Remise à niveau

Fonctions

Table des matières

1. Introduction aux fonctions

Qu'est-ce qu'une fonction ?

Nous avons déjà rencontré les fonctions auc cours des chapitres précédents. Il s'agit des expressions littérales. Voici ce que Leonhard Euler (mathématicien suisse 1707-1783), l'un des premiers a avoir formalisé la notion de fonction, a dis :

> Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autre. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x.

En d'autre terme une fonction est un four qui transforme des nombres en d'autre nombre. Si f est le nom de notre four, alors on note $f(x)$ le résultat de la transformation du nombre x dans le four... par la fonction f. On prendra bien garde au notation. La fonction s'appelle f tandis que $f(x)$ est le résultat de la transformation du réel x par la fonction f ; bref ! C'est un nombre réel.

Par exemple, si on défini la fonction f par la règle $f(x) = 3x + 4$ alors cette fonction transforme tout nombre réel en son triple augmenté de 4.

Quel est alors de résultat de la transformation du nombre -1 par f ? En d'autre terme que se passe-t-il si on remplace x par -1 ? La réponse est des plus savante : il faut remplacer x par -1 dans la règle qui définie la fonction ! En d'autre terme $f(-1) = 3 \times (-1) + 4$ puis de réaliser les opérations ce qui s'achève en $f(-1) = 1$. Ce qui se dit en "la fonction f transforme le nombre réel -1 en 1". Tout ceci semble un peu long ! Introduisons un petit peu de vocabulaire pour simplifier la partie.

Vocabulaire

L'image d'un réel x par une fonction f est le réel $f(x)$. Avec la fonction $f(x) = 3x+4$ précédente, au lieu de dire "la fonction f transforme le nombre réel -1 en 1" on dira "l'image de -1 par f est 1" ce qui est donc la même chose que d'écrire $f(-1) = 1$.

Un antécédent d'un réel y par une fonction f est un réel x tel que $f(x) = y$. Avec la fonction $f(x) = 3x+4$ précédente, au lieu de dire "la fonction f transforme le nombre réel -1 en 1" on dira "un antécédent 1 par f est -1" ce qui est donc la même chose que d'écrire $f(-1) = 1$.

le domaine de définition est l'ensemble des valeurs possible pour la variable dans la définition de la fonction. A notre niveau, pour l'instant, nous n'avons que deux contraintes : en cas de présence d'une fraction, il faut interdire les valeurs qui annulent le dénominateur et en cas de présence de racine carré, il faut interdire les valeurs qui rendrait négatif l'expression sous la racine.

Dans notre exemple de la fonction $f(x) = 3x + 4$, puisqu'aucune des alertes précédentes n'apparait, il n'y a aucune contrainte et le domaine de définition de la fonction n'est donc pas limité ; c'est $\mathbb{R}$.

Si par exemple $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-10}}{x-20}$ alors il faut d'une part ne pas annuler le dénominateur, ce qui n'arrive que lorsque $x = 20$ et ne jamais avoir $x - 10<0$ ce qui arrive pour les réels de l'intervalle $]-\infty; 10[$. En définitive il faut enlever à $\mathbb{R}$ ces impossibilités. On en conclut alors que le domaine de définition de cette fonction est $[10; 20[\cup]20; +\infty[$.

Attention ! On parle bien de LA image mais de UN antécédent. En effet, si on prend un nombre réel x dans le domaine de définition alors il a une et une seule image. Tandis que la recherche d'antécédent donne naissance à une équation qui peut avoir aucune, une, voir plusieurs solutions ! Par exemple, si g est une fonction définie par $g(x) = x^2 - 3x$ et que nous cherchons les antécédents (éventuels) de -2 alors nous sommes amené, par définition d'antécédent, à résoudre l'équation $g(x) = -2$ soit encore $x^2 - 3x = -2$ soit encore $x^2-3x+2 = 0$ ce qui se résout à l'aide d'un discriminant et aboutis à 1 et 2 comme solution. D'ailleurs on vérifie sans peine que $g(1) = 1^2 - 3(1) = -2$ et que $g(2) = 2^2 - 3(2) = -2$.

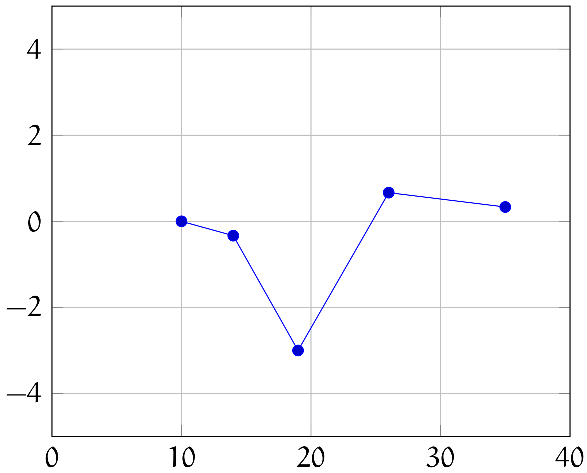
Représentation

Pour travailler avec les fonctions, il est d'accoutumer de les représenter dans un repère cartésien. Pour chaque valeur de x, dans le domaine de définition de la fonction, on marque, d'un point (ou d'une croix ou peu importe) le point du repère de coordonnée $(x, f(x))$ et on relie les points consécutifs.

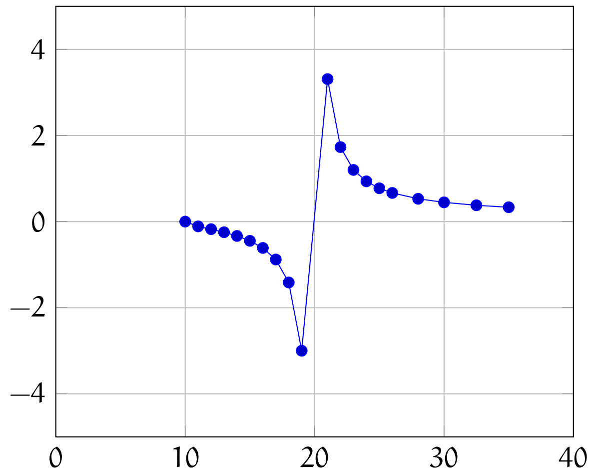
Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-10}}{x-20}$. On prend différente valeur et on place ces valeurs dans le repère :

x	10	14	19	26	35
$f(x)$	0	$-\frac{1}{3}$	-3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

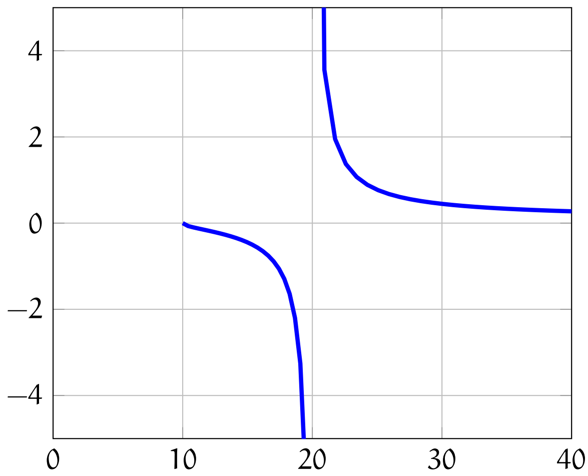
Ce qui correspond aux points suivants :



Plus on va avoir de point, plus la fonction sera dessiner de manière précise.

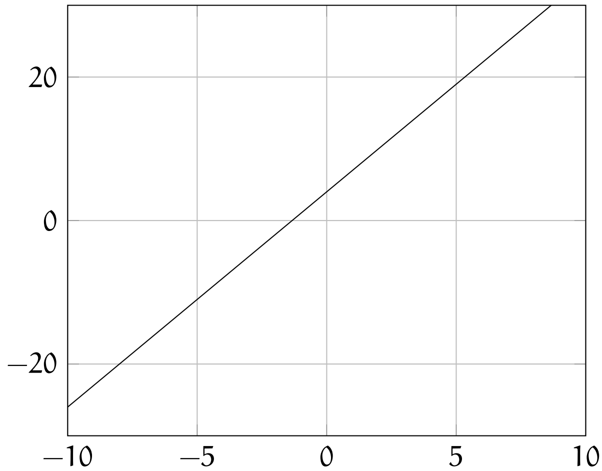


Avec un peu plus de point on arrive à ce qui est appelé le *graphe* de la fonction f ou *courbe représentative de la fonction* f :

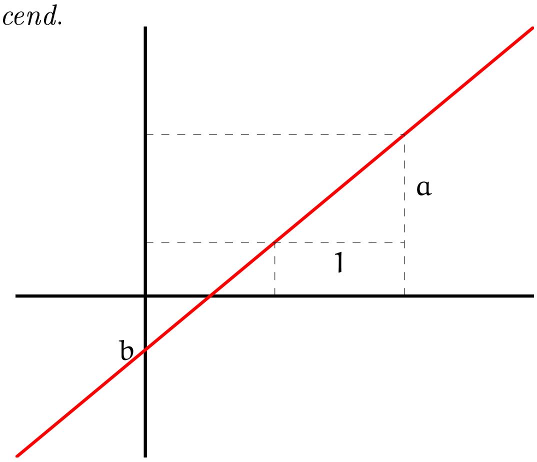


Fonctions de références

La droite est le nom de la courbe représentative de la *fonction affine* définie par $f(x) = ax + b$ sur $\mathbb{R}$. Dans une telle définition de fonction le nombre a est appelé le *coefficient directeur* de la droite tandis que b est appelé *l'ordonnée à l'origine*.



