Juin 2019

NOM :
Prénom :
Groupe :

Examen

Mathématiques DAEU - B

- *La calculatrice est autorisée.*
- *Tous documents, téléphones portables, et tout moyen de communication sont prohibés.*
- *Ce document est composé du sujet de l'examen ainsi que du support de réponse.*
- *Il ne s'agit en aucun cas d'une feuille de brouillon.*
- *Vous êtes autorisé à pleurer (en silence).*
- *Assurez-vous de ne pas laisser tomber vos larmes sur la copie.*
- *Position fœtale permise.*
- *L'utilisation du 49.3 ne permet pas de résoudre les problèmes.*
- *Le talent ne vous sauvera pas.*
- *Le port du gilet jaune est autorisé mais vous serez pénalisé si vous incendiez le sujet.*

Exercice 1

45 min

Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 6}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f. 0.5

2. Déterminer les limites suivantes. Aucune justification n'est attendue. 1

   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

   (c) $\lim\limits_{x \to \sqrt{6}^-} f(x) =$

   (d) $\lim\limits_{x \to -\sqrt{6}^+} f(x) =$

3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{24 - 14x^2 + x^4}{(x^2 - 6)^2}$. 1.5

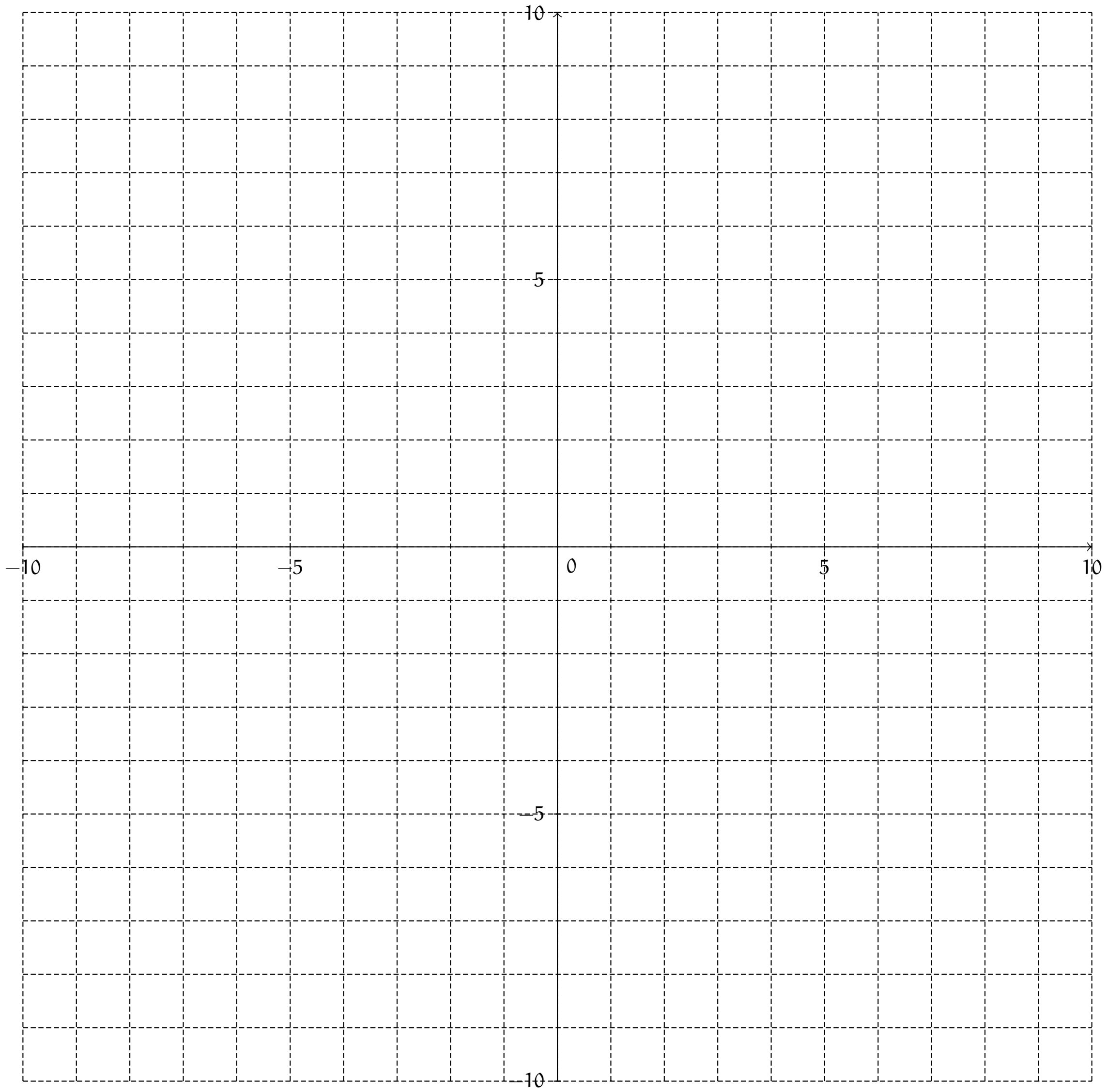
4. Déterminer les solutions du polynôme $24 - 14X + X^2$. 0.5

