Remise à niveau

Logarithme et exponentielle

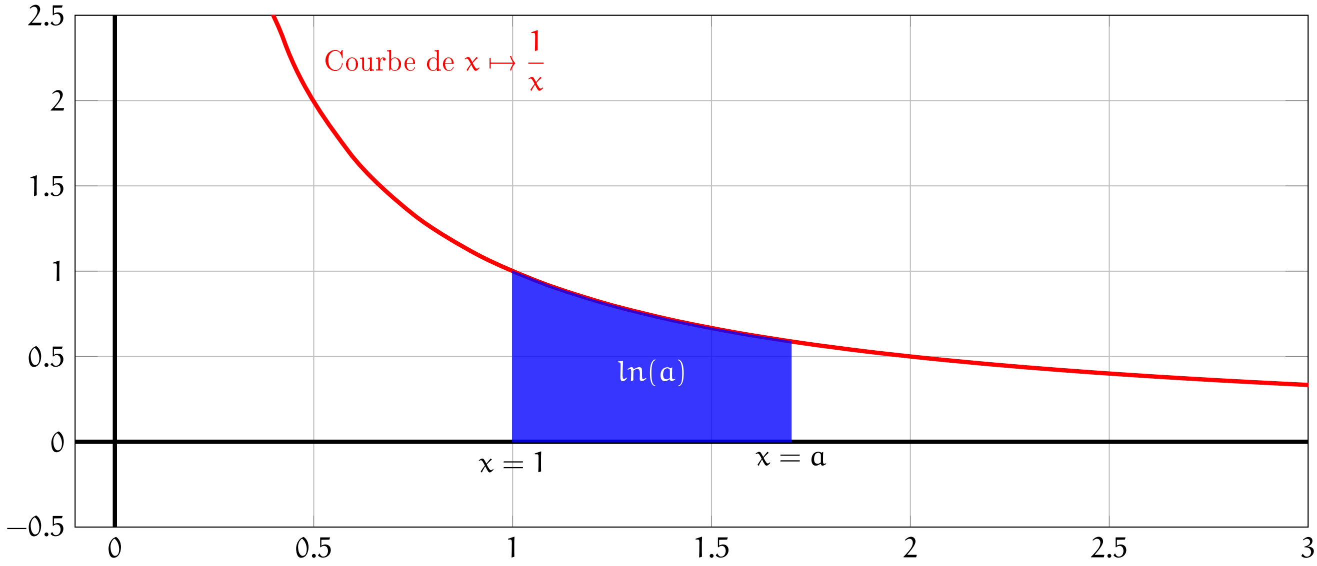
1. Logarithme

Définition et premières propriétés

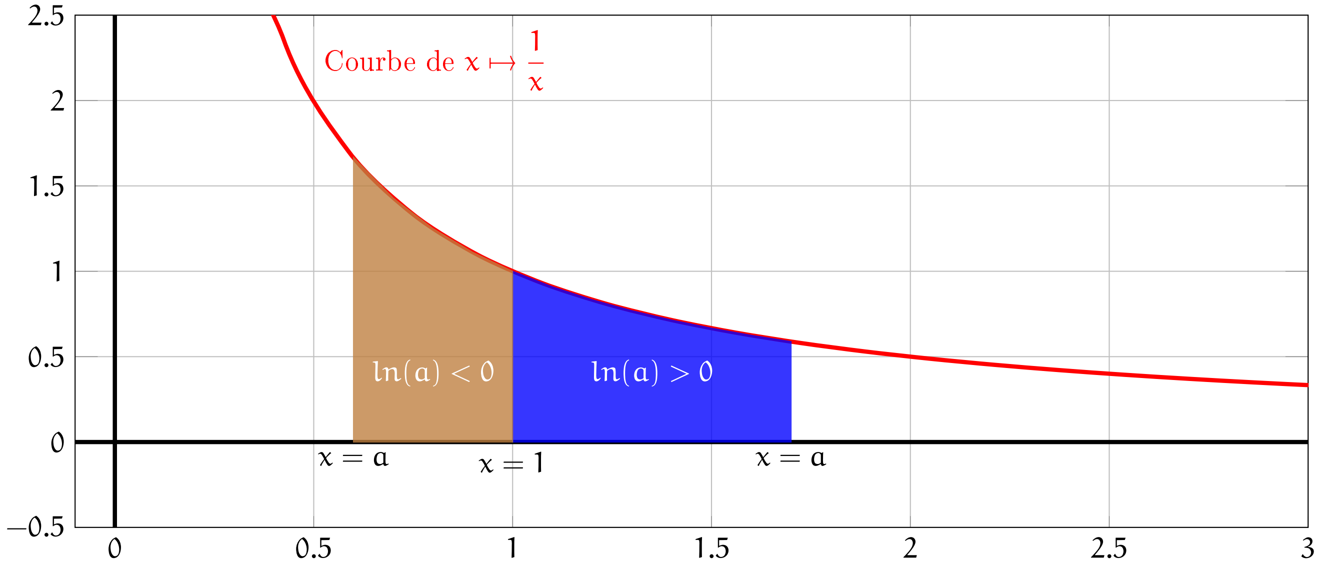
Définition

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\ln(a)$ appelé le **logarithme népérien** de a, l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite $x = 1$, $x = a$ et la courbe représentative de la fonction inverse.