- L'ordonnée à l'origine indique le point d'intersection entre la droite et l'axe vertical appelé axe des ordonnées (d'où le nom *ordonnée à l'origine*). L'axe horizontale est appelé abscisse.
- Le coefficient directeur peu être aussi appelé *pente* de la droite. Si se place n'importe où sur la droite et qu'on se déplace de 1 vers la gauche alors on se trouve à une distance de a de la droite. Si le $a>0$ alors on *monte* sinon on *descend*.



Pour tracer une droite il suffit de calculer deux points. Par exemple si la fonction f est définie par la règle $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ il suffit de prendre deux valeur différentes pour x pour ensuite tracer la droite. Dans la pratique, on prend des valeurs *facile* pour x pour simplifier les calculs. Dans cette exemple on pourrait prendre $x = 0$ et $x = 2$ pour tracer la droite - les deux points seraient alors $(0, 1)$ et $(2, 0)$.
On peut aussi raisonner à l'envers : peut-on déterminer l'équation d'une droite qui passe par deux point du plans ?
Par exemple, si on souhaite déterminer l'équation d'une droite qui passe par $(2; 1)$ et $(1; -1)$, on cherche une fonction affine f, donc de la forme $f(x) = ax+b$ tel que $f(2) = 1$ et $f(1) = -1$. Cela donne naissance à deux équations : $1 = 2a+b$ et $-1 = a+b$. Ce qui est un système de deux équations à deux inconnues que nous pouvons résoudre sans trop de difficulté pour trouver $a = 2$ et $b = -3$. Finalement l'équation de la droite qui passe par $(2; 1)$ et $(1; -1)$ est $f(x) = 2x - 3$. Formalisons cela avec un théorème.

Théorème

Soient A et B deux points du plans de coordonnées respective $(x_A; y_A)$, (x_B, y_B) alors l'équation de la droite qui passe par ces deux points a pour coefficient directeur $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et l'équation de la droite est

$$f(x) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$$

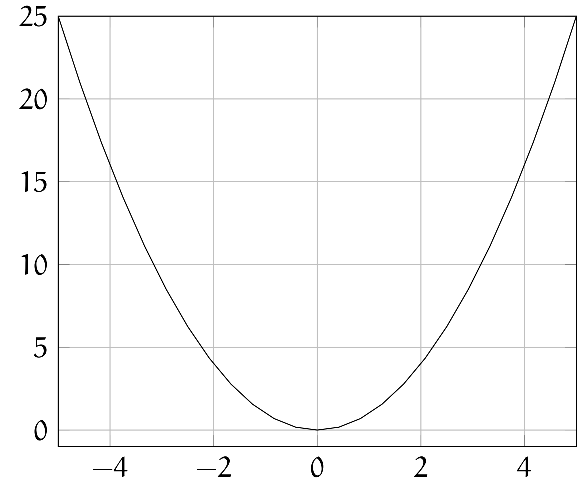
Démonstration. On cherche à déterminer deux inconnue a et b tel que $f(x) = ax + b$, $f(x_A) = y_A$ et $f(x_B) = y_B$. Cela donne naissance au système suivant :

$$\begin{cases} ax_A + b &= y_A \\ ax_B + b &= y_B \end{cases}$$

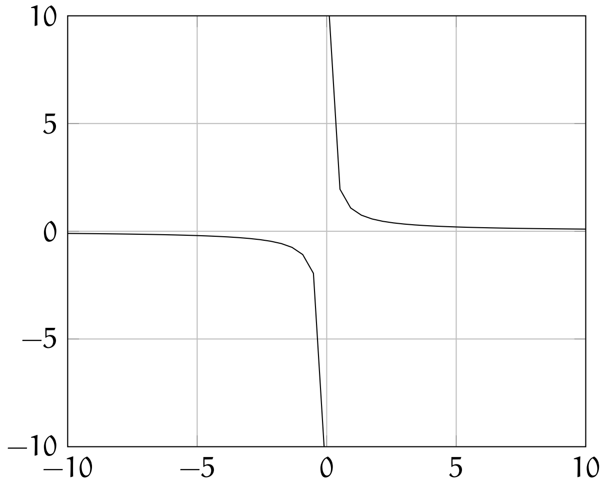
En réalisant la différence des deux lignes on arrive à $ax_B - ax_A = y_B - y_A$ soit encore $a(x_B - x_A) = y_B - y_A$ ce qui implique donc que $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
Enfin, avec la première des deux équations on a $b = y_A - ax_A$ donc $f(x) = ax + (y_A - ax_A) = a(x - x_A) + y_A$. En remplaçant la valeur de a par celle déterminer précédemment on trouve la formule du théorème. □

Bien sur si $x_A = x_B$ alors la droite est verticale et n'a donc pas d'expression fonctionnelle au sens où nous les définissons ici.

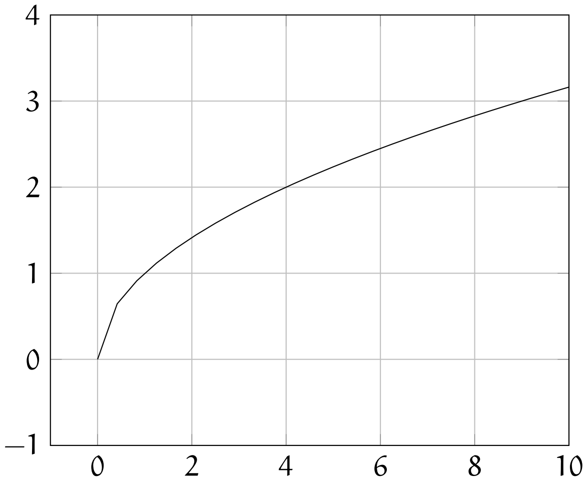
La parabole est le nom de la courbe représentative de la *fonction carré* définie par $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.



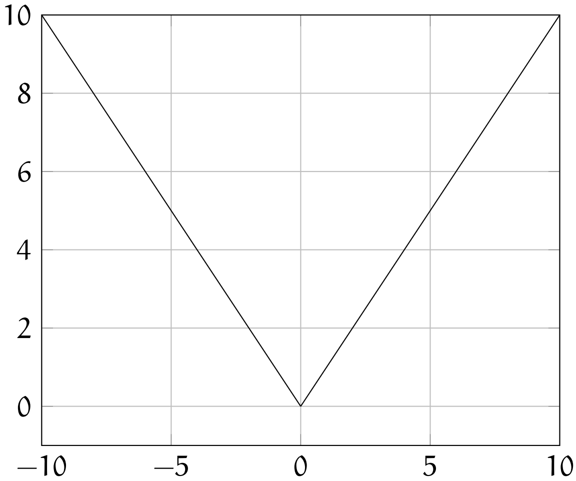
L'hyperbole est le nom de la courbe représentative de la *fonction inverse* définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.



La demi parabole couchée est le nom de la courbe représentative de la *fonction racine carré* définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$.



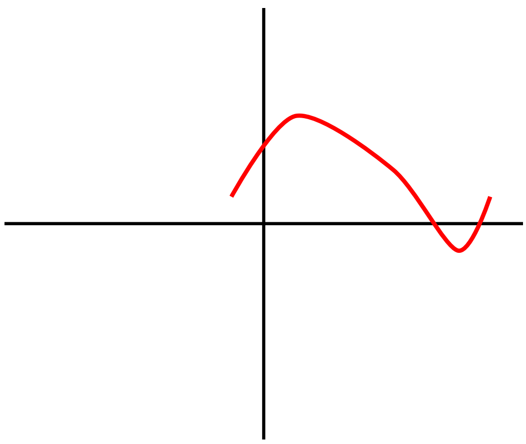
Les deux demi-droites est le nom de la courbe représentative de la *fonction valeur absolue* définie par $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$. La fonction valeur absolue peut formellement être définie à l'aide des autres fonctions de références car $|x| = \sqrt{x^2}$.



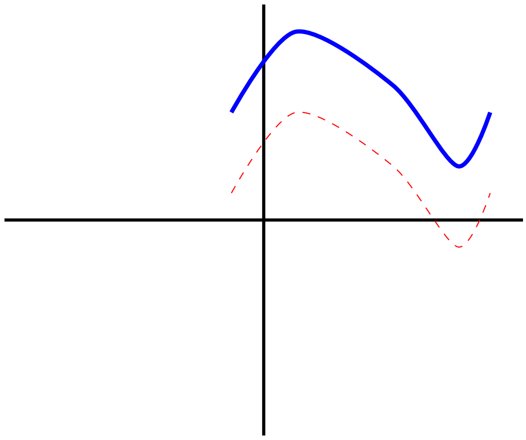
Translation

Si on considère le graphe d'une d'une fonction f on peut la faire glisser. Cela correspond à des opérations mathématiques dis de translation..

