Chapitre 1

Les quatre opérations élémentaires

1. Les nombres entiers

Introduction

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{n^2}} = \int_0^1 \frac{4dt}{1+t^2}$$

Vous sentez votre sang ne faire qu'un tour, une goute de sueur froide coule le long de votre dos et vous vous demandez qu'est-ce que c'est que ce charabia. Commencez par respirer calmement et allégez votre esprit de la torpeur de cette phrase mathématique. Commençons par enfoncer des portes ouvertes

Oui, c'est ça des math.

Oui, vous pourrez comprendre ce que ça veut dire.

Non, c'est pas au contrôle !

Il faut vivre les math comme un jeu vidéo. L'équation écrite plus haut c'est le boss de fin. Et là vous commencer la partie, sans arme et sans expérience. Petit à petit nous allons nous attaquer à des problèmes qui vont affiner vos compétences et vous permettre d'affronter des monst... des problèmes de plus en plus difficile et vous finirez peut-être par vaincre ce démon. Mais pas d'inquiétude, ça sera pas dure (peut-être un peu douloureux).

Avant tout, il faut s'assurer que nous parlons le même langage. Celui des mathématiques !

Pour commencer laissons les lettres de l'alphabet dans notre poche et jouons avec nos chers nombres

$$0, 1, 2, 3...$$

Pour faire les choses bien, tous ces nombres naturels, on les range dans une boite. Cette boite s'appelle, **l'ensemble des entiers naturel** et est noté

$$\mathbb{N}$$

c'est un 'N' majuscule avec une barre plus épaisse au début de la lettre. C'est à un mathématicien italien du nom de Giuseppe Peano que l'on doit cette belle notation (le 'N' est celui de *naturale* le mot italien pour "naturel").

Donc dans cette boite on range tous les nombres entiers naturels (et positifs ou nuls)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 22, 2\ 019, 1\ 234\ 567\ 890, ...\}$$

Cette boite, bon disons le vrai mot : ensemble. Cet ensemble donc, est très grand, il y a TOUS les nombres entiers (ne confondez pas nombre et chiffre - chez nous il y a 10 chiffres et un nombre est composé de chiffre). Il y a une *infinité* d'entier naturel.

L'addition

La première chose que l'on peut faire avec les entiers c'est les additionner. Mais ça vous savez déjà comment ça marche !

Alors bien sur on peut utiliser une calculatrice pour faire des additions, mais on peut aussi les poser *à l'ancienne* en alignant en colonne les entiers sur la droite comme ceci :

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 1 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ + & 9 & 3 & 0 & 0 & 4 & 9 & 8 \\ + & & 4 & 9 & 4 & 1 & 2 & 8 \end{array}$$

On additionne par la droite en colonne. Ainsi la première opération à poser est $2+8+8=18$. On écrit que l'unité, c'est à dire le chiffre le plus à droite, de ce résultat. Mais pour ne pas oublier le 1, on met le met en **retenue** sur la colonne suivante.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & \color{red}{1} & \\ & & & 1 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ + & 9 & 3 & 0 & 0 & 4 & 9 & 8 \\ + & & 4 & 9 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ \hline = & & & & & & & 8 \end{array}$$

La deuxième opération à faire est celle de la colonne suivante sans oublier de prendre la retenue : $\color{red}{1}+7+9+2=19$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \\ & & & 1 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ + & 9 & 3 & 0 & 0 & 4 & 9 & 8 \\ + & & 4 & 9 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ \hline = & & & & & & 9 & 8 \end{array}$$

Et on continue comme ça jusqu'à tout calculer !

$$\begin{array}{cccccccc} & & \color{red}{1} & & & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \\ & & & 1 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ + & 9 & 3 & 0 & 0 & 4 & 9 & 8 \\ + & & 4 & 9 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ \hline = & 9 & 8 & 0 & 8 & 9 & 9 & 8 \end{array}$$

Pour finir le résultat est 9 808 998.