5. En déduire les variations de f. 1

6. Montrer que la droite $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f. 0.5

7. Calculer $f(\sqrt{2})$ et $f(-\sqrt{12})$. 0.5

8. Dessiner aussi proprement que faire ce peut l'allure de la courbe représentative de la fonction f. 1



Exercice 2

30 min

[Extrait du sujet d'Amérique du Nord - 2016]

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A. 1

2. Justifier que $\mathsf{P}(\mathsf{B} \cap \mathsf{V}) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B. 1

3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
A-t-il raison ? 1

Partie B

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

(a) On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}. 1

(b) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ? 1

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ? 2

Exercice 3 15 min

La sommes de trois nombres entiers consécutifs est 3000. Quel est le plus petit de ce nombre ? 2.5

Exercice 4

45 min

[Extrait du sujet de France Métropolitaine - 2018]

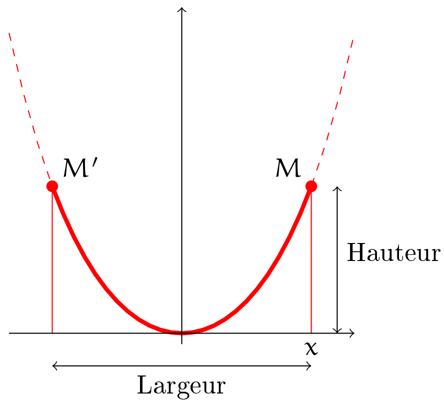
On a représenté ci dessous la courbe d'équation

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 2\right)$$

Cette courbe est appelé "chaînette".

On s'intéresse ici aux "arcs de chaînette" délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Un tel arc est représenté ci-contre en trait plein. On définit la "largeur" et la "hauteur" de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur la graphique.

Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.



1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$(E): \quad e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$$

1

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$.
   (a) Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$. 0.5

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. 0.5

3. (a) Déterminer la fonction f' dérivée de f. 0.5

(b) Montrer que $f'(x) = 0$ si et seulement si $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$. 0.5

(c) En posant $X = e^x$ montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$. Déterminer la valeur exacte de α. 1

4. En déduire le tableau de variation de f. 1

5. En déduire toutes les solutions du problème. 0.5

Exercice 5

30 min

1. Montrer que l'équation $\cos(x) = \frac{1}{4}$ possède une unique solution $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement α à 10^{-2} près. 1

2. Donner la valeur exacte de
   (a) $\sin(\alpha)$ 1

   (b) $\cos(\pi+\alpha)$ 1

   (c) $\sin(2\alpha)$ 1

   (d) $\cos(2\alpha)$ 1

Exercice 6

30 min

[BAC S 2010 - Polynésie]

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X. Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

- à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I ou X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
- on ne tient pas compte des passages par le point O.