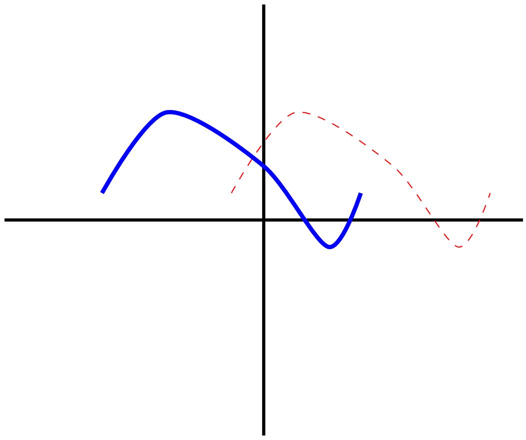
Considérons une fonction f dont le graphe est le suivant :



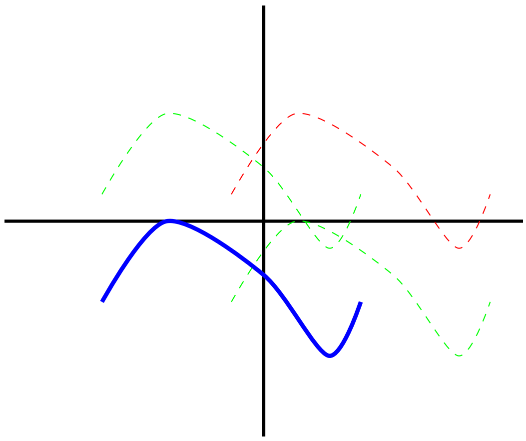
La fonction $g(x) = f(x) + \beta$ pour un certain nombre reél β correspond à un glissement de la courbe de f de β nombre réel le long de l'axe des ordonnées. Si β est positif se déplacement se fait vers le haut sinon vers le bas.



La fonction $g(x) = f(x - \alpha)$ pour un certain nombre reél α correspond à un glissement de la courbe de f de α nombre réel le long de l'axe des abscisses. Si α est positif se déplacement se fait vers la droite sinon vers la gauche.



On peut bien sur s'amuser à combiner les opérations de translations.



L'intérêt est d'essayer de se ramener aux fonctions classique. Par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x-1}$ est le translaté de 1 vers la droite de la fonction $\frac{1}{x}$. Il s'agit donc d'une hyperbole.

Considérons la fonction $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$. On peut observer sans trop de peine que $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{2x-2+1}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$ ce qui correspond au translaté de 1 vers droite et de 2 vers le haut de la fonction inverse. Il s'agit donc bien d'une hyperbole.

Théorème

La courbe représentative d'un polynôme de degrés 2 est, a translation prés, une pararbole.

Démonstration. En effet, d'apres le chapitre sur les polynôme de degrés 2, on a

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

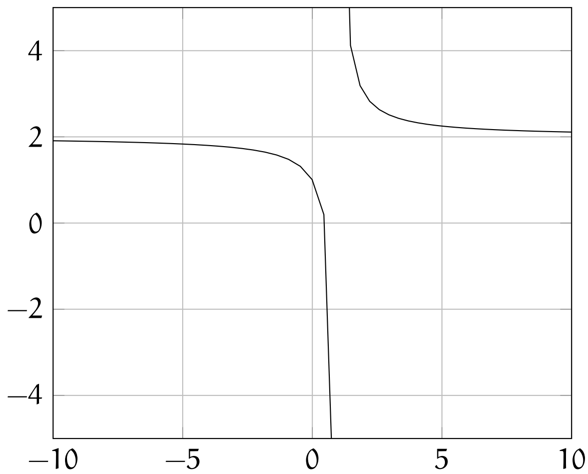
ce qui correspond bien au translaté de $\frac{b}{2a}$ vers la droite et de $\frac{\Delta}{4a^2}$ vers le bas de la fonction carré. La multiplication par a va *dilater* la courbe... oublions ça pour le moment. □

Rapprochons-nous sans toucher !

Reprenons l'exemple de l'une des dernières fonctions vu dans le précédent chapitre

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

Nous avions conclus, par diverse manipulation, que la courbe de la fonction f était une hyperbole. Précisément sa représentation est la suivante :



On observe que son domaine de définition est $\mathbb{R} - \{1\}$. En d'autre terme il est absolument interdit de calculer l'image du nombre réel 1. Par contre on peut essayer d'observer ce qui se passe lorsqu'on va se rapprocher de 1 sans le toucher (car c'est simplement interdit) ! Que vaut f en 0.9 puis en 0.99 puis en 0.999 etc. Ces valeurs sont permises. La seule qui est interdite c'est 1 et, mathématiquement en tout cas, $0.99999999 \neq 1$. Justement observons ces images :

$f(0.9) = -8$ $\quad$ $f(0.99) = -98$ $\quad$ $f(0.999) = -998$ $\quad$ $f(0.99999) = -99998$

Plus on se rapproche de 1, plus l'image est très petite. On devine que si on continue de la sorte on aura un nombre de plus en plus petit. "Au final", c'est à dire si on est juste à coté de 1, on touchera (presque) $-\infty$. Pour traduire cette idée on utilise la notion de limite. On note

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$$

On lit : *la limite de la fonction f lorsque x tend vers 1 est $-\infty$.*

Il faut bien faire attention : une limite donne l'idée du comportement de la fonction lorsqu'on se rapproche de la valeur mais sans l'atteindre.

Cette définition souffre d'un petit problème de déplacement. La notion de limite c'est "se rapprocher de" mais se rapprocher d'une nombre sur l'axe des réel peut se faire de deux façons : soit on se rapproche par derrière, comme nous l'avons fait dans notre exemple : nous avons observer le comportement de f lorsqu'on se rapprochait de 1 mais en étant toujours derrière 1 (à travers les valeurs 0.9, 0.99 etc.). Il est également possible d'observer ce qui se passe si on se rapproche de 1 par devant c'est à dire à travers l'observation du comportement de f sur des valeurs de la forme 1.01, 1.001 etc. Dans notre exemple on a

$f(1.1) = 12$ $\quad$ $f(1.01) = 102$ $\quad$ $f(1.001) = 1002$ $\quad$ $f(0.00001) = 100002$

Plus on se rapproche de 1 en restant plus grand, plus la fonction f se rapproche de $+\infty$. Ce que nous pouvons noter

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

Pour ne pas confondre les deux calculs, on va noter 1^+ pour signaler que l'on tend vers 1 par valeur supérieur, c'est à dire en étant toujours plus grand que 1 et 1^- pour signaler que la limite est par valeur inférieur. En résumé nous avons montré

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté ou de différence on note simplement $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x} = 2$. En effet, dans cet exemple que l'on se rapproche de 1 par valeur supérieur ou inférieur on a la même valeur qui est d'ailleurs la valeur de la fonction en 1

Limites usuelles

Si une fonction n'a pas de valeurs interdites alors elle n'a pas de problème pour le calcul de ses limites. La notion qui est caché derrière se *bon comportement* des fonction est la notion de continuité. Nous n'en dirons pas plus. A notre niveau toutes nos fonctions seront continue sur leur domaine de définition.

Théorème

Soit f une fonction définie (et continue) en $a \in \mathbb{R}$ dans le domaine de définition de la fonction, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Comme nous l'avons observer dans le paragraphe précédent $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x} = 2$.
Les cas problématiques viennent en générale des infinis.

Théorème

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ces 5 résultats suffisent pour calculer toute les limites que nous rencontrerons pour le moment. Mais il faut aussi, et surtout, savoir les manipuler.

Composition des limites

Nous venons de voir que la limite de $\frac{1}{x}$ en 0 donne de l'infini (signe à discuter suivant la précision faites dans le calcul de la limite). Comment, à partir de ce résultat pouvons nous calculer la limite de $\frac{1}{x-1}$ en 1^+.

La solution est la composition des limites. Lorsque que x se rapproche de 1 en restant supérieur, $x-1$ se rapproche de 0 en restant également supérieur. Autrement dis $\lim_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$. Le théorème que nous avons vu au paragraphe précédent nous donne, en résumé, que $\frac{1}{0^+} = +\infty$. On en déduit donc $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

C'est ce qu'on appel la composition des limites.

Traitons un autre exemple et déterminons la limites en 2^+ de $\frac{1}{4-2x}$. Lorsque x se rapproche de 2 en lui restant supérieur $2x$ se rapproche de 4 en lui restant également supérieur, donc par les règles sur les inégalités, $-2x$ se rapproche de -4 **en lui étant inférieur** donc $4-2x$ se rapproche de 0 en étant aussi inférieur. En conclusion $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{4-2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Moralité : il suffit des 5 résultats de limites pour toutes les calculer !

Bon, non en fait on a aussi besoin de savoir additionner, multiplier, inverser etc des limites.

Opérations sur les limites

Inversion de limites. Inverser une limite est relativement facile si on garde en tête que l'inverse de 0 c'est de l'infini et que l'inverse de l'infini c'est 0.