En dessin cela donne :



L'aire dont on parle est une aire *algébrique* c'est à dire avec un signe : on regarde toujours l'aire entre $x = 1$ et $x = a$ dans cet ordre de sorte que si $a < 1$ alors l'aire sera considérée négative.



Proposition

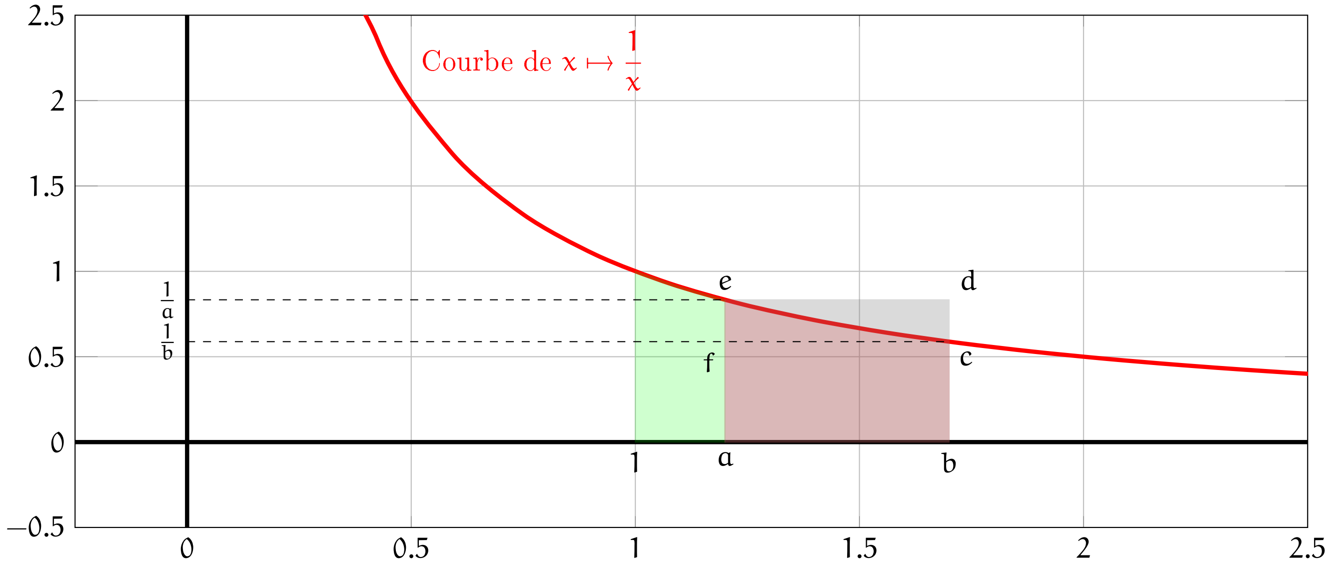
1. Le nombre réel $\ln(a)$ n'est défini que si $a \in]0; +\infty[$.
2. Si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$.
3. $\ln(1) = 0$.

4. Si $a > 1$ alors $\ln(a) > 0$.

Ces propriétés se déduisent trivialement d'une lecture géométrique du logarithme.

La fonction logarithme

Considérons à présent la fonction logarithme, c'est à dire la fonction qui a $x \in]0; +\infty[$ associe $\ln(x)$ l'aire sous la fonction inverse. Étudions cette fonction. Par définition il s'agit d'une aire... un peu compliqué comme aire mais une aire. Un objet géométrique dont l'aire est très facile est le rectangle. Faisons un dessin.



La quantité $\ln(b) - \ln(a)$ correspond à l'aire sous la courbe inverse entre 1 et b moins celle entre 1 et a. En définitive il ne reste que l'aire rouge[1], c'est à dire l'aire entre a et b sous la fonction inverse.

On peut encadrer cette aire par celles des rectangles $abcf$ et $abde$:

$$\mathcal{A}(abcf) \leqslant \ln(b) - \ln(a) \leqslant \mathcal{A}(abde)$$

L'aire d'un rectangle est longueur fois largeur : $\mathcal{A}(abcf) = (b-a)\frac{1}{b}$ et $\mathcal{A}(abde) = (b-a)\frac{1}{a}$. On obtient un encadrement

$$\frac{b-a}{b} \leqslant \ln(b) - \ln(a) \leqslant \frac{b-a}{a}$$

En prenant par exemple $a = 1$ et sachant que $\ln(1) = 1$ on a $1 - \frac{1}{b} \leqslant \ln(b) \leqslant b - 1$

Théorème

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on considère la fonction $f(x) = \ln(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration. Reprenons l'encadrement $\frac{b-a}{b} \leqslant \ln(b) - \ln(a) \leqslant \frac{b-a}{a}$ et divisons par $b - a$ et posons $b = x$:

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x-a} \leqslant \frac{1}{a}$$

Mais par définition, pour n'importe quelle fonction $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Donc la limite de $\frac{\ln(x) - \ln(a)}{x-a}$ est la valeur de la dérivé de $\ln$ en a. Mais la dernière inégalité montre que cette quantité est *prise en sandwich*

1. Désolé amis daltonien

entre $\frac{1}{x}$ qui tend vers $\frac{1}{a}$ lorsque x tend vers a et $\frac{1}{a}$ qui reste constant lorsque x tend vers a. En conclusion le taux d'accroissement, lorsque x tend vers a ne peut prendre que la valeur $\frac{1}{a}$. □

Corollaire

Soit u fonction définie sur un domaine D tel que pour tout $x \in D$, $u(x) > 0$. Posons $f(x) = \ln(u(x))$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration. Il s'agit de la formule de dérivation de la composé de fonction. □

Si par exemple $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ alors $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Corollaire

La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration. La dérivé est strictement positive donc la fonction est strictement croissante. □

Limites et croissances comparées

Théorème

Soient a et b deux nombres réelles strictement positifs alors

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration. Cette démonstration utilise un résultat d'analyse assez instinctif : si deux fonctions ont la même dérivés alors elles sont égales à une constante près.