La multiplication

Une autre chose que l'on peut faire avec les nombres c'est les multiplier. Et comme avec les additions on pose une multiplication :

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ \times & & & 7 \\ \hline \end{array}$$

La première opération à faire est $7 \times 3 = 21$. On inscrit le 1 et on met le 2 en retenue.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2^2 & 3 \\ \times & & & 7 \\ \hline & & & \boxed{2}1 \end{array}$$

Puis ensuite on fait le 7×2 en ajoutant la retenue au résultat soit 16. On note le 6 et on met le 1 en retenue.

$$\begin{array}{cccc} & 1^1 & 2^2 & 3 \\ \times & & & 7 \\ \hline & & \boxed{1}6 & 1 \end{array}$$

Et pour finir

$$\begin{array}{cccc} & 1^1 & 2 & 3 \\ \times & & & 7 \\ \hline & 8 & 6 & 1 \end{array}$$

Une multiplication facile est celle par dix. Multiplier par 10 reviens à ajouter un 0 à droite. D'ailleurs multiplier par 100 reviens à ajouter deux 0 à droite ; multiplier par 1 000 à ajouter 3 zéros ; multiplier par $1\underbrace{0...0}_{952 \text{ zéros}}$ reviens à ajouter 952 zéros à droite.

- $123 \times 10 = 1\ 230$
- $98\ 760 \times 1\ 000 = 98\ 760\ 000$
- $67\ 89 \times 1\underbrace{0...0}_{314 \text{ zéros}} = 678\ 91\underbrace{0...0}_{314 \text{ zéros}}$

Comment faire pour multiplier par 20 par exemple ? Il suffit de multiplier par 2 puis par 10 car, comme tout le monde le sait $20 = 2 \times 10$.

Ainsi pour calculer 17×20, on fait $17 \times 2 = 34$ et on rajoute un 0 : $17 \times 20 = 340$.

Il en va de même pour 45×120. On fait 45×12 auquel on ajoute un 0 : $45 \times 120 = 5\ 400$.

On peut bien sur combiner et *oublier les* 0 pour les remettre à fin du calcul. Ainsi pour faire $12\ 300 \times 9\ 870$ on fait 123×987 auquel on rajouter trois 0 à droite. Finalement $12\ 300 \times 9\ 870 = 121\ 401\ 000$.

On peut aussi faire *à l'ancienne* et poser la multiplication. Et justement on se sert de cette règle de 0 avec un autre principe qui est la **distributivité** [1].

On remarque que $987 = 7 + 80 + 900$ c'est à dire $987 = 7 + 8 \times 10 + 9 \times 100$. Ainsi pour faire 123×987 on va faire 123×7 puis 123×8 et rajouter un 0 puis 123×9 puis rajouter deux 0. Finalement on additionne les trois chiffres pour avoir le résultat.

$$\begin{aligned} 123 \times 987 &= 123 \times (7 + 80 + 900) \\ &= 123 \times 7 + (123 \times 8)0 + (123 \times 9)00 \end{aligned}$$

Bon ça à l'air compliqué raconter comme ça mais en définitive c'est très simple et ça se pose dans un joli tableau

			1	2	3		
		×	9	8	7		
							← 123 × 7
+						0	← 123 × 8
+					0	0	← 123 × 9

Ce qui fini par

				1	2	3	
			×	9	8	7	
				8	6	1	← 123 × 7
+			9	8	4	0	← 123 × 8
+	1	1	0	7	0	0	← 123 × 9
	1	2	1	4	0	1	

L'addition et la multiplication

A présent mélangeons un peu les opérations !

Que fait $1 + 2 \times 3$? C'est là que les choses se "compliquent". Tout comme me monde physique est régie par des lois (comme la gravité), le monde mathématiques est lui aussi soumit à un ensemble de lois dont voici la première :

L'opération de multiplication est prioritaire sur l'opération d'addition !

Cela signifie que pour faire $1 + 2 \times 3$, on réalise d'abord la multiplication ; on obtient $1 + 6$ qui fait 7.
Si il y a plusieurs multiplication dans une expression, on les calculs en premier peut importe l'ordre.

$$1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 = 1 + 6 + 20 = 27$$

Si on veut jouer avec les priorités on utilise les parenthèses.

Les opérations dans les parenthèses sont prioritaires sur celles qui n'y sont pas.

Ainsi $(1 + 2) \times 3 = 3 \times 3 = 9$.
On peut bien sur combiner ces deux règles !