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
$\pm\infty$	0

Somme de limite. L'addition de limite fait naitre un petit problème. Que donnera $+\infty - \infty$. Ne vous aventurez pas à dire 0. Car jouer avec les infinis est très risqué. C'est une source d'erreur fréquente de manipuler l'infini comme si c'était un nombre (aucun nombre ne vérifier $x + 1 = x$... sauf peut-être l'infini). Moralité : lorsqu'il y a de l'infini il faut être précautionneux. Certains résultat sont triviaux : $+\infty + \infty = +\infty$ puisque ajouter un "nombre" immensément grand un autre "nombre" immensément grand donne un "nombre" immensément grand.

Que pouvons-nous dire alors de $+\infty - \infty$. Réponse : rien ! Nous ne pouvons pas, uniquement avec ce calcul, déduire la valeur de la limite. On dis qu'il s'agit d'une **forme indéterminée**. Attention *forme indéterminée* n'est pas une réponse. Cela est une alerte dans le calcul pour sous signaler que vous ne pouvez pas utiliser les règles que nous détaillons ici.

Comment résoudre une limite faisant apparaitre une forme indéterminée ? Il faut manipuler l'expression pour lever l'indétermination. Par exemple $f(x) = x$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et la fonction $g(x) = 1 - x$ a pour limite $-\infty$ en $+\infty$. La somme des limites donne une forme indéterminée : il n'est pas possible de dire immédiatement, avec les limites de f et de g la limite de $f + g$. Dans cet exemple ci, nous pouvons observer que $f(x) + g(x) = 1$ et donc que la limite tend vers 1.

Mise à part ce problème la somme de limite se passe très bien !

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$	$\lim_{x \to a} f(x) + g(x)$
l	l'	$l + l'$
l	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Produit d'une limite par un nombre. Si on multiplie une fonction par un nombre (non nul sinon ça n'a pas d'intérêt) alors la limite est aussi multipliée. Il faut *juste* faire attention à la règle des signes avec les infinis.

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} \lambda f(x)$
l	λl
$+\infty$	$+\infty$ si $\lambda > 0$
$+\infty$	$-\infty$ si $\lambda < 0$
$-\infty$	$-\infty$ si $\lambda > 0$
$-\infty$	$+\infty$ si $\lambda < 0$

Produit de deux limites. Une nouvelle *forme indéterminée* fait son apparition $0 \times \infty$. Si par exemple la fonction $f(x) = x$ et la fonction $g(x) = \frac{42}{x}$ alors la limite en $+\infty$ de f est $+\infty$ et la limite de g est 0. Puisque c'est une forme indéterminée, nous ne pouvons pas en déduire la limite d produit par de simple résultat calculatoire sur les limites. Cependant on observe que $f(x)g(x) = 42$ ainsi la limite tend vers 42.

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} f(x) \times g(x)$
l	l'	$l \times l'$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	F.I.

Quotient de deux limites. Un quotient n'est rien d'autre qu'un produit avec un inverse : $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$.

Puisque nous savons inverser des limites et faire le produit de limite alors nous savons faire un quotient. Attention cependant cela allonge la liste des formes indéterminées. Deux de plus s'y ajoute. En effet on a

$$\frac{0}{0} = 0 \times \frac{1}{0} = 0 \times \infty = \text{F.I.}$$
$$\frac{\infty}{\infty} = \infty \times \frac{1}{\infty} = \infty \times 0 = \text{F.I.}$$

Attention les deux petits calculs précédents sont essentiellement à but pédagogique. D'une part, comme il a déjà été dis, il faut être très précautionneux en manipulant les infinis et d'autre part *F.I.* n'est en aucun cas une réponse à un calcul de limite. C'est juste une alerte pour dire *il faut trouver un idée pour qu'il n'y ai plus de problème.*

En conclusion de toutes ces formules (qu'il faut connaitre... désolé), il faut retenir que l'on peut faire ce qu'on veux avec les limites (addition, soustraction etc...) sauf dans 4 cas qui nécessite une attention particulière (c'est la forme poétique de "il faut avoir une idée") qui sont les 4 formes indéterminées :

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Des exemples ! Sur place s'il vous plait.

Déterminons $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2-x}$.

Pour calculer une telle limite, nous allons appliquer un quotient de limite. La limite du numérateur est trivialement $+\infty$. Pour le dénominateur, nous aboutissons malheureusement à une forme indéterminée puisque nous essayons d'appliquer une somme de limite entre x^2 qui tend vers $+\infty$ et $-x$ qui tend vers $-\infty$. L'idée que nous pouvons avoir pour ce dénominateur est de factoriser par x. Dans ce cas $x^2 - x = x(x-1)$. Par produit de limite on en déduit que le dénominateur tend vers $+\infty$. Et ceci ne nous arrange toujours pas puisque obtenons la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

L'idée est ici de factoriser aussi au numérateur par x. Le problème c'est que x n'est pas un facteur commun des termes de l'expression $x+1$. Qu'a cela ne tienne ! Nous pouvons toujours écrire $1 = x \times \frac{1}{x}$. L'intérêt d'une telle folie est que la limite en $+\infty$ de $\frac{1}{x}$ est 0. Détaillons le calcul :

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x(x-1)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{x-1}$$

Si nous retentons le calcul de la limite dans la dernière forme trouvée de cette expression nous avons que le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers $+\infty$ ce qui donne 0.

En fait, l'idée de la factorisation par la plus grande puissance de x sera toujours une bonne aide pour le calcul des limites en ∞.

Les polynômes en l'infini

Théorème

La limite en plus ou moins l'infini d'un polynôme est la limite de son terme de plus haut degrés.

Démonstration. On observe que

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x^1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

Mais chaque terme de la forme $\dfrac{a_i}{a_n x^{n-i}}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$. Il ne reste que le facteur $a_n x^n$ à gauche et le 1 à droite. $\square$

En application on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \times 1}{x^2 \times 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Le changement de variable

En reprenant la définition de limite nous avons vu qu'il s'agit d'observer le comportement d'une fonction lorsque l'on se rapproche d'une valeur et nous avions observer qu'il y avait deux manière de se rapprocher d'une valeur : soit en lui étant supérieur soit en lui étant inférieur.

Il s'agit en fait d'un petit raccourci pédagogique. Dans la pratique on peut se rapprocher d'une valeur n'importe comment du moment que l'on reste dans le domaine de définition.

Prenons par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et déterminons sa limite en $-\infty$. Par diverse manipulation algébrique nous pouvons montrer que $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$. Le calcul en $-\infty$ ne souffre ici d'aucun problème en trouve que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Mais il est possible de faire ce qui est appelé un *changement de variable*, c'est à dire se rapprocher de $-\infty$ mais en suivant un autre chemin. Par exemple nous pouvons choisir de se rapprocher de $-\infty$ en suivant le chemin $\dfrac{1}{x+1}$.

Cela correspondre à dire que nous n'allons pas regarder x mais $\dfrac{1}{x+1}$. On pose donc $X = \dfrac{1}{x+1}$ ainsi dans l'expression du calcul de la limite il faut remplacer tous les x en X qui est notre nouveau chemin de parcours. Ainsi

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} = 1 - X$$

De plus si $x \to -\infty$ alors $X \to 0^-$. On écrit alors $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{X\to 0^-} 1 - X = 1$ (on retrouve bien le même résultat).

Autre exemple : en posant $X = 1 - x$ on a $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = \lim_{X\to 0^-} \frac{1}{X} = -\infty$

A quoi ça sert les math ?

Cette question est tout à fait légitime et trouve de nombreuses réponses qui dépendent du champ des mathématiques dont on parle, de la personne qui pose la question ou de la personne qui répond.

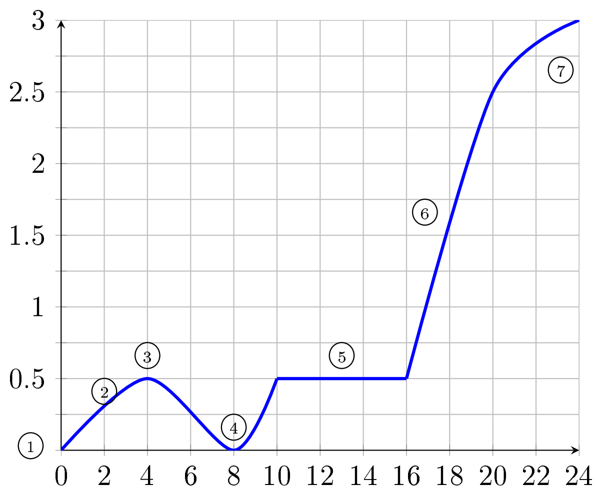
Une des réponses les plus élégante serait de commencer à dire que les mathématiques, avant d'être une science à part, étaient considérées comme un outil pour les autres sciences. Nombreux scientifiques de l'époque étaient physiciens ou chimistes en même temps qu'ils étaient mathématiciens. Par exemple, Gauss dont nous avons parler dans le chapitre sur la résolution des systèmes était astronome de métier. Il n'en est pas moins appeler *le prince des mathématiques* aujourd'hui.

Pour parler de ce nouveau chapitre nous allons nous immerger très légèrement dans le monde de la physique et essayer ensemble de faire comme nos ancêtres et réinventer la *dérivation*.

Nous allons parler de vitesse. La vitesse mesure la distance parcouru en un laps de temps donnée.