Posons $g(x) = \ln(xb)$. Alors $g'(x) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x}$. Ainsi g et $\ln$ ont la même dérivé, donc $g(x) = \ln(x) + k$ pour un certain nombre réelle k que l'on peut déterminer en prenant une valeur particulière pour x, par exemple $x = 1$: $\ln(b) = g(1) = \ln(1) + k = k$ donc pur tout $x > 0$, $g(x) = \ln(x) + \ln(b)$. Si on prend $x = a$ alors on obtient la formule. □

Corollaire

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

1. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
3. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.
4. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.

Démonstration.

1. $\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$.
2. C'est la formule précédente pour $a = 1$ (sachant que $\ln(1) = 0$).

3. $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}^2) = \ln(a)$
4. $\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n}) = \underbrace{\ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n}$

□

Corollaire

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Démonstration. Chercher la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\ln(x)$ reviens à chercher la limite lorsque n tend vers l'infini de $\ln(2^n)$ (c'est un changement de variable). Or $\ln(2^n) = n\ln(2)$ et $\ln(2)$ n'est qu'un nombre positif, dont la calculatrice donne $\ln(2) = 0.693$. On a trivialement que $n\ln(2)$ tend vers l'infini, il en va donc de même pour $\ln(x)$.

Pour la limite en 0^+ on pose $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\infty$$

□

Observons de plus près $\frac{\ln(x)}{x}$. Le numérateur comme le dénominateur de cette expression tend vers $+\infty$. Le théorème de croissances comparées stipule qu'entre ces deux infinis, celui du logarithme est le plus faible.

Théorème Croissances comparées

Quelque soit $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$

Démonstration. Montrons que $\frac{\ln(x)}{x}$ tend vers 0 en l'infini.

On va raisonner comme précédemment en posant $x = 2^n$. Ainsi calculer la limite en l'infini de $\frac{\ln(x)}{x}$ revient à calculer la limite de $\frac{\ln(2^n)}{2^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$. En utilisant les propriétés du logarithme on obtient $\frac{\ln(2^n)}{2^n} = \frac{n}{2^n}\ln(2)$. Il s'agit donc de démontrer que $\frac{n}{2^n}$ tend vers 0. Pour y arriver on considère la suite $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

Cette suite est décroissante. En effet

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} \\
&= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} \\
&= \frac{(n+1)^2}{2^n.2} \times \frac{2^n}{n^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(n+1)^2}{n^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

Puisque n va finir par tendre vers $+\infty$, on peut supposer que $n \geqslant 3$. Dans ce cas $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{3}$ donc $1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{4}{3}$ soit encore en passant au carré $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{16}{9}$ donc pour finir $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{8}{9} < 1$. Ceci prouve que la suite u_n est décroissante (à partir de $n \geqslant 3$). En particulier on peut observer que $0 < u_n < u_3 = \frac{3}{8} < 1$. Soit encore $0 < \frac{n^2}{2^n} < 1$. En divisant par n on obtient $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{1}{n}$. Ainsi $\frac{n}{2^n}$ est encadré par deux suites qui tendent vers 0 ce qui prouve que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2^n)}{2^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}\ln(2) = 0.$$

Pour le reste il s'agit (encore) de changement de variable :