1. On reviendra dessus plus tard.

$$\begin{aligned}(1+2\times(3+4))\times((5+6)\times 7) &= (1+2\times 7)\times((5+6)\times 7)\\ &= (1+14)\times((5+6)\times 7)\\ &= 15\times((5+6)\times 7)\\ &= 15\times(11\times 7)\\ &= 15\times 77\\ &= 1155\end{aligned}$$

La soustraction

La soustraction est un peu plus compliquée voir parfois impossible... dans la boite où l'on vit. En effet dans notre boi... ensemble $\mathbb{N}$, l'opération $4-7$ n'existe pas. Vous devinez que la réponse est -3 mais ce nombre n'est pas dans $\mathbb{N}$. Il est dans un ensemble un peut plus grand appelé **l'ensemble des entiers relatifs** noté

$$\mathbb{Z}$$

Notation introduit par M. Dedekind, mathématicien allemand (le 'Z' c'est pour *zahl*, 'nombre' en allemand).

Cet ensemble est le même que $\mathbb{N}$ sauf que chaque entier peut être positif, précédé par un $+$, ou négatif, précédé par un $-$.

$$\mathbb{Z} = \{... - 2019, ... - 2, -1, 0, +1, ..., +12\ 345, ...\}$$

Dans la pratique on n'écrit pas le $+$ pour le nombre positif.

Pour poser une soustraction on fait comme pour l'addition sauf que pour chaque colonne, au lieu d'additionner, on soustrait (élémentaire !) :

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 3 & 9 \\ - & 3 & 9 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Dans la première colonne on fait donc $9-3=6$.

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 3 & 9 \\ - & 3 & 9 & 3 \\ \hline & & & 6 \end{array}$$

Dans la seconde colonne on fait $3-9=-6$ sauf qu'on ne peut pas mettre de nombre négatif dans la dernière ligne. On va appliqué le même principe de retenue au lieu de faire $3-9$ on va faire $13-9$ et rajouter une retenue au nombre soustrait

$$\begin{array}{cccc} & 9 & \underline{{}_1 3} & 9 \\ - & 3_{+1} & 9 & 3 \\ \hline & & 4 & 6 \end{array}$$

A la colonne suivante, on réalise encore la dernière opération $9-3$ mais on soustrait la retenue, on fait donc $9-(3+1)=9-4=5$

$$\begin{array}{cccc} & 9 & \underline{{}_1 3} & 9 \\ - & 3_{+1} & 9 & 3 \\ \hline & 5 & 4 & 6 \end{array}$$

Comment poser $123-456$? Tout simplement en soustrayant le plus petit au plus grand, c'est à dire en posant $456-123=333$ ce qui est possible, puis de changer le signe du résultat :

$$123-456=-333$$

Multiplication et soustraction

Pour les règles de priorité, la soustraction se comporte comme l'addition. Dans ce cas rien de nouveau et donc rien de plus difficile... sauf que... comment multiplier deux nombres qu'ils aient ou non le même signe !

Pour multiplier deux nombres relatifs, on réalise le produit des nombres et le signe est obtenu par la règle des signes :

$$+\times+=+ \qquad +\times-=- \qquad -\times+=- \qquad -\times-=+$$

Par exemple $(-6)\times 2=-12$, $(-1)\times(-3)=3$.

2. Les nombres rationnelles

La quatrième opération élémentaire

Il est temps de parler de la quatrième opération élémentaire : la division que l'on note $\div$.

D'un coté du miroir nous avons l'addition et la soustraction qui ont quelques propriétés partagées ou complémentaire :

- L'addition $123 + 456$ est pareil que $456 + 123$. On dis que l'addition est *commutative.*
- La soustraction $123 - 456$ n'est pas pareil que $456 - 123$. Mais les deux résultats sont *opposés.*

De l'autre coté du miroir la division aura le même rôle que la soustraction mais pour la multiplication :

- La multiplication 123×456 est pareil que 456×123.
- La division $123 \div 456$ n'est pas pareil que $456 \div 123$. Mais les deux résultats sont *inverses.*

La division de 456 par 123 reviens à se demander combien de paquet de 123 on peut former avec 456. Pour répondre à cette question on utilise la multiplication. On observe que $123 \times 3 = 369$ mais que $123 \times 4 = 492$. On peut donc mettre 3 paquet de 123 dans 456 mais pas 4 (car le résultat 492 est plus grand que 456).

Mais (oui il y a un "mais", sinon ça serait trop facile). Il y a un reste car 3 paquets de 123 font 369. On peut rajouter 87 pour arriver à 456. Ce 87 est le résultat de $456 - 123 \times 3$.