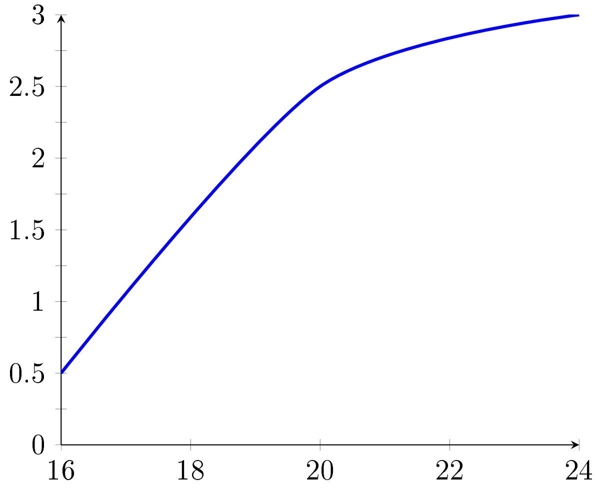
Sur le graphique ci dessous, il vous est représenté le parcours de votre serviteur depuis chez lui jusqu'au marché de la ville. En abscisse le temps mesuré en minute, en ordonnée la distance parcouru mesurée en kilomètre. La petite histoire de ce graphique est la suivante :

1. Je part de chez moi.
2. Je me rend à pied jusqu'à l'arrêt de bus.
3. Je me rend compte que j'ai oublié de prendre un ticket de bus je rentre chez moi le prendre.
4. Je repart immédiatement de chez moi vers l'arrêt de bus en courant pour ne pas le rater.
5. J'ai raté le bus et je dois donc en attendre un autre.
6. Le bus arrive, je monte dedans et me laisse transporter jusqu'à la station "Mairie".
7. Une fois arriver je marche tranquillement vers la place du marché (pour me rendre compte que nous sommes vendredi et qu'il n'y a pas marché `#vecu`).

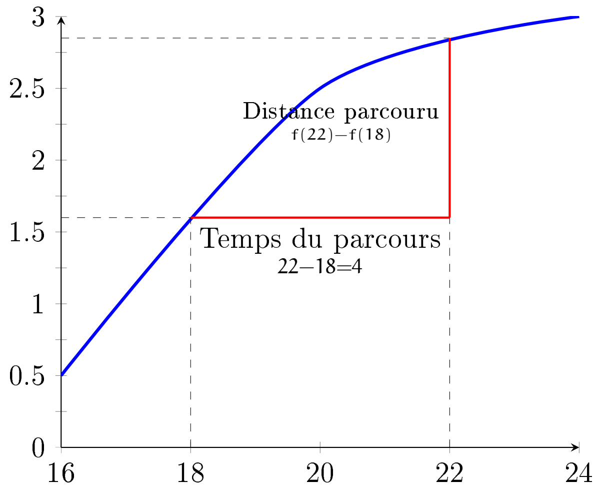


Malgré le périple, il m'a fallut 24 minutes pour parcourir les 3 kilomètres qui me sépare du marché. La vitesse est la distance par rapport au temps. Ici $\dfrac{3\text{km}}{24\text{min}}$. Multiplions par $2,5$ au numérateur et dénominateur pour obtenir $\dfrac{7,5\text{km}}{60\text{min}}$ soit $7,5$ km/h. Cette information est quelques peu trompeuse. En tant que marcheur $7,5$ km/h est une marche très sportive, mais pour le bus $7,5$ km/h est très mauvais. Poser une question de raffinement sur ces information cinétique équivaut à se poser une question du genre : quelle était ma vitesse 20 minutes après mon départ ?

Pour comprendre cela isolons les dernières minutes de mon trajet (parties 6 et 7) :



La vitesse moyenne uniquement sur cette portion correspond toujours à la distance, ici $2,5$ km par rapport au temps, ici 8 minutes. Cela correspond à une vitesse de $18,75$km/h. Rapprochons-nous un peu plus du 20 pour déterminer la vitesse à la 20ième minutes. Pour généraliser un peu plus imaginons que le graphe soit le dessin de la courbe représentative d'une fonction f.



Dans ce cas, comme toujours d'ailleurs, la vitesse est la distance parcouru sur le temps de parcours soit $\dfrac{f(22)-f(18)}{22-18}$. Et comme c'est le but ici on souhaite se rapprocher de 20. Nous avons vu dans le précédent chapitre que "se rapprocher de" se traduisait mathématiquement par la notion de limite. On définie donc la vitesse instantanée, qui s'oppose à la vitesse moyenne, comme la vitesse moyenne infiniment proche de la valeur cherchée. Si cette limite existe (dans le sens ou la limite inférieur et supérieur sont les même et sont finies) on dira que la fonction est dérivable.

Définition

Soit f une fonction définie en $a \in \mathbb{R}$ de son domaine de définition. Si

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

et que ces deux limites sont finies, alors on appellera la valeur de ces limites la *dérivé de la fonction* f *en* a que l'on notera $f'(a)$. Précisément :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Quelque soit la fonction que nous traitons, cette limite est toujours une forme indéterminée (de la forme $0/0$). Ca serait beaucoup moins intéressant sinon ^_^.

Par exemple dérivons en $a = 3$ la fonction $f(x) = x^2$. Revenons à la définition et essayons de simplifier la limite, qui est malheureusement par construction, toujours une forme indéterminée. Ici l'idée est d'utiliser une identité remarquable.

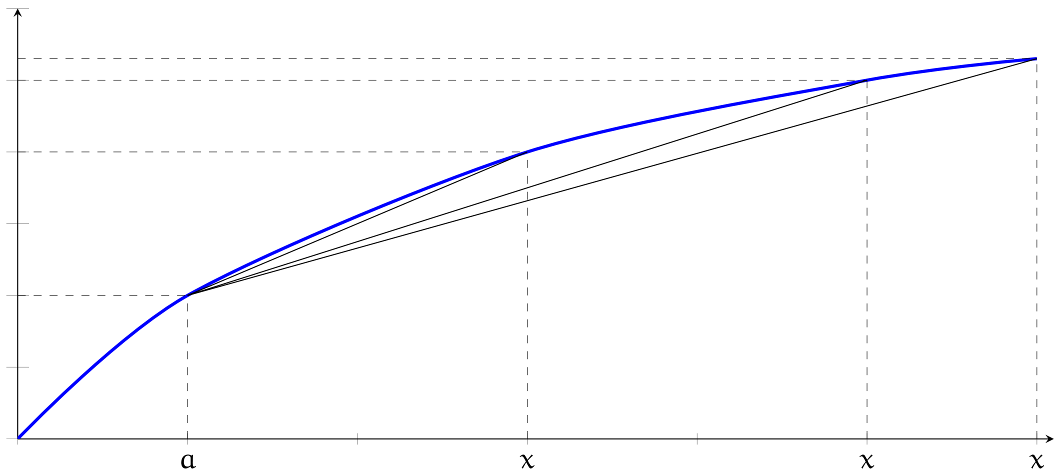
$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x-3} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \\
&= \lim_{x\to 3} (x+3) \\
&= 6
\end{aligned}$$

Conclusion $f'(3) = 6$.

Nous venons de voir la définition qui en tant que tel n'est pas évidente de prime abord. Et nous espérons que vous l'aurez compris, ça sert à calculer la vitesse instantanée. Mais tout ce travail pour calculer une vitesse serait un peu trop de gâchis de concept mathématiques. Puis surtout, en pratique comme procède t-on au calcul ? Les réponses arrivent !

Tangente

Continuons sur notre lancée théorique avant de passer à la pratique et observons un peu plus en détail ce nouveau jouet qu'est la définition de la dérivé.



Sur ce graphique, on observe que plus x se rapproche de a plus les droites (en noire - on les appelle savamment des cordes) vont se retrouver collées à la courbe. A la limite, de tel droite collée à la courbe, sont appelée des *tangente*.

Quelle est l'équation de la droite qui passe par les points de coordonnée $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ sachant que x se destine à se rapprocher de a ?

D'après les précédents chapitres nous avons vus que cette droite a pour équation

$$Y = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(X - a) + f(a)$$

Les variables X et Y permettent de donner l'équation de la droite tandis que x désigne un réel de l'axe des abscisses. Il suffit de passer à la limite lorsque $x \to a$ pour déterminer l'équation de la tangente.

Définition

L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f définie en un réel a est donnée par

$$T_a \quad : \quad Y = f'(a)(X - a) + f(a)$$

Par exemple la tangente de la fonction carré en $a = 3$ est $T_3 :\ y = 6(x-3) + 3^2 = 6x - 9$

Dérivées usuelles et fonctions dérivées

Dans le calcul que nous avions fait dans les paragraphes précédents pour calculer la dérivée de la fonction carré en 3, que l'on ai mis un 3 ou un 42 ça ne change pas le travail :

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} (x+a) \\
&= 2a
\end{aligned}$$

Le cas de la fonction carré est réglé ! C'est l'occasion de parler de **fonction dérivée**.

Définition

La fonction dérivée d'une fonction f est la fonction notée f' tel que la valeur de f' en a est le nombre dérivé de la fonction f en a.

Nous avons par exemple montré que la fonction dérivée de la fonction carré est $f'(x) = 2x$.

