}$.

   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

3. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x \geqslant 1$, $\frac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

4. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x \geqslant 1$, $1 - \frac{1}{x} \leqslant 2f(x) - 5 \leqslant 1 + \frac{1}{x^2}$.

   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$.

   (a) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   (c) Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Correction

1. (a) On ne peut pas déterminer exactement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En effet si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors on a bien $f(x) \leqslant \frac{1}{x}$ et la limite vaut 0. Mais si $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ alors on a aussi $f(x) \leqslant \frac{1}{x}$ et la limite vaut -1

   (b) Pour les même raison on ne peut pas déterminer exactement $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2. (a) De la même manière on ne peut pas déterminer exactement la valeurs de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) Puisque $f(x) \geqslant \frac{1}{x}$ alors cela reste vrai à la limite et on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Or le seul nombre plus grand que $+\infty$ est $+\infty$ de sorte que l'on ne peut avoir que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

3. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x \geqslant 1$, $\frac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

   (a) En passant à la limite en $+\infty$ dans l'encadrement on a arrive à

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \leqslant \lim_{x\to+\infty} f(x) \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$$

   Or les limites à gauche et à droite donnent 0 de sorte que la limite de f se retrouve pris en étau entre 0 et 0 et ne peut valoir que 0. Déterminer si possible $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) L'encadrement donnée n'est vrai que lorsque $x \geqslant 1$ Il n'est donc pas possible de l'utiliser lorsque x se rapproche de 0.

4. (a) En ajoutant 5 et en divisant par deux l'inégalité donnée on arrive à

   $$3 - \frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant 3 + \frac{1}{2x^2}$$

   pour tous les $x \geqslant 1$ de sorte que l'on peut passer à la limite dans l'inégalité et obtenir

   $$\lim_{x\to+\infty} 3 - \frac{1}{2x} \leqslant \lim_{x\to+\infty} f(x) \leqslant \lim_{x\to+\infty} 3 + \frac{1}{2x^2}$$

   Or les limites à gauche et à droite de cette inégalité donnent 3 de sorte que la limite de f ne peut être que 3.

5. Une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ est tel que pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$.

(a) Il n'est pas possible de déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ exactement. Par exemple la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ satisfait l'inégalité et tend vers $+\infty$, tandis que la fonction $f(x) = 0$ répond aussi à l'inégalité mais tend vers 0.

(b) En passant à la limite dans l'inégalité on a $\lim_{x\to0} 0 \leqslant \lim_{x\to0} f(x) \leqslant \lim_{x\to0} \sqrt{x}$ et les deux limites à gauche et à droite tendent vers 0 de sorte que f tend aussi vers 0.

(c) En divisant l'inégalité par x, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité puisque x est positif, on a

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Les deux membres de gauche et droite tendent vers 0 en $+\infty$ de sorte qu'il en va de même pour $\frac{f(x)}{x}$.

Étude de fonction

Exercice 5

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 13x - 22}{x - 4}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier les limites de f au bord de son domaine de définition.
3. Déterminer la dérivé de la fonction f.
4. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.
5. Étude des asymptotes.
   (a) Déduire du calcul de limite l'équation d'une asymptote verticale.
   (b) Existe-t-il des asymptotes horizontales (non oblique) ?
   (c) Montrer que $f(x) = -2x + 5 + \dfrac{-2}{x-4}$.
   (d) En déduire l'équation d'une asymptote oblique.
6. Dessiner l'allure de la courbe sur l'intervalle $[-6; 14]$ aussi proprement que faire ce peu.