Au final

$$456 = 123 \times 3 + 87$$

On parle de *division euclidienne.*

Rappelons comment poser une division et divisons 2019 par 19.

On représente la situation dans un tableau

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline &&&&& \end{array}$$

On commence par la droite en se demandant combien de paquet de 19 on peut mettre dans 20.

$$\begin{array}{cccc|cc} \underline{2}&\underline{0}&1&9&1&9\\ \hline &&&&& \end{array}$$

La réponse est évidement 1

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline &&&&1& \end{array}$$

Sous le 20 on note le résultat de 19×1

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1& \end{array}$$

On réalise la différence dans la partie gauche du tableau.

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1&\\ &1&&&& \end{array}$$

On *fait descendre* le prochain chiffre qui compose le nombre 2019 à savoir le 1 puisque le 2 et le 0 ont été traité.

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1&\\ &\underline{1}&\underline{1}&&& \end{array}$$

On se demande alors combien de paquet de 19 on peut mettre dans 11 et on note le résultat dans la partie droite du tableau.

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1&0\\ &1&1&&& \end{array}$$

Comme précédemment on note le résultat de 19×0 sous le 11 et on réalise la différence

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1&0\\ &1&1&&&\\ &&0&&&\\ &1&1&&& \end{array}$$

On fait descendre le prochain chiffre

$$\begin{array}{cccc|cc} 2&0&1&9&1&9\\ \hline 1&9&&&1&0\\ &1&1&&&\\ &&0&&&\\ &\underline{1}&\underline{1}&\underline{9}&& \end{array}$$

et on se demande combien de paquet de 19 on peut mettre dans 119. La réponse est 6.

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2&0&1&9&1&9& \\ \hline 1&9&&&1&0&6\\ &1&1&&&&\\ &&0&&&&\\ &1&1&9&&&\end{array}$$

On note le résultat de 19×6 sous le 119

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2&0&1&9&1&9& \\ \hline 1&9&&&1&0&6\\ &1&1&&&&\\ &&0&&&&\\ &1&1&9&&&\\ &1&1&4&&&\end{array}$$

Et on fait la différence

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2&0&1&9&1&9& \\ \hline 1&9&&&1&0&6\\ &1&1&&&&\\ &&0&&&&\\ &1&1&9&&&\\ &1&1&4&&&\end{array}$$

Il n'y a plus de chiffre *à faire descendre*. Donc on s'arrête ici.

Au final $2019 = 19 \times 106 + 5$.

Des virgules ... mais pas trop !

La division euclidienne est une pierre angulaire de nombreux concepts et central en théorie des nombres. Nous n'allons pas prolonger dans cette direction. Nous allons nous diriger vers un nouvel ensemble de nombre : celui des nombres à virgules !

Reprenons une division $1234 \div 5$

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1&2&3&4&5&& \\ \hline 1&0&&&2&4&6\\ &2&3&&&&\\ &2&0&&&&\\ &&3&4&&&\\ &&3&0&&&\\ &&&4&&&\end{array}$$

Une fois qu'on arrive à la fin d'une division on peut la continuer en rajoutant une virgule et en faisant descendre des 0. Dans l'exemple précédent on poursuivrait de la manière suivante :

On commence par faire apparaitre une virgule et en faisant tomber un 0 :

$$\begin{array}{ccccc|ccc} 1&2&3&4&&5&& \\ \hline 1&0&&&&2&4&6,\\ &2&3&&&&&\\ &2&0&&&&&\\ &&3&4&&&&\\ &&3&0&&&&\\ &&&4&0&&&\end{array}$$

et on continue jusqu'à ce qu'il n'y ai plus de reste (ou plus précisément que le reste devienne nul).

$$\begin{array}{ccccc|cccc} 1&2&3&4&&5&&& \\ \hline 1&0&&&&2&4&6,&8\\ &2&3&&&&&&\\ &2&0&&&&&&\\ &&3&4&&&&&\\ &&3&0&&&&&\\ &&&4&0&&&&\\ &&&4&0&&&&\\ &&&&0&&&&\end{array}$$

On parle de *nombres décimaux* les nombres s'écrivant avec des virgules. La partie avant la virgule est appelée *la partie entière* et la partie après la virgule est *la partie décimale*. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Il y a des divisions qui sont plus facile que d'autre, exactement comme les multiplications. En effet nous avons vu que multiplier par 10 revenait à ajouter des 0 à droite.