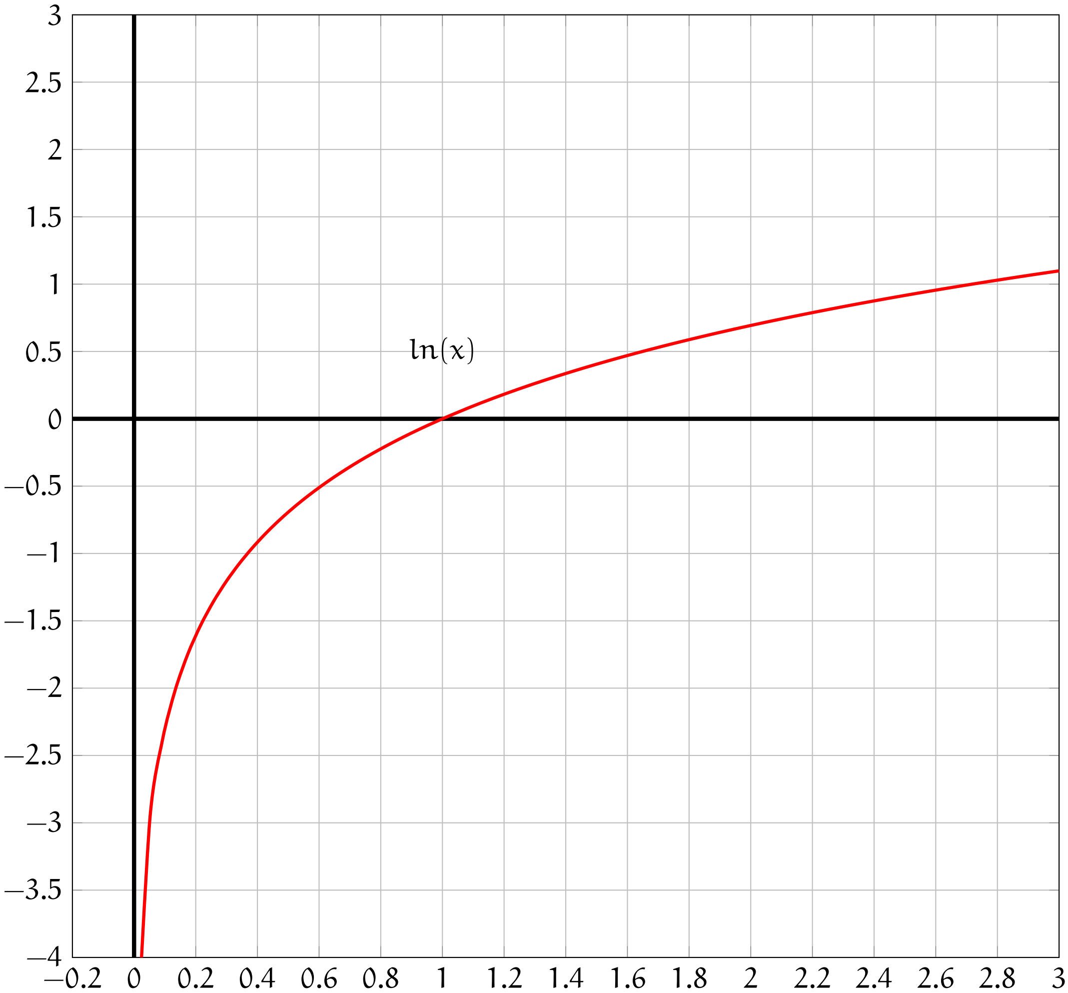
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha} \overset{X=x^\alpha}{=} \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X^{\frac{1}{\alpha}})}{X} = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\times\frac{\ln(X)}{X} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) \overset{X=\frac{1}{x}}{=} \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{1}{X}\right)^\alpha \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X^\alpha}(-\ln(X)) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln(X)}{X^\alpha} = 0$$

□

D'après le cours sur les asymptotes, lorsqu'une recherche d'asymptote oblique $y = ax+b$ d'une fonction f, on a toujours $a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax$. Dans le cas de la fonction logarithme le théorème des croissances comparées montre que si il y a une asymptote oblique alors le coefficient directeur est nul. Mais pour la détermination du b on trouve $+\infty$. Ainsi il n'y a pas d'asymptote oblique bien que l'infini de x soit plus grand que celui du logarithme.

En conclusion, voici la courbe représentative de la fonction logarithme.



Une petite limite à emporter s'il vous plait !

Proposition

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Démonstration. Soit $f(x) = \ln(x+1)$ alors $f(0) = 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ mais

$$1 = f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

□

Un exemple

Étudions la fonction $f(x) = \dfrac{x\ln(x^2-1)}{x-1}$. Dans la pratique, des questions intermédiaires sont posées pour arriver aux conclusions. Ici nous explorons de file en aiguille cette fonction.

La première chose à déterminer est le domaine de définition. D'une part il y a une fraction, il faut donc que le dénominateur soit non nul ce qui fait apparaître la contrainte $x \neq 1$, d'autre pas il y a un logarithme, il faut donc que son paramètre soit strictement positif. Cela fait apparaître $x^2 - 1 > 0$. Cette inéquation se résout rapidement et permet d'aboutir au domaine de f :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

Calculons les limites de f au bord de son domaine de définition.

La limite en $\pm\infty$. On peut réécrire f comme suit $f(x) = \dfrac{x}{x+1}\ln(x^2-1)$. D'après ce que nous savons sur les polynômes $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x^2-1) = +\infty$. En conclusion

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

La limite en -1^-. Il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x\ln(x^2-1)}{x+1} = \dfrac{-\ln(0^+)}{0^-} = -\infty$

La limite en 1^+. Il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x\ln(x^2-1)}{x+1} = \dfrac{\ln(0^+)}{2} = -\infty$

Déterminons la dérivé de la fonction f. On observe que $f = \dfrac{u}{v}$ où $u = x\ln(x^2-1)$ et $v = x+1$. Alors la dérivé d'un produit donne

$$\begin{aligned} u' &= 1 \times \ln(x^2-1) + x\frac{2x}{x^2-1} \\ &= \ln(x^2-1) + \frac{2x^2}{x^2-1} \end{aligned}$$

La dérivé d'un quotient donne quand à elle

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{\left(\ln(x^2-1) + \frac{2x^2}{x^2-1}\right)(x-1) - 1 \times x\ln(x^2-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\ln(x^2-1)(x+1) + \frac{2x^2}{x^2-1}(x-1) - x\ln(x^2-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-\ln(x^2-1) + \frac{2x^2}{x+1}}{(x+1)^2} \qquad \text{car } x^2-1 = (x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Puisque le dénominateur de cette expression est toujours positif, il suffit d'étudier le signe du numérateur pour déterminer le signe de f' et donc les variations de f. Le *problème* c'est que le numérateur est un peu difficile à étudier. Posons alors $g(x) = \dfrac{2x^2}{x+1} - \ln(x^2-1)$ et déterminons le signe de g.