Qu'en est-il de la fonction cube $g(x) = x^3$. Abracadabra ! Voici une formule sorti de nul part : $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. Attaquons à présent le calcul de la limite :

$$\begin{aligned}
g'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} (x^2+ax+a^2) \\
&= 3a^2
\end{aligned}$$

En conclusion $g'(x) = 3x^2$.

Commençons par faire peur : OUI ! Pour calculer des dérivées (en tant que fonction ou valeur numérique) il n'y a pas d'autre solution que de passer par la définition de limite ! Mais pas d'inquiétude. Beaucoup de mathématiciens ont établis un formulaire recensant les dérivées des fonctions usuelles (et oui, il faut les apprendre et les connaitre par cœur) :

Proposition

Soit n un entier strictement positif et k un nombre réel alors

$$\begin{aligned}
f(x) = k &\quad\Rightarrow\quad f'(x) = 0 \\
f(x) = x^n &\quad\Rightarrow\quad f'(x) = nx^{n-1} \\
f(x) = \frac{1}{x^n} &\quad\Rightarrow\quad f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} \\
f(x) = \sqrt{x} &\quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

On retrouve par exemple les formules que nous avons trouvé à l'aide du calcul de limite sur les fonctions carré et cube.

Opérations sur les dérivées

Et si nous souhaitions dériver la fonction $x+1$? Nous savons dérivé $x = x^1$ qui admet $1x^0 = 1$ comme dérivé et la dérivé du nombre réel 1 est 0. Qu'en est-il de la somme ?

Proposition

$$(f+g)' = f' + g'$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette formule on prouve le résultat.

$$\frac{[f(x)+g(x)]-[f(a)+g(a)]}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

□

Ainsi la fonction dérivée de x^2+x+1 est $2x+1$.
Qu'en est-il de la fonction dérivée de la $x^2-3x+\frac{1}{x}$. Les précédents résultats nous donnent

$$\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)' = \left(x^2\right)' - (3x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - (3x)' - \frac{1}{x^2}$$

Réglons le problème de $(3x)'$ à coup de théorème !

Proposition

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette formule on prouve le résultat.

$$\frac{\lambda f(x) - \lambda f(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

□

En d'autre terme la dérivé de $3x$ c'est 3 fois la dérivée de x (qui est 1). Au final

$$\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)' = 2x-3-\frac{1}{x^2}$$

Et qu'en est-il de la fonction dérivée de $(\sqrt{x}+1)\times\frac{1}{x}$. Bon soyons claire : ca va commencer a devenir n'importe quoi, mais ça marche !

Proposition

$$(fg)' = f'g + g'f$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette égalité on prouve le résultat :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)}{x-a} + \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a} \\
&= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}
\end{aligned}$$

□

Ainsi

$$\begin{aligned}\left((\sqrt{x}+1)\frac{1}{x}\right)' &= (\sqrt{x}+1)'\frac{1}{x}+(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{x}+(\sqrt{x}+1)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

En conclusion $\left((\sqrt{x}+1)\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{x^2}$ (les plus savant pour chercher à simplifier davantage cette dérivée et montrer que $\left((\sqrt{x}+1)\frac{1}{x}\right)' = -\frac{\sqrt{x}+2}{2x^2}$ en utilisant le fait que $\sqrt{x}^2 = x$).

Et qu'en est-il de la fonction dérivée de la fonction $\frac{x}{x+1}$?

Proposition

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$$

Démonstration. En passant à la limite dans cette égalité on prouve le résultat :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} &= \frac{\frac{f(x)g(a)}{g(x)g(a)}-\frac{g(x)f(a)}{g(x)g(a)}}{x-a} \\ &= \frac{\frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)}}{x-a} \\ &= \frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)}{g(x)g(a)(x-a)}+\frac{f(a)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)}{g(x)g(a)(x-a)}-\frac{f(a)g(x)-g(a)f(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= g(a)\frac{f(x)-f(a)}{g(x)g(a)(x-a)}-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \frac{g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)g(a)}\end{aligned}$$

□

Sur notre exemple

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x+1}\right)' &= \frac{(x)'(x+1)-(x+1)'(x)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1(x+1)-1(x)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Et qu'en est-il de la fonction dérivé de $\sqrt{x^2+x}$?

Proposition

$$(f(g))' = f'(g) \times g'$$

Démonstration. On a

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x)-g(a)} \times \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

D'un coté $\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$ de l'autre coté en effectuant le changement de variable $y = g(x)$ on a, par définition du nombre dérivée $\lim_{x\to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x)-g(a)} = \lim_{y \to g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} = f'(g(a))$. □

Ainsi $(\sqrt{x^2+x})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \times (x^2+x)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \times (2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

En particulier ce dernier résultat permet d'obtenir un petit peu plus de formule de dérivation (il n'y en avait pas assez comme ça !)

Corollaire

Soient n un entier strictement positif u une fonction

$$f(x) = u(x)^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nu(x)^{n-1} \times u'(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{u(x)^n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{n}{u(x)^{n+1}} \times u'(x)$$

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$$

Par exemple déterminons l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ en $a = 0$. D'après les paragraphes précédents $T_0 :\ y = f'(0)(x-0) + f(0)$. D'une part $f'(x) = x - 1$ d'où $f'(0) = -1$ et d'autre part $f(0) = 1$. En conclusion l'équation de la tangente est $y = -x + 1$.

Variations et dérivations

Lorsque l'on se donne une fonction, on souhaite l'étudier. Ce que nous avons déja explorer avec l'étude du domaine de définition ou des translations de fonction de références. D'autre informations son a extraire de la fonction. L'une d'elle est ce que l'on appelle les *variations* de la fonction ce qui se traduit vulgairement par : quand est-ce que la fonction monte et quand-est-ce qu'elle descend.

Définition

- On dira qu'une fonction f est **strictement croissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) < f(\beta)$.
- On dira qu'une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.
- On dira qu'une fonction f est **strictement décroissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$.
- On dira qu'une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I si pour tout réels α et β de I tel que $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$.

Plaçons nous par exemple sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et étudions les variations de la fonction $f(x) = x^2$. Soit $0 < \alpha < \beta$ alors

$$f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

Puisque α et β sont tout deux positifs alors $\alpha + \beta > 0$ et puisque $\alpha < \beta$ alors $\alpha - \beta < 0$. La règle des signes nous donne donc que $\alpha^2 - \beta^2$ est négatif soit encore $f(\alpha) < f(\beta)$ et donc que la fonction carré est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

On montrerai de même que la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

Pour compiler ces informations de variation on réalise un *tableau de variation* qui comporte deux lignes : une ligne pour spécifier les valeurs de x classer dans l'ordre croissant, comme pour les tableaux de signe et une seconde ligne représentant les variations par des flèches qui montent pour signaler la croissance ou qui descende pour signaler la décroissance.

Le tableau de variation de la fonction carré est donc le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$		$\nearrow$	

On complète souvent le tableau de variation en mettant les valeurs des limites au bout des flèches :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cet exemple était assez facile. Les droites, c'est à dire les fonctions affines ont aussi des variations faciles à étudier.

Proposition

Soit f une fonction affine de coefficient directeur a.

- Si $a > 0$ la droite est strictement croissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Si $a < 0$ la droite est strictement décroissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

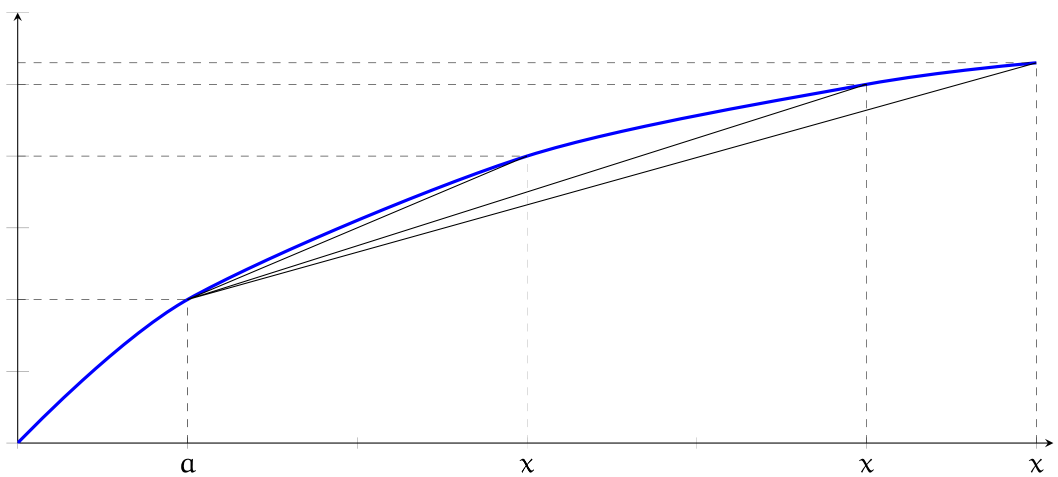
- Si $a = 0$ la droite est constante.

x	$-\infty$		$+\infty$
f	k	$\longrightarrow$	k

où $f(x) = k$

En se servant des variations des droites ainsi que du lien entre tangente et dérivation, nous pouvons obtenir les variations d'une fonction.

Reprenons le graphique qui nous a mené à la notion de tangente



Les droites successives, qui tendent vers la tangente, sont toutes croissante car le coefficient directeur est $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est positif puisque $a < x$ et que la fonction f est croissante. A la limite ce caractère sera conservé. Cela permet d'en déduire le théorème suivant.