Diviser par 10 reviens à déplacer la virgule à gauche d'un cran comme dans $123 \div 10 = 12,3$ ou dans $45,6 \div 10 = 4,56$.

On devine aisément que diviser par 100 revient à déplacer la virgule de deux crans et diviser par $1\underbrace{0...0}_{314}$ reviens à décaler de 314 cran vers la gauche. Bien sur lorsqu'il n'y a plus de chiffre à gauche on ne rajoute rien, et rien en mathématique c'est 0.

$$123 \div 100\ 000 = 0,001\ 23$$

De la même manière multiplier un nombre à virgule par 10 reviens à déplacer la virgule à droite comme dans $12,34 \times 10 = 123,4$ et dans $456,789 \times 100 = 45\ 678,9$.

Des fractions !

Il arrive parfois que les divisions ne s'arrête pas comme par exemple

$$\begin{array}{cccc|cccc}
4 & & & & 3 & & & \\
\hline
3 & & & & 1, & 3 & 3 & 3 \\
1 & 0 & & & & & & \\
 & 9 & & & & & & \\
 & 1 & 0 & & & & & \\
 & & 9 & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & \\
 & & & 9 & & & & \\
 & & & 1 & & & &
\end{array}$$

Alors attention ! Jamais, ô grand jamais nous n'écrirons $4 \div 3 = 1,3333.....$ D'une part les points de suspension sont à bannir, car on ne sait jamais ce qu'ils peuvent cacher. D'autre part, il ne s'agit en aucun cas d'une égalité. A la limite on pourra écrire $4 \div 3 \simeq 1,333$ pour *a peu prés égale.*

Alors pourquoi se prendre la tête pour des centièmes de décimale ?

Pour la simple raison que les mathématiques sont une science exacte et que les approximation numérique sont davantage du monde physique que mathématique. D'un point de vue physique il est impossible qu'une voiture aille à une vitesse de 50 km/h. Car en math, $50 = 50$ mais pour la physique $49,99$ km/h ... on est d'accord c'est 50km/h (même pour les radars). Bref, en math on est précis et exacte. On laisse l'approximation aux humains.

Bien acceptons cette magnifique réalité (qui n'existe donc aucunement dans la nature) et tentons de donner la valeur exacte de $4 \div 3$. Voici la réponse : $4 \div 3$.

On ne peut pas faire mieux que cette division, on la laisse donc en l'état. Bon pas tout à fait, on va plutôt noter $\frac{4}{3}$ et on va parler de *fraction* plutôt que de division.

D'ailleurs depuis le début nous aurions pu deviner que cela finirait de la sorte. Regarder de plus prés le symbole de division $\div$. Un point au dessus et en dessous d'une barre horizontale. C'est la notation générique d'une fraction.

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des fractions (cela viens de *quotiente* pour préciser qu'il s'agit en fait de division)

En fait, on va oublier $\mathbb{D}$

Oui ! Cet ensemble, $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres à virgule. Mais comme nous l'avons observer $1,5 = 15 \div 10 = \frac{15}{10}$. Donc du coup c'est plus du tout marrant de manipuler des nombres à virgules (puis c'est pas beau) !

Mais là on se retrouve avec un nouveau problème. Si on pose l'opération $3 \div 2$ on obtient $1,5$. On arrive alors à la drôle d'égalité :

$$\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1,5 = 15 \div 10 = \frac{15}{10}$$

Deux fractions, qui ont l'air différente... sont égales... oula, vite un théorème pour régler ce problème !

Les lois du monde des fractions

Dans une fraction, on appel *numérateur* le nombre du haut et *dénominateur* le nombre du bas. L'entier 4 est le numérateur de $\frac{4}{3}$ et 3 est le dénominateur.

Règle 0 : Pas par zéro ! C'est pas vraiment une règle, mais disons une erreur à ne surtout jamais commettre !

Il n'est pas possible de diviser par 0.

Diviser par 0 n'a pas de sens commun. D'un point de vu fractionnaire il n'est pas possible d'avoir de 0 au dénominateur (en bas).