Le domaine de définition de g est le même que celui de f pour les même raison. Déterminons alors sa dérivé :

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{4x(x+1)-2x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x}{x^2-1} \\
&= \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} - \frac{2x}{x^2-1} \\
&= \frac{(2x^2+4x)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)} - \frac{2x(x+1)}{(x^2-1)(x+1)} \\
&= \frac{(2x^2+4x)(x+1)-2x(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+1)} \\
&= \frac{2x(x^2-3)}{(x-1)(x+1)(x+1)}
\end{aligned}
$$

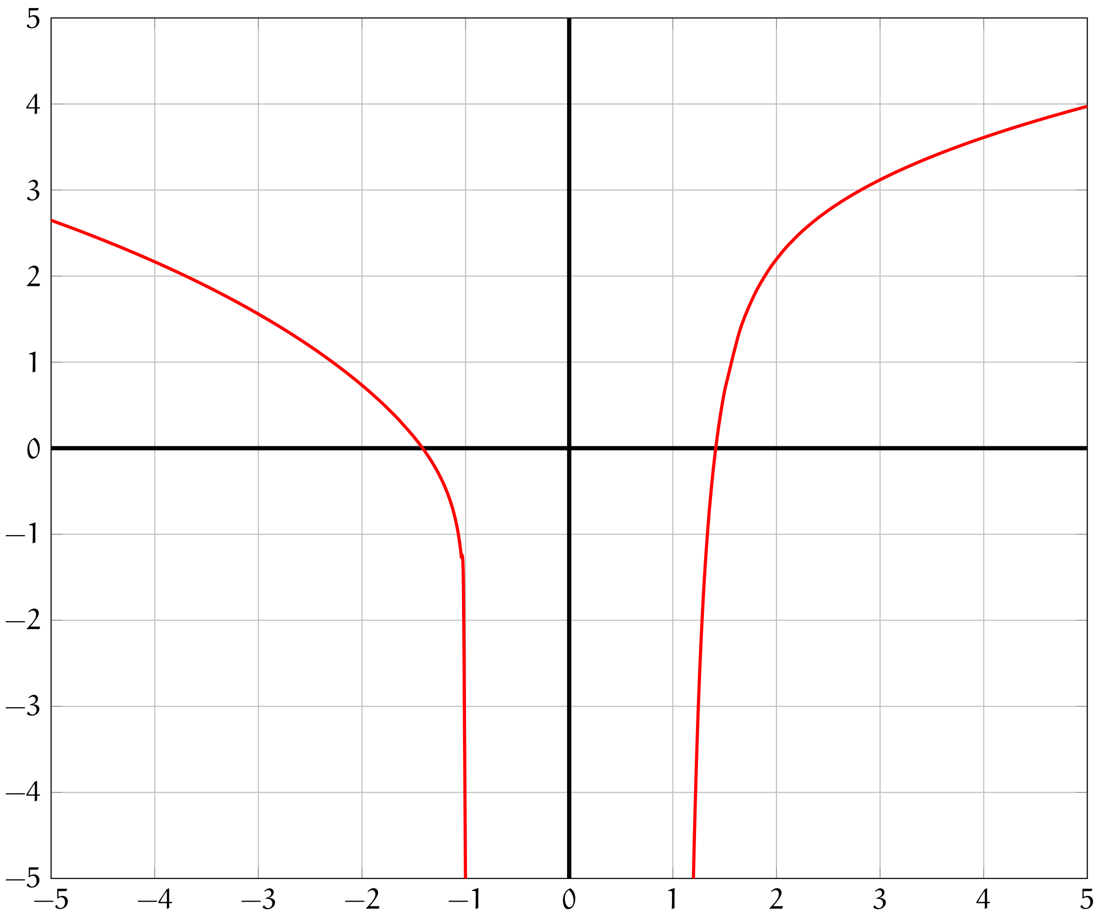
On peut à présent déterminer les variations de g que nous synthétisons dans le tableau suivant. A noter que puisque la fonction admet un nombre négatif comme maximum sur l'intervalle $]-\infty;-1[$ alors elle négative sur cet intervalle et f est décroissante. De même sur l'intervalle $]1;+\infty[$ la fonction g admet un nombre positif comme minimum et y est donc positive ce qui implique de f y est croissante.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$			0			$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$						$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$					0	$+$		$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0					$+$		$+$	
g'		$+$	0	$-$			0			$-$	0	$+$	
g		↗	$-3(\sqrt{3}+1)-\ln(2)$ $\simeq -8.888$	↘						↘	$3(\sqrt{3}-1)-\ln(2)$ $\simeq 1.503$	↗	
$sg(g) = sg(f')$		$-$		$-$			0			$+$		$+$	
f	$+\infty$	↘			$-\infty$				$-\infty$		↗		$+\infty$

