Remise à niveau

Trinôme

Polynôme

Nous avons déjà rencontré les polynômes, plus exactement les monômes lorsque que nous cherchions à factoriser. Précisons cela avec une définition :

Un monôme est une expression littérale de la forme

$$ax^n$$

où x est l'inconnue, a le coefficient du monôme et l'entier n, toujours positif, la puissance du monôme.

Par exemple

1. L'expression $3x^2$ est monôme de puissance 2.
2. Le coefficient du monôme $\sqrt{2}x^7$ est $\sqrt{2}$.
3. L'expression x^2+3 n'est pas un monôme.

Sur ce dernier exemple, on observe que x^2 est un monôme de puissance 2 et de coefficient 1 et le nombre 3 peut lui aussi être vu comme un monôme. En effet en jouant un peu avec lui on peut dire que $3 = 3x^0$ de sorte que 3 est un monôme de coefficient 3 et de puissance 0.

- Une expression composée d'une somme de monôme est appelée un *polynôme.*
- La plus grande puissance des monômes composant un polynôme est appelée le *degrés* du polynomes
- Le coefficient du monôme de puissance 0 est appelée le coefficient (ou terme) *constant.* Il peut être nul.
- Le coefficient non nul du monôme de plus grande puissance est appelée le coefficient (ou terme) *dominant.*

Par exemple :

1. Le polynôme $3x^2-4x+1$ est un polynôme de degrés 2 de coefficient constant 1 et de coefficient dominant 3.
2. Le polynôme $3x$ est de degré 1, de coefficient constant nul et de coefficient dominant nul.
3. L'expression $\sqrt{x}+1$ n'est pas polynôme

Le but de ce chapitre est de percer le secret des polynômes de degrés 2 !

Le discriminant

Nous souhaitons résoudre l'équation $3x^2+3x-6=0$. Pour cela nous allons essayer de nous ramener à des équations de degrés 1.

Pour commencer on factorise le polynôme par 3 : $3x^2+3x-6=0 \Longleftrightarrow 3\left(x^2+x-2\right)=0$. Ce produit de facteur est nul si et seulement si $x^2+x-2=0$. On tripote un peu l'expression (cela s'appelle la forme *canonique* - pour nous on dira seulement *une idée super astucieuse*) :

$$\begin{aligned}
x^2+x-2 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2 \\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} \\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \left(x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) \quad \text{Identité remarquable} \\
&= (x-1)(x+2)
\end{aligned}$$

Ainsi résoudre l'équation $3x^2+3x-6=0$ reviens à résoudre l'équation $(x-1)(x+2)=0$ qui est une bien gentille équation au produit nul. On vérifie aisément que $\{-2;1\}$ est l'ensemble solution.

Faisons des généralité avec de belles formules : résolvons l'équation $ax^2+bx+c=0$. On supposera que $a \neq 0$ (sinon ce n'est pas un polynôme de degré 2).

Pour commencer on factorise le polynôme par a, ce qui est permit puisque $a \neq 0$:

$$ax^2+bx+c=0 \Longleftrightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

Puisque $a \neq 0$ ce produit de facteur est nul si et seulement si $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. On utilise *une idée super astucieuse* pour observer que $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}$.

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\\
&= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\\
&= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
&= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}
\end{aligned}$$

où on a posé $\Delta=b^2-4ac$

Si $\Delta<0$ alors $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ et $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$. Il est donc impossible de résoudre $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$.

Si $\Delta=0$ alors l'équation deviens $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$. Or ce carré est nul si et seulement si $x+\frac{b}{2a}=0$ soit encore si $x=\frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta>0$**.** On identifie l'expression $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ à l'identité remarquable $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ où $A=\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ et $B=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. Le $\pm$ viens du fait que $\sqrt{a^2}$ vaut a si $a>0$ et $-a$ sinon. Le signe dépend du signe de a. Nous allons traiter le cas où a est positif. Le cas $a \leqslant 0$ se traitant de la même manière (et aboutira aux mêmes solutions). Ainsi $B=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\\
&= \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\
&= \left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi résoudre $ax^2+bx+c=0$ revient à résoudre $\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$. Or ce produit de facteur est nul si et seulement si l'un de ces facteurs est nul ; c'est à dire soit $x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ c'est à dire $x=-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, soit $x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ c'est à dire $x=-\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

En math, rien de magique ou de sorti du chapeau (mais il est vrai que cette science est gorgée d'*idées astucieuses*). Tout se démontre, se prouve. Nous venons là de faire une démonstration d'un théorème. Le "théorème" c'est ce qui résume tout le charabia qu'on viens d'écrire. Connaitre la *démonstration* c'est connaitre le pourquoi du comment, car encore une fois, rien de magique tout est logique. Si certain point vous ont échappé dans cette démonstration, pas d'inquiétude, c'est normal. A la fin de l'année quand vous relirez ces lignes elles seront d'une simplicité écœurante. Pour l'instant ce qu'il faut retenir c'est ce que nous venons de démontrer le théorème suivant.

Théorème 0.0.1

Soient ax^2+bx+c un polynôme réel de degré 2 et Δ son discriminant.

Si $\Delta<0$**.** L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution réel.

$$S=\varnothing$$

Si $\Delta = 0$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

$$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

Si $\Delta > 0$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$:

$$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

On a même démontré un peu plus [1] :

Corollaire 0.0.2

Soient $ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 et Δ son discriminant.

Si $\Delta < 0$. Le polynôme ne se factorise pas en produit de polynôme à coefficient réel.

Si $\Delta = 0$. Le polynôme se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_0\right)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Si $\Delta > 0$. Le polynôme se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Deux petits exemples pour comprendre la mise en pratique.

1. Factorisons, si possible, le polynôme $3x^2 - 9x + 6$. Commençons par calculer son discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4.(3).(6) = 81 - 72 = 9$. Puisque $\Delta > 0$, nous avons deux solutions $x_1 = \dfrac{-(-9) + \sqrt{9}}{2.(3)} = \dfrac{9+3}{6} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-(-9) - \sqrt{9}}{2.(3)} = \dfrac{9-3}{6} = 1$. D'après le corolaire on en déduit que

$$3x^2 - 9x + 6 = 3(x-1)(x-2)$$

ce qui peut se vérifier en développant l'expression de droite.

2. Déterminons toute les solutions de l'équation $x^3 - x = 0$. Nous commençons par observer qu'il est possible de factoriser par x pour avoir $x^3 - x = x(x^2 - 1)$. Factorisons le polynôme de degrés 2 $x^2 - 1$. On a $\Delta = (0)^2 - 4.(1).(-1) = 4$. Nous avons donc, d'après le cours, deux solutions $x_1 = \dfrac{-(0) + \sqrt{4}}{2.(1)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(0) - \sqrt{4}}{2.(1)} = -1$. Ceci permet de conclure que $x^2 - 1 = 1(x-1)(x+1)$ (ce que nous aurions pu obtenir en utilisant une identité remarquable). Finalement l'équation $x^3 - x = 0$ deviens l'équation produit nul $x(x-1)(x+1) = 0$ ce que nous pouvons résoudre rapidement pour conclure que l'ensemble solution de cette équation est $\{-1; 0; 1\}$.

1. Lorsqu'un résultat se déduit d'un théorème on parle d'un *corollaire*