Règle 1 : Par un ! Diviser par 1 reviens à ne rien faire (comme multiplier par 1). Avec une formule :

$$\frac{a}{1} = 1$$

Règle 2 : Égalité de fraction. Deux fractions sont égales si il y a un même coefficient multiplicateur pour numérateur et dénominateur. Avec une jolie formule on a :

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$$

Il suffit de remplacer a, b et k par n'importe quel nombre (sans mettre de 0 au dénominateur). L'important dans cette formule c'est de bien s'assurer qu'il s'agisse de multiplication et en aucun cas d'addition ou de soustraction. Ainsi $\frac{15}{10} = \frac{5 \times 3}{5 \times 2} = \frac{3}{2}$. On dis que le numérateur et le dénominateur on un *facteur commun*. Voici d'autre exemple d'égalité : $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, $\frac{12}{24} = \frac{120}{240}$, $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Règle 3 : Additionner c'est pas toujours possible mais en fait si ! Il n'est possible d'additionner des fractions uniquement lorsqu'elles ont le même dénominateur en additionnant leur numérateur. Précisément $\frac{11}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11+2}{3} = \frac{13}{3}$.

Il n'est pas possible d'additionner $\frac{11}{3}$ et $\frac{5}{6}$ car ce deux fractions n'ont pas le même dénominateur. MAIS on peut faire en sorte qu'ils aient le même pour les deux fractions en utilisant la règle 2. En effet si dans la fraction $\frac{11}{3}$ on multiplie en haut et en bas par 2 on arrive à $\frac{11}{3} = \frac{11 \times 2}{3 \times 2} = \frac{22}{6}$. Ainsi $\frac{11}{3} + \frac{5}{6} = \frac{22}{6} + \frac{5}{6} = \frac{22+5}{6} = \frac{27}{6}$.

Règle 4 : Le signe peut se balader !

$$\frac{-3}{2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Dans la pratique, on évite autant que possible les nombres négatifs au dénominateur. En particulier, on peut simplement soustraire les fraction en jouant avec le signe et en se ramenant à une addition : $\frac{11}{3} - \frac{5}{6} = \frac{11}{3} + \frac{-5}{6} = \frac{22}{6} + \frac{-5}{6} = \frac{22+(-5)}{6} = \frac{17}{6}$. Attention à ne pas oublier la règle des signes : $\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.

Règle 5 : Multiplier c'est facile. Numérateur avec numérateur et dénominateur avec dénominateur ! Avec une jolie formule on a $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Par exemple : $\frac{3}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$.

Règle 6 : Pour inverser, on inverse ! L'inverse de la fraction $\frac{3}{2}$ est la fraction $\frac{2}{3}$. On a inverser numérateur et dénominateur. En particulier, en jouant avec la règle 1, l'inverse de 14 est $\frac{1}{14}$. Ne pas confondre avec l'opposé. L'opposé de 14 est -14.

Règle 7 : Diviser des divisions c'est multiplier ! Diviser par une fraction reviens à multiplier par son inverse. En formule :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

On peut en particulier, additionner ou multiplier les nombres à virgule en utilisant les règles précédentes accompagner des remarques sur la division par 10. Par exemple :

$$12,34+5,678 = \frac{1234}{100} + \frac{5\ 678}{1\ 000} = \frac{1\ 234 \times 10}{100 \times 10} + \frac{5\ 678}{1000} = \frac{12\ 340}{1\ 000} + \frac{5\ 678}{1\ 000} = \frac{12\ 340 + 5\ 678}{1\ 000} = \frac{18\ 018}{1\ 000} = 18,018$$

Des pourcentages ?

Un pourcentage n'est rien d'autre qu'une fraction avec 100 au dénominateur. Il faut "juste" retenir que lorsqu'en français on prononce le mot "de" cela correspond à une multiplication dans le monde des mathématiques. Ainsi 30% de 90€ correspond à l'opération $\frac{30}{100} \times 90$. Il suffit d'utiliser les lois du monde des fractions pour faire ce calcul :

$$\frac{30}{100} \times 90 = \frac{30}{100} \times \frac{90}{1} = \frac{30 \times 90}{100 \times 1} = \frac{2\ 700}{100} = \frac{27 \times 100}{1 \times 100} = \frac{27}{1} = 27$$

Ainsi si une paire de chaussure coûte 90€ mais que vous avez une réduction de 30% vous paierez $90-27 =$ 63€.

Si maintenant je revend cette paire de chaussure 30% plus chers que ce que je l'ai achetée, combien vais-je la vendre ?