Théorème

- Si f' existe et est positive sur un intervalle I alors la fonction f est croissante sur I.
- Si f' existe et est négative sur un intervalle I alors la fonction f est décroissante sur I.

Autrement dis : étudier les variations d'une fonction reviens à étudier le signe de sa dérivé.

La dérivé de la fonction $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$. Naturellement $2x$ est positif lorsque x est positif donc la fonction f sera croissante sur cet intervalle ce que nous avions déjà déterminer.

Exemple

Étudions la fonction $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2-1}$.

Nous voyons une fraction, il faut donc que le dénominateur, $x^2 - 1$, ne s'annule pas. En utilisant une identité remarquable ou une les formules de calculs des racines pour les polynômes de degrés 2, nous pouvons rapidement conclure que le domaine de définition de cette fonction est $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$. Le but étant de déterminer le signe de la dérivé, c'est à dire de résoudre une inéquation de la forme $f'(x) > 0$, nous allons calculer la dérivée et la factoriser au maximum.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \frac{(x)'(x^2-1) - (x^2-1)x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{(x^2-1)^2 + 1(x^2-1) - 2xx}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{(x^2-1)^2 + x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}
$$

Nous allons a présent dresser le tableau de signe et par la même le tableau de variation. La forme est donc la suivante.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2							
x^2-3							
$(x^2-1)^2$							
f'							
f							

Dans le tableau de variation comme dans les tableaux de signe on signale les valeurs interdites par une double barre.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2							0						
x^2-3			0								0		
$(x^2-1)^2$					0				0				
f'			0		$\parallel$		0		$\parallel$		0		
f					$\parallel$				$\parallel$				

En complétant les signes on arrive à

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
f					$\parallel$				$\parallel$				

D'après le cours, une dérivée positive donner une fonction croissante et inversement, ce qui permet d'arriver aux variations suivantes :

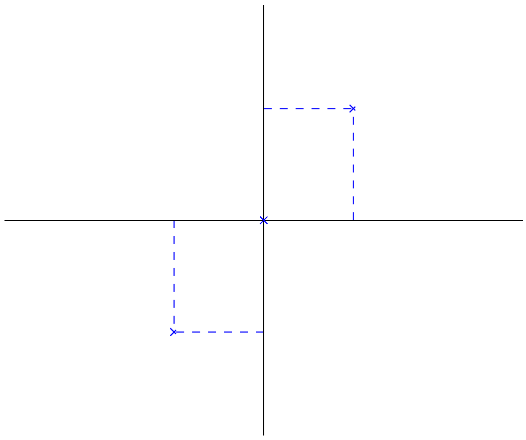
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\parallel$		$\searrow$		$\parallel$	$\searrow$		$\nearrow$	

Une étude de limite permet alors de finaliser le tableau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

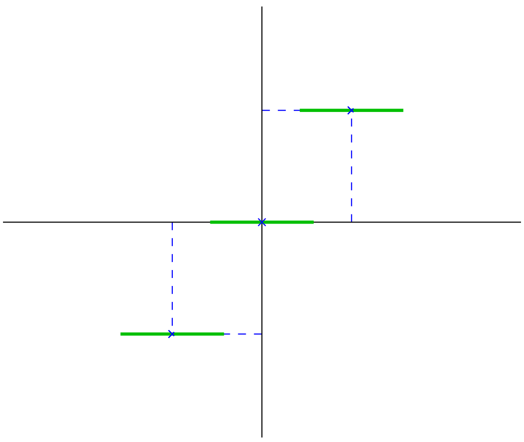
Le tableau de variation suffit en générale pour donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

D'une part les valeurs finie de la fonction donne des point de passage. Dans notre exemple nous savons que la courbe passera par les points $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0,0)$ et $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

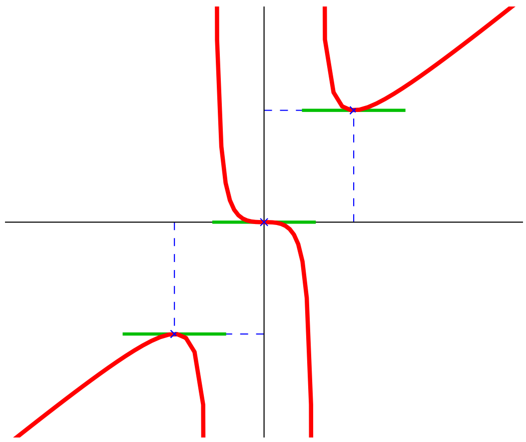


De plus, par construction, le coefficient directeur d'une tangente est le nombre dérivé. Lorsque la dérivée s'annule, on en déduit que la tangente est horizontale. Cela donnera une information sur le comportement autour de la tangente puisque par définition de *tangente*, cette droite "frôle" la courbe. Ainsi la courbe sera horizontale autour des tangente horizontale !

On trace donc des morceaux de droite horizontale lorsque la dérivée s'annule :



Pour obtenir finalement



4. Asymptotes

Qu'est-ce qu'une asymptote ?

Étymologiquement, le mot *asymptote* viens de l'ancien grec asùmptôtos signifiant "*qui ne s'affaisse pas*" ou "*qui ne coïncide pas*".

Dans le cadre mathématiques, une asymptote donne une information infinitésimale de l'objet d'étude. Dans notre contexte, l'objet d'étude est *la fonction* ou plus précisément l'objet géométrique qui en découle : sa courbe représentative. Obtenir une information asymptotique permet de simplifier la compréhension de la courbe.

Nous ne nous intéresserons qu'aux droites asymptotes. On en distingue trois :

- Asymptote horizontale, d'équation $y = b$
- Asymptote verticale, d'équation $x = a$
- Asymptote oblique, d'équation $y = ax + b$

Dans la suite on considère $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f. Attention, on parle d'asymptote à une courbe qui est un objet de la géométrie et non de la fonction f qui est un objet de l'analyse.

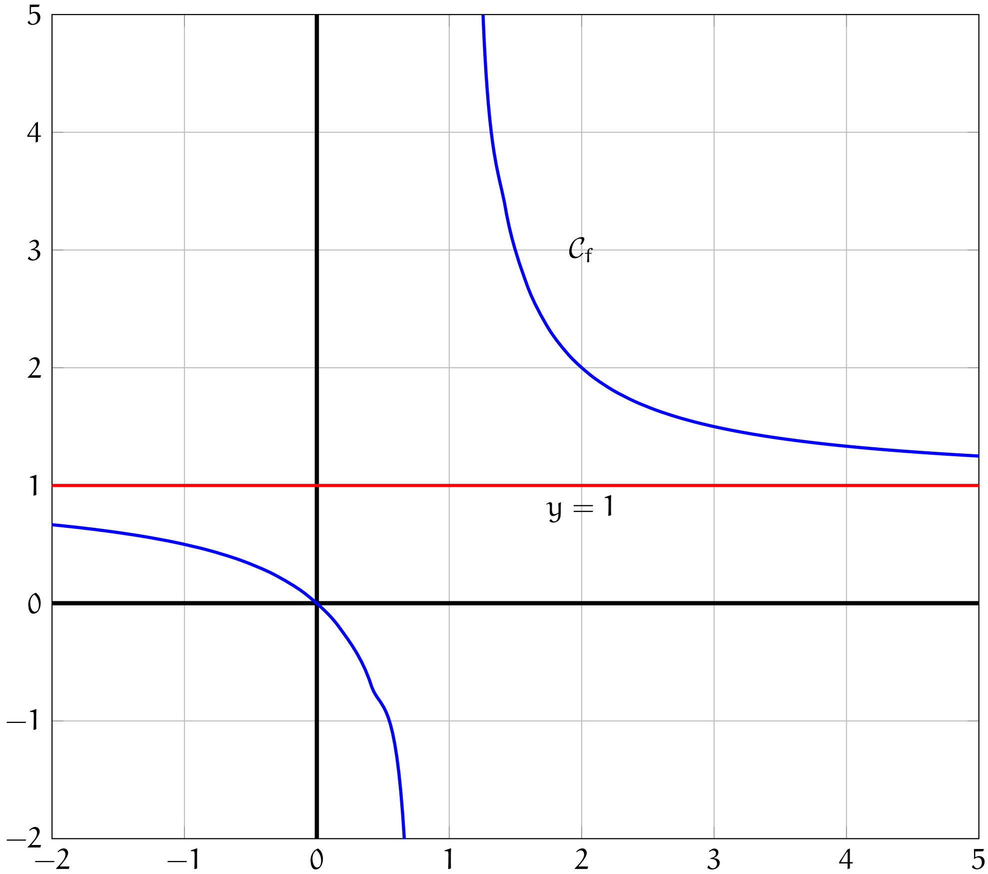
Asymptote horizontale

Définition

- On dira que la droite $y = b$ est une **asymptote horizontale en** $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.
- On dira que la droite $y = b$ est une **asymptote horizontale en** $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Il est bien sur possible qu'un asymptote en $-\infty$ soit aussi une asymptote en $+\infty$.

Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. On trouve assez rapidement $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Donc $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe. Sur la graphique on a :

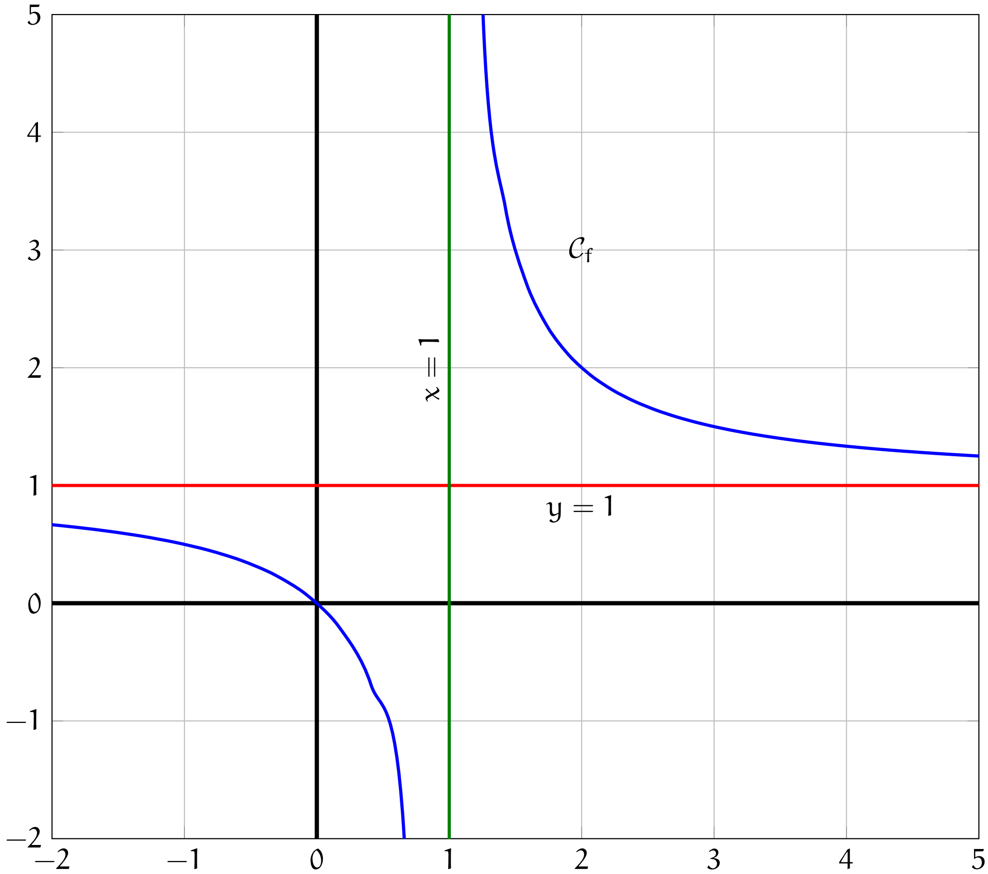


Asymptote verticale

Définition

On dira la droite $x = a$ est une **asymptote verticale** si $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

Reprenons l'exemple précédent avec $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. On vois assez rapidement que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$. On en déduit donc que la droite $x = 1$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_{\{}$. Sur le dessin cela donne



Asymptote oblique

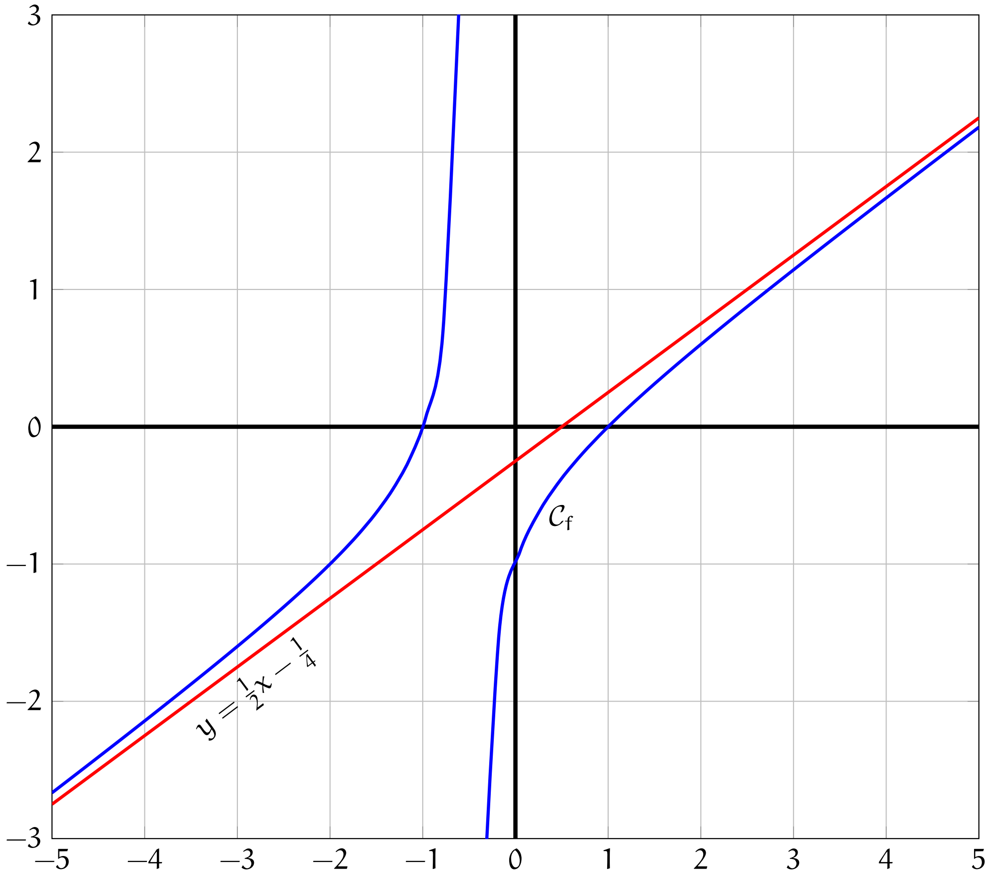
Définition

- On dira que la droite $y = ax + b$ est une **asymptote oblique en** $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.
- On dira que la droite $y = ax + b$ est une **asymptote oblique en** $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.

Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+1}$ et montrons que la droite $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est une asymptote oblique en $+\infty$ (et aussi en $-\infty$).

$$\begin{aligned}
f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) &= \frac{x^2-1}{2x+1} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\
&= \frac{4(x^2-1)}{4(2x+1)} - \frac{2x(2x+1)}{4(2x+1)} + \frac{2x+1}{4(2x+1)} \\
&= \frac{4(x^2-1) - 2x(2x+1) + (2x+1)}{4(2x+1)} \\
&= \frac{4x^2 - 4 - 4x^2 - 2x + 2x + 1}{4(2x+1)} \\
&= \frac{-3}{4(2x+1)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3}{4(2x+1)} = 0$ ce qui prouve que la droite $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est une asymptote oblique.


3
2
1
0
−1
−2
−3
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
$\mathcal{C}_f$
$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

Déterminer une asymptote oblique

Intéressons nous de plus près aux asymptotes obliques. Dans l'exemple précédent, l'asymptote a été donné. La seule chose à vérifier c'est que la différence tendait bien vers 0. Nous allons ici détailler la méthode permettant de déterminer l'équation d'une asymptote oblique. On notera simplement ∞ pour les calculs de limite sans préciser + ou −, les résultat étant les même.

> **Théorème**
>
> **Si** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ alors
>
> **Si** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b$ alors la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique
>
> **Sinon** la courbe n'admet pas de droite asymptote oblique.
>
> **Sinon** la courbe n'admet pas de droite asymptote oblique.

Reprenons l'exemple précédent avec la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+1}$.

La première étape est de calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2-1}{2x+1}}{x} = \frac{x^2-1}{2x^2+x}$$

Et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+x} = \dfrac{1}{2}$.

La seconde étape consiste à calculer la limite de $f(x) - ax$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x^2-1}{2x+1} - \frac{1}{2}x = \frac{2(x^2-1) - x(2x+1)}{2(2x+1)} = \frac{2x^2-2-2x^2-x)}{4x+2)} = \frac{-2-x)}{4x+2)}$$

Et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \dfrac{1}{2}x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2-x)}{4x+2)} = -\dfrac{1}{4}$ ce qui prouve que $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f.

Des asymptotes qui ne sont pas des droites

Cette partie est hors programme

Être asymptote c'est être comme la courbe mais en plus simple. Dans l'exemple précédent la fonction "difficile" $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+1}$ va se comporter en l'infini comme la droite $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$.

Il est possible que ça ne soit pas des droites mais d'autre type de courbes (dans l'idéal plus simple). La définition reste la même.

> **Définition**
>
> - On dira qu'une courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g est asymptote en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - g(x) = 0$.
> - On dira qu'une courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g est asymptote en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Prenons par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ et montrons $g(x) = x^2 + x + 1$ est une parabole asymptote.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{x^3}{x-1} - (x^2 + x + 1) \\ &= \frac{x^3}{x-1} - \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\ &= \frac{x^3}{x-1} - \frac{x^3-1}{x-1} \\ &= \frac{x^3 - x^3 + 1}{x-1} \\ &= \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0$