Les droites $x = 1$ et $x = -1$ sont des asymptotes verticales. Étudions l'existence d'asymptote oblique. Pour cela il faut calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. Instinctivement, par croissance comparée, la fonction logarithme a *s'écraser* devant les autres fonctions de sorte que l'on devine que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Démontrons le un peu plus rigoureusement.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((x-1)(x+1))}{x-1}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)+\ln(x+1)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{\ln(x+1)}{x-1}\\
&\overset{X=x-1}{=} \lim_{X\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln(X)}{X}}_{\to 0}+\frac{\ln(X+2)}{X} \qquad \text{Thm Crois. Comp.}\\
&= \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X+2)}{X}\\
&\overset{T=X+2}{=} \lim_{T\to+\infty}\frac{\ln(T)}{T-2}\\
&= \lim_{T\to+\infty}\frac{\ln(T)}{T-2}\times\frac{T}{T}\\
&= \lim_{T\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln(T)}{T}}_{\to 0}\times\underbrace{\frac{T}{T-2}}_{\to 1} \qquad \text{Thm Crois. Comp. + limite de polynômes}\\
&= 0
\end{aligned}$$

En conclusion il n'existe pas d'asymptote oblique. Pour finir, on trace l'allure de la courbe.



2. Exponentielle

Définition et premières propriétés

Il est indispensable d'avoir assimiler le cours sur les logarithmes pour pouvoir suivre ce cours sur les exponentielles. Ici tout sera beaucoup plus rapide que le précédent chapitre. Pas que nous souhaitons bâcler le travail mais plutôt que nous allons entièrement nous appuyer sur la fonction logarithme, raison pour laquelle nous insistons sur son assimilation.

D'ailleurs à la fin du cours sur le logarithme, avec l'aide du théorème des valeurs intermédiaire, nous avions observer que l'équation $\ln(x) = 1$ admettait une unique solution que l'on note e et dont la valeur approchée, estimée à l'aide d'un ordinateur, est 2.71828.

Qu'en est-il de manière générale de l'équation $\ln(x) = a$ pour n'importe quelle nombre réel a ? D'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe une unique solution.

Définition

Pour tout nombre réel a on note $\exp(a)$ l'unique solution de l'équation $\ln(x) = a$. On l'appel *exponentielle* de a.

On a immédiatement les propriétés suivantes.

Proposition

1. Quelque soit le réel a, $\exp(a) > 0$.
2. $\exp(0) = 1$.
3. Si $a < 0$ alors $\exp(a) < 1$.
4. Si $a > 0$ alors $\exp(a) > 1$.

Démonstration.

1. Puisque $\ln(\exp(a)) = a$, le nombre $\exp(a)$ appartient au domaine de définition de $\ln$ qui est $]0; +\infty[$. Dis autrement $\exp(a) > 0$.
2. Puisque $\ln(1) = 0 = \ln(\exp(0))$ alors $\exp(0) = 1$.
3. Si $a < 0$ alors $\ln(\exp(a)) = a < 0 = \ln(1)$ donc $\exp(a) < 1$.
4. Si $a > 0$ alors $\ln(\exp(a)) = a > 0 = \ln(1)$ donc $\exp(a) > 1$.

□

La fonction exponentielle

Considérons la fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}$. Par construction $\ln(\exp(x)) = x$.

Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f(x) = \exp(x)$.

$$f'(x) = \exp(x)$$

Démonstration. On sait que $\ln(\exp(x)) = x$. En dérivant des deux cotés de cette égalité on obtient

$$(\ln(\exp(x)))' = (x)' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \exp'(x) = \exp(x)$$

□

Corollaire

Soit u une fonction définie sur un domaine D. Pour tout $x \in D$ on pose $f(x) = \exp(u(x))$.

$$f'(x) = \exp(u(x)) \times u'(x)$$

Démonstration. Il s'agit de la formule de dérivation de la composée. $\square$

Si par exemple $f(x) = \exp(x^2 + 1)$ alors $f'(x) = 2x\exp(x^2 - 1)$.

Corollaire

La fonction exponentielle est strictement croissance sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Ceci est une conséquence de la positivité de sa dérivée (dans le premier paragraphe nous avions observé que $\exp(x)$ était strictement positif pour tout x). $\square$

Limites et croissances comparées

Théorème

Quelque soit les nombres réels a et b :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \ln(\exp(a+b)) &= a + b \\ &= \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) \\ &= \ln(\exp(a) \times \exp(b)) \quad \text{Propriété du logarithme} \end{aligned}$$

Puisque $\ln(\exp(a+b)) = \ln(\exp(a) \times \exp(b))$ alors $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ $\square$

Corollaire 2.0.1

Soient a et b deux nombres réels.

1. $\exp(a - b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
2. $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
3. $\exp\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\exp(a)}$
4. $(\exp(a))^n = \exp(na)$

Démonstration. Il suffit, encore une fois de repasser par la fonction logarithme. $\square$

Corollaire

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$$

Démonstration. Détachons nous un peu de la fonction logarithme et travaillons un peu avec l'exponentielle et ses propriétés.

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) \overset{x=n}{=} \lim_{n \to +\infty} \exp(n) = \lim_{n \to +\infty} (\exp(1))^n$$

Il s'agit de la limite d'une suite géométrique de raison $\exp(1) > 2$. La limite est donc $+\infty$.