Vous devinez bien que cette question en apparence facile cache un beau piège comme nous (les prof de math) en avons le secret !

Il serait prématuré de répondre le prix de 90€ a été raboter de 30% puis on le revend 30% de plus donc on reviens à 90€. Laissons nous porter par les calculs : le prix d'achat était de 63€ que vaut 30% de 63€ ? Réponse :

$$\frac{30}{100} \times 63 = \frac{30}{100} \times \frac{63}{1} = \frac{30 \times 63}{100 \times 1} = \frac{1\ 890}{100} = 18,9$$

Le nouveau prix de vente sera alors $63 + 18,9 = 81,9$.

Quelle est alors le pourcentage de perte entre le prix de vente sans réduction (90€) et le nouveau prix de vente (81,9€) ?

La différence de prix est de 8,1€ $(90 - 81,9)$. Le pourcentage associé est donc $\frac{8,1}{90} \times 100$ (la différence par rapport au prix initial que l'on multiplie par 100 pour avoir un pourcentage).

$$\frac{8,1}{90} \times 100 = \frac{\frac{81}{10}}{\frac{90}{1}} \times \frac{100}{1} = \frac{81}{10} \times \frac{1}{90} \times \frac{100}{1} = \frac{81 \times 1 \times 100}{10 \times 90 \times 1} = \frac{9 \times 9 \times 10 \times 10}{10 \times 9 \times 10} = \frac{9}{1} = 9$$

Ainsi la perte est de 9% du prix de départ. Attention les pourcentage sont des fractions et les règles d'addition et de soustractions sont très strictes !

Autre exemple : vous bénéficier de 1000€ de bourse. On vous annonce une augmentation de 20% en 2020 mais deux réductions successives en 2021 et 2022 de 9%. On vous souligne donc qu'une augmentation de 20% suivit de deux diminution de 9% font qu'au bout de trois ans, la bourse sera augmenter de $20 - 9 - 9 = 2\%$.

Réalisons les calculs !

En 2020 vous recevrez $1000 + \frac{20}{100} \times 1000 = 1200$€.

En 2021 vous recevrez $1200 - \frac{9}{100} \times 1200 = 1092$€.

En 2022 vous recevrez $1092 - \frac{9}{100} \times 1092 = 993.72$€.

Ce qui correspond au final à une diminution de $\frac{1000 - 993.72}{1000} \times 100 = 0,628\%$ de la bourse...

Puissances de 10

Comme nous l'avons remarqué au chapitre précédent, les points de suspension sont à bannir car ils peuvent cacher bien des problèmes.

Si vous avez été attentif aux précédent chapitre, nous avons tout de même utiliser ces fameux points de suspension : $3 \times 1\underbrace{0...0}_{314} = 3\underbrace{0...0}_{314}$.

Les puissances vont pouvoir régler ce problème !

La puissance se note en exposant et un petit peu plus petit et correspond au produit du nombre autant de fois que la puissance (l'exposant) est indiquée : $10^2 = 10 \times 10 = 100$.

Précisément $10^{\text{machin}} = 1\ \underbrace{0...0}_{\text{machin}}$.

Bien sur la notion de puissance a un sens lorsque l'exposant est un entier positif. Mais il est également possible de donner un sens aux puissances négatives en utilisant les fractions $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\ 000} = 0,001$.

Précisément $10^{-\text{machin}} = \dfrac{1}{10^{\text{machin}}} = \dfrac{1}{1\ \underbrace{0...0}_{\text{machin}}} = \underbrace{0,0...0}_{\text{machin}}1$.

Les puissances de 10 respectent quelques petites règles :

- $10^0 = 1$
- $10^1 = 10$
- $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$
- $\dfrac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$
- $(10^n)^m = 10^{nm}$

Attention, les puissances sont en fait des multiplications cachées. il n'existe donc pas de formule permettant de calculer simplement $10^n - 10^m$!

Puissances de pas 10

En fait que ça soit 10 ou 42 ça ne change rien ! On peut jouer avec n'importe quel nombre x et y !

