

## TD3 - Fonctions

## Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 14^+} \frac{-8}{x-14} =$
2.  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{-15}{x-5} =$
3.  $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{9}{x-7} =$
4.  $\lim_{x \rightarrow \frac{359}{14}} \frac{8}{x - \frac{359}{14}} =$
5.  $\lim_{x \rightarrow -\frac{61}{3}^+} \frac{-3}{x + \frac{61}{3}} =$
6.  $\lim_{x \rightarrow \frac{187}{19}^+} \frac{1}{x - \frac{187}{19}} =$
7.  $\lim_{x \rightarrow \frac{164}{3}^+} \frac{-9}{x - \frac{164}{3}} =$
8.  $\lim_{x \rightarrow -8^+} \frac{340}{x+8} =$
9.  $\lim_{x \rightarrow -17^-} \frac{-15}{x+17} =$
10.  $\lim_{x \rightarrow 10^+} \frac{67}{x-10} =$
11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-6x^2 + \frac{57}{7}x - 5x^4 + 9x^3}{-7x^3 - 7x^2 - 3 + x} =$
12.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2 - x - \frac{23}{5}}{3x^4 - 7 + 4x - x^2 + 7x^3} =$
13.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{43}{8}x + 8x^2 - 8}{5x - 9} =$
14.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{-\frac{35}{3} - 7x - 2x^3 - 9x^2} =$
15.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + 5x^2 + \frac{1}{8}x}{-\frac{46}{5}x^3 - 8 + 6x + 7x^2} =$
16.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 + \frac{11}{3}x + 5x^3}{\frac{2}{3}x + \frac{62}{5}x^2 + 4 + 5x^3} =$
17.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - 8x - x^2 - x^3}{-7x^2 - x^3 - x - 5} =$
18.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 4x}{-7x + 5x^2 + 7} =$
19.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7 - x - 6x^2}{9x - 8 + 3x^2} =$
20.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 8 + 5x^4 + 8x^3 - 8x^2 =$

## Exercice 2

Dériver les fonctions suivantes.

1.  $x \mapsto x^3$
2.  $x \mapsto x^4 - 5x^2 + 4$
3.  $x \mapsto \sqrt{x}$
4.  $x \mapsto \sqrt{x-3}$
5.  $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$
6.  $x \mapsto (x^2 - 2x)^2$
7.  $x \mapsto (x^2 - x)^{47}$
8.  $x \mapsto 3(x^4 - 9x^3 + x)^7$
9.  $x \mapsto (x-1)(2x+3)$
10.  $x \mapsto 4(2x-4)(x+3)$
11.  $x \mapsto x\sqrt{x}$
12.  $x \mapsto xx^3$
13.  $x \mapsto x^2\sqrt{x-1}$
14.  $x \mapsto x^3\sqrt{3x-4}$
15.  $x \mapsto \frac{1}{x}$
16.  $x \mapsto \frac{1}{x+1}$
17.  $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
18.  $x \mapsto \frac{3}{x^2+1}$
19.  $x \mapsto \frac{3x-4}{x^2+1}$
20.  $x \mapsto \frac{\sqrt{7x-8}}{3x}$

### Exercice 3

Le but de l'exercice est de d'étudier la fonction  $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$

1. Domaine de définition

- (a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 + x + 1 = 0$ .
- (b) Prouver que  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ .
- (c) En déduire le domaine de définition de la fonction  $f$ .

2. Étude de la dérivé

- (a) Montrer que pour tout réel  $x$  de l'ensemble de définition  $f'(x) = -\frac{3x^2}{(x^3 - 1)^2}$
- (b) En déduire les variations de  $f$ .

3. Étude aux limites

- (a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- (b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4. Donner l'équation de la tangente en 0.

5. Tracer, aussi proprement que faire ce peut, l'allure de la courbe représentative de  $f$ .

### Exercice 4

Étudier la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

### Exercice 5

Étudier la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x} \end{aligned}$$

### Exercice 6

Étudier la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2 + 3x - 2}{x^3 - x} \end{aligned}$$