Pour la seconde limite :

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) \overset{X=-x}{=} \lim_{X \to +\infty} \exp(-X) = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\exp(X)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

□

Corollaire

Soit $\alpha > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^\alpha \exp(x) = 0$$

Démonstration. On s'appuie sur le théorème des croissances comparées de la fonction logarithme en effectuant le changement de variable $X = \exp(x)$ donc $\ln(X) = x$.

$$\lim_{x \to -\infty} x^\alpha \exp(x) \overset{X=\exp(x)}{=} \lim_{X \to 0} (\ln(X))^\alpha X = \lim_{X \to 0} \left(\ln(X) X^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = 0$$

Finalement

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} \overset{X=-x}{=} \lim_{X \to -\infty} \frac{\exp(-x)}{(-x)^\alpha} = \lim_{X \to -\infty} \frac{1}{\exp(x)(-x)^\alpha} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

□

Proposition

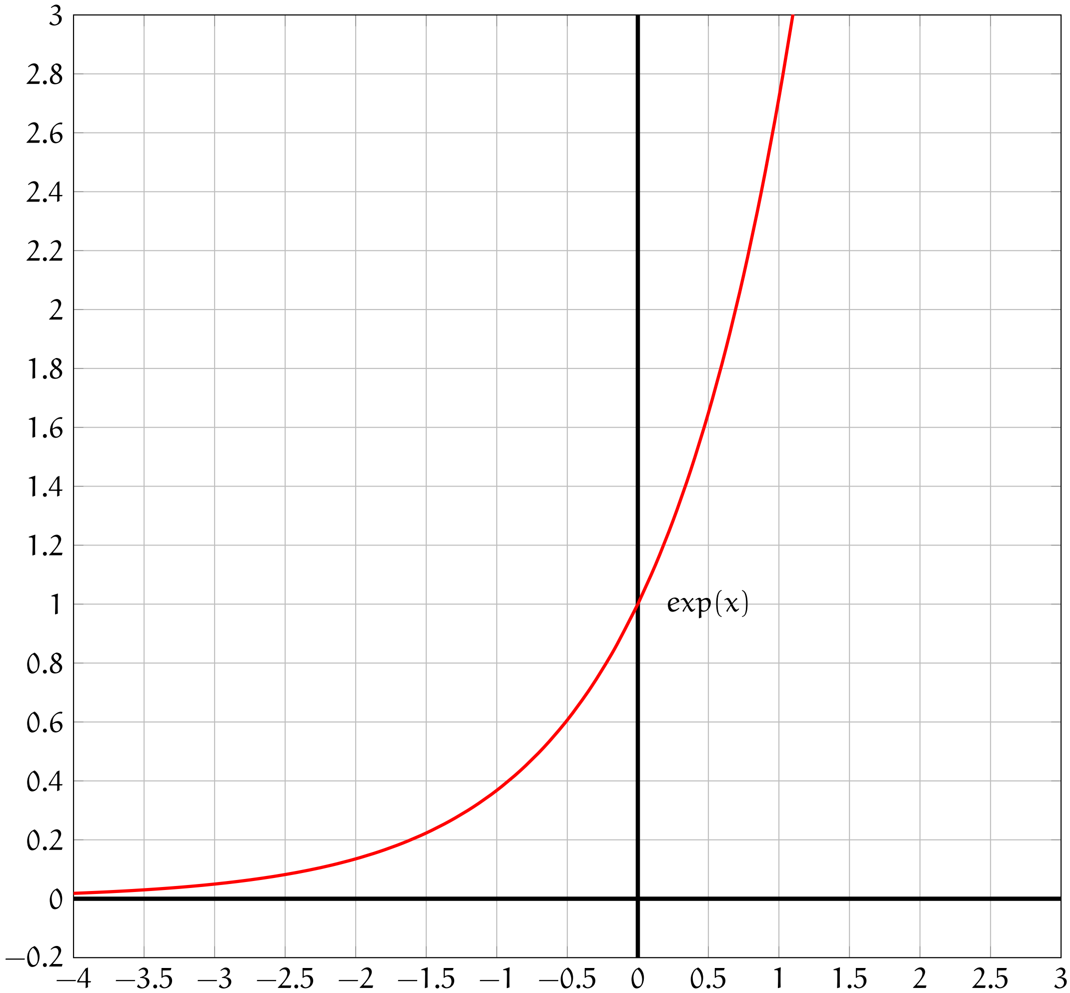
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration. Il s'agit de réécrire la définition de la dérivé de la fonction $\exp$ en 0 :

$$\exp'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - \exp(x)}{x - 0}$$

Sachant que $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ on prouve le résultat. □

Pour finir donnons la représentation de l'exponentielle.



De $\exp(x)$ à e^x

Tout est dans le titre. On observe que les formules et propriétés de l'exponentielle sont étrangement similaire à celle des puissances. Par exemple d'un coté on $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ et d'un autre coté $10^{n+m} = 10^n 10^m$... du coup on se demande si il n'y a pas un liens entre nos familières puissances et l'exponentielle. La réponse est oui par une très simple observation :

$$\ln(\exp(x)) = x = x \times 1 = x \times \ln(e) = \ln(e^x)$$

d'après les règles de calcul sur le logarithme. Cette égalité implique donc que $\exp(x) = e^x$ et ce pour tous les x réel. Autant 10^n n'était définie que pour des n entiers autant $e^x = \exp(x)$ est définie pour tous les nombres réels !