- $x^0 = 1$
- $x^1 = 10$
- $x^n \times x^m = x^{n+m}$. Il est important ici que ça soit le même nombre x. Par exemple $3^2 \times 3^7 = 3^9$ mais $3^2 \times 4^9 = ?$
- $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$. Même remarque que précédemment : il faut que ça soit le même x.
- $(x^n)^m = x^{nm}$
- $(xy)^n = x^n \times y^n$

Voici un exemple d'utilisation de ces règles permettant de simplifier des expression rationnelle (c'est le mot pompeux pour parler de fraction) :

$$\frac{9^2 \times 10}{3^3 \times 8} = \frac{(3^2)^2 \times (2 \times 5)}{3^3 \times 2^3} = \frac{3^{2\times 2} \times (2 \times 5)}{3^3 \times 2^3} = \frac{3^4 \times 2^1 \times 5^1}{3^3 \times 2^3} = \frac{3^{4-3} \times 5^1}{2^{3-1}} = \frac{3^1 \times 5^1}{2^2} = \frac{15}{4} = 3,75$$

La réciproque du carré

Lorsque l'on met un nombre à la puissance 2 on dit qu'il est *au carré*.

La *racine carré* d'un nombre, est un nombre dont le carré vaut le nombre de départ.

Par exemple la racine carré de 9 est un nombre dont le carré vaut 9. Le nombre 3 répond à la question. On note la racine carré d'un nombre x par $\sqrt{x}$. Le symbole $\sqrt{}$ viens d'une déformation de la lettre r pour *radical* signifiant racine carré.

Autre exemple : $\sqrt{16} = 4$ car le carré de 4 donne 16. De même $\sqrt{25} = 5$.

Il n'est pas toujours possible de déterminer la racine carré d'un nombre. Par exemple que vaut $\sqrt{2}$? On cherche un nombre qui au carré, donne 2. On peut démontrer non sans peine qu'il n'existe aucun nombre fractionnaire égale à la racine carré de 2. Ce nombre $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction ! Il n'est pas dans l'ensemble $\mathbb{Q}$. Il appartient à un ensemble plus grand : celui des nombres réels qui est noté $\mathbb{R}$. Il n'est pas possible de calculer $\sqrt{2}$ sans calculatrice.

La calculatrice donne $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$ et plein d'autre chiffre après la virgule. Dans ce cas, on pourrait imaginer que $\sqrt{2}$ est un élément de $\mathbb{D}$, mais il s'avère que les décimales ne répondent à aucune règle de répétition. Il ne s'agit que d'une approximation numérique.

Comme il y a quelques règles avec les puissances (donc donc avec les carré), il y a quelques règles avec les racines carrées.

Tout d'abord, rappelons-nous la règle des signes. Quel est le signe de x^2 ? Si x est de signe $+$ alors la règle des signes donne que $x^2 = x \times x$ est de signe $+$. Si x est de signe $-$ alors $x^2 = x \times x$ est de signe $+$ aussi.

A quoi correspond alors le nombre $\sqrt{-1}$? Par définition c'est un nombre dont le carré donne -1 c'est à dire un carré qui est de signe $-$... IMPOSSIBLE ! Car comme nous venons de le signaler, un carré est toujours de signe $+$.

Bon en fait, on verra biiiiiien plus tard que l'on peut donner un sens à la racine carré des nombres négatifs mais il faudra se placer dans un autre ensemble. Pour l'instant gardons en tête que la racine carré ne peut prendre que des nombres positifs !

Puisqu'une racine carré viens de la puissance 2, elle hérite de certaine règle avec des nombres réels positifs x et y :

- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{x^2} = x$
- $\sqrt{x}^2 = x$
- $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$
- $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Attention il n'existe pas de formule permettant de calculer simplement $\sqrt{x+y}$.

On peut combiner ces règles, et les règles des puissances, pour réaliser des calculs :

$$\sqrt{1000} = \sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \times 10^1} = \sqrt{10^2} \times \sqrt{10^1} = 10 \times \sqrt{10}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3}$$

La réciproque du cube ? Sérieusement ?

Lorsqu'un nombre est à la puissance 3, on dis qu'il est *au cube*.

La racine cubique d'un nombre x est un nombre, noté $\sqrt[3]{x}$ appelé la racine cubique de x, qui mit au cube donne x. Comme par exemple $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.

N'ayez pas peur, ce n'est pas du tout au programme et il n'y aura aucune question sur la racine cubique. L'idée ici est de montrer que le 2 de la racine carré peut être remplacé par n'importe quel nombre entier et que les propriétés et formules restent globalement les même. Bref, aux exos !