Correction

1. Pour que la fonction soit définie, il faut et il suffit que son dénominateur ne s'annule pas. On trouve rapidement qu'il s'annule en 4 de sorte que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{4\}$.
2. En tant que fraction de polynômes les limites en l'infini revienent à calculer les limites des monômes de plus haut degrés. D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$. De la même manière on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. De plus $\lim_{x\to4^-} f(x) = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$ et $\lim_{x\to4^+} f(x) = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$.
3. La fonction f est du type $\dfrac{u}{v}$ où $u = -2x^2 + 13x - 22$ et $v = x - 4$. On a alors $u' = -4x + 13$, $v' = 1$ et $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. En simplifiant on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x - 30}{(x-4)^2}$$

4. L'expression de f' est une fraction dans laquelle le dénominateur est un carré donc nécessairement positif sur son ensemble de définition. Déterminons le signe du numérateur $-2x^2 + 13x - 22$. Il s'agit d'un polynôme de dégrés 2. Son discriminant est $\Delta = (16)^2 - 4(-2)(-30) = 16 = (4)^2 > 0$. Il y a donc deux solutions disctinctes.

$$x_1 = \frac{-(16) - 4}{-4} = 5, \qquad x_2 = \frac{-(16) + 4}{-4} = 3$$

Ceci nous permet de dresser le tableau de signe de f' et donc le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		3		4		5		$+\infty$
$-2x^2+16x-30$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(x-4)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
f'		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

5. Étude des asymptotes.
   (a) Puisque les limites en 4 sont infinis, on en déduit que la droite d'équation $x = 4$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.
   (b) Il n'existe pas d'asymptote horizontale (non oblique) car les limites en l'infini sont infinies.
   (c)

$$\begin{aligned} -2x+5+\frac{-2}{x-4} &= \frac{(-2x+5)\times(x-4)}{x-4}+\frac{-2}{x-4} \\ &= \frac{(-2x+5)\times(x-4)-2}{x-4} \\ &= \frac{-2x^2+13x-22}{x-4} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   (d) On en déduit que la droite d'équation $y = -2x+5$ est une asymptote oblique à la courbe puisque car la limite de la différence tend vers 0.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-(-2x+5) = \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x} = 0$$

6.

Exercice 6

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier les limites de f au bord de son domaine de définition.
3. Déterminer la dérivé de la fonction f.
4. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.
5. Étude des asymptotes.
   (a) Déduire du calcul de limite l'équation d'une asymptote verticale.
   (b) Existe-t-il des asymptotes horizontales (non oblique) ?
   (c) Montrer que $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{2}{x - 1}$.
   (d) En déduire l'équation d'une asymptote oblique.
6. Dessiner l'allure de la courbe sur l'intervalle $[-9; 11]$ aussi proprement que faire ce peu.

Correction

1. Pour que la fonction soit définie, il faut et il suffit que son dénominateur ne s'annule pas. On trouve rapidement qu'il s'annule en 1 de sorte que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$.
2. En tant que fraction de polynômes les limites en l'infini revienent à calculer les limites des monômes de plus haut degrés. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$. De la même manière on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. De plus $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$.
3. La fonction f est du type $\dfrac{u}{v}$ où $u = 2x^2 - 3x + 3$ et $v = x - 1$. On a alors $u' = 4x - 3$, $v' = 1$ et $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. En simplifiant on trouve
$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$
4. L'expression de f' est une fraction dans laquelle le dénominateur est un carré donc nécessairement positif sur son ensemble de définition. Déterminons le signe du numérateur $2x^2 - 3x + 3$. Il s'agit d'un polynôme de dégrés 2. Son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4(2)(0) = 16 = (4)^2 > 0$. Il y a donc deux solutions disctinctes.
$$x_1 = \frac{-(-4) - 4}{4} = 0, \qquad x_2 = \frac{-(-4) + 4}{4} = 2$$
Ceci nous permet de dresser le tableau de signe de f' et donc le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$2x^2 - 4x$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

5. Étude des asymptotes.
   (a) Puisque les limites en 1 sont infinis, on en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.
   (b) Il n'existe pas d'asymptote horizontale (non oblique) car les limites en l'infini sont infinies.

(c)

$$\begin{aligned} 2x - 1 + \frac{2}{x-1} &= \frac{(2x-1)\times(x-1)}{x-1} + \frac{2}{x-1} \\ &= \frac{(2x-1)\times(x-1)+2}{x-1} \\ &= \frac{2x^2-3x+3}{x-1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(d) On en déduit que la droite d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe puisque car la limite de la différence tend vers 0.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

6.