D'ailleurs on pourrait s'amuser à définir 10^x pour n'importe quel x réelle. Tenté ? Allez on y va ! On a besoin d'un petit super pouvoir avant tout.

L'équilibre entre logarithme et exponentielle que l'on observe à travers la formule $\ln(\exp(x)) = x$ se retrouve dans la formule réciproque.

Théorème

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(\ln(x)) = x$$

Démonstration. On rappel que si $\ln(A) = \ln(B)$ alors $A = B$.

Par définition de l'exponentielle $\ln(\exp(\text{n'importe quoi})) = \text{n'importe quoi}$. Prenons $\ln(x)$ pour *n'importe quoi* :

$$\ln(\exp(\ln(x))) = \ln(x)$$

Nous sommes bien dans la configuration $\ln(A) = \ln(B)$ pour $A = \exp(\ln(x))$ et $B = x$ ce qui permet de conclure. □

Du coup quelle sens donner à 10^x ? Grâce à cette formule, on peut écrire que $10^x = \exp(\ln(10^x))$ sauf que le logarithme gère très bien les puissances : $\ln(10^x) = x\ln(10)$. On a $10^x = \exp(x\ln(10))$ et l'exponentielle ne soufre d'aucun problème de définition. Ca y est ! On a défini 10^x. Pourquoi s'arrêterait-on en si bon chemin ?

Définition

Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On défini a^b par la formule :

$$a^b = \exp(b\ln(a)) = e^{b\ln(a)}$$

Le calcul quant à lui se fait à l'aide d'une calculatrice, mais à présent des expressions comme $2^{\sqrt{2}}$ ont un sens.

Un exemple

Étudions la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$. Commençons par déterminer son domaine de définition. Pour que f soit définie, il faut et il suffit que son dénominateur soit non nul. Lé dénominateur est nul lorsque $e^x - 1 = 0$ soit encore $e^x = 1$. En prenant le logarithme des deux cotés on trouve $x = 0$. En conclusion

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* \stackrel{\text{def}}{=}]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

Calculons à présent les limites de f au bord de son domaine de définition.

Limite en $+\infty$. On observe que $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x^2}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}}$. En utilisant le théorème des croissances comparées on trouve que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{+\infty - 0} = 0$$

Limite en $-\infty$. Il n'y a aucune forme indéterminée.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{+\infty}{0 - 1} = -\infty$$

.

Limite en $0^{\pm}$. On utilise la dernière limite étudiée sur la fonction exponentielle :

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0^{\pm}} x \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0^{\pm}} x \frac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}} = 0 \times \frac{1}{1} = 0$$

Déterminons à présent sa dérivé. La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ où $u = x^2$ donc $u' = 2x$ et $v = e^x - 1$ donc $v' = e^x$. Finalement

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{2x(e^x - 1) - e^x x^2}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{x[2(e^x - 1) - e^x x]}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{x[2e^x - 2 - e^x x]}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{x[e^x(2 - x) - 2]}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Pour pouvoir comprendre davantage le numérateur on étudie la fonction $g(x) = e^x(2-x) - 2$ dont le lien avec f est $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$.

Pour cela, on la dérive pour obtenir, par la dérivé du produit, $g'(x) = e^x(2-x) + e^x(-1) = e^x(1-x)$ qui aura donc le même signe que $1-x$ puisque l'exponentielle est strictement positive.

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
g'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
g	2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
g		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f'		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \Vert 0$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\alpha(2-\alpha)$	$\searrow$	0

Voici comment c'est construit ce tableau.

- A la première ligne on inscrit le signe de g' qui est le signe de $1-x$.
- On en déduit les variations de g en observant de plus que $g(0) = 0$, $g(1) = e(2-1)-2 = e-2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(2-x) - 2 = -\infty$.
- La fonction g étant continue et strictement monotone sur $[1;+\infty[$ on en déduit qu'il existe un unique α tel que $g(\alpha) = 0$. A l'aide de la calculatrice, on a $1.593 < \alpha < 1.594$.
- Grâce à cette étude on en déduite que g est positive sur $[0, \alpha]$ et négative partout ailleurs.
- On adjoins le signe de x pour déterminer le signe de $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$.
- On en déduit le variations de f.
- Par construction on sait que $g(\alpha) = 0$ autrement dis $e^\alpha(2-\alpha) - 2 = 0$ soit $e^\alpha = \dfrac{2}{2-\alpha}$. D'où

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1} \\ &= \frac{\alpha^2}{\dfrac{2}{2-\alpha} - 1} \\ &= \frac{\alpha^2}{\dfrac{2-(2-\alpha)}{2-\alpha}} \\ &= \frac{\alpha^2(2-\alpha)}{\alpha} \\ &= \alpha(2-\alpha) \end{aligned}$$

On pourrait s'arêter là... mais un petit calcul va nous mettre la puce à l'oreille :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x)+x^2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x-1}+x^2\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x^2(e^x-1)}{e^x-1}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2e^x}{e^x-1}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\dfrac{e^x-1}{x^2e^x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\dfrac{e^x}{x^2e^x}-\dfrac{1}{x^2e^x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2e^x}}\\
&= \frac{1}{0-\dfrac{1}{0}}\\
&= \frac{1}{0-\infty}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ceci permet de voir que la parabole retournée $x \mapsto -x^2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

On peut alors conclure par la courbe représentative de f :