Partie A - Un seul robot. Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$. 0.5

2. On note E l'événement : "au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I, X dans cet ordre". Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$. 0.5

3. On note F l'événement : "au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les sommets S, I, X dans un ordre quelconque". Déterminer la probabilité de F. 0.5

Partie B - Plusieurs robots. Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres. Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement "au moins l'un de ces robots passe successivement par les sommets S, I, X dans cet ordre" soit supérieure ou égale à $0,99$? 2

Exercice 7

30 min

[Extrait du sujet d'Amérique du nord - 2018]

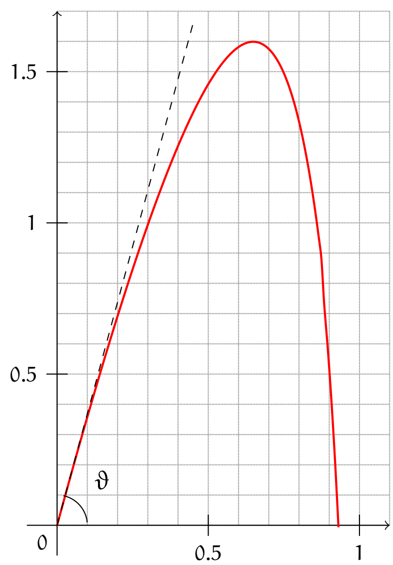
Lors d'une expérience de laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir ϑ, la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètres.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace dans le plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1 - x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égale à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;1[$. On note f' sa dérivée. On admet que la fonction f admet un

maximum sur l'intervalle $[0;1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1[$:

$$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}$$

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$. 2

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre. 2

3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$. L'angle de tir ϑ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus. Donner une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle ϑ. 1

Exercice 8

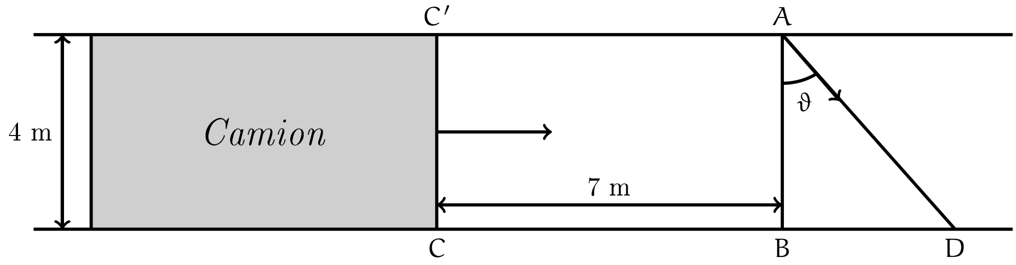
30 min

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire ... 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.

Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repéré par l'angle $\vartheta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leqslant \vartheta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).



1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de ϑ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD. 0.5

2. On pose $f(\vartheta) = \dfrac{7}{2} + 2\tan(\vartheta) - \dfrac{4}{\cos(\vartheta)}$. Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\vartheta) > 0$. 0.5

3. Étude de la fonction $f(\vartheta)$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   (a) Calculer $f(0)$ et $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. 0.5

   (b) Calculer la limite de f en $\dfrac{\pi}{2}^{-}$. 0.5

   (c) Montrer que pour tout $\vartheta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(\vartheta) = \dfrac{2 - 4\sin(\vartheta)}{\cos^2(\vartheta)}$. 0.5

(d) Dresser le tableau de variation de f. 0.5

(e) Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$, tel que $f(\alpha) = 0$. 0.5

(f) Donner le signe de f. 0.5

4. Conclure. 1

Exercice 9 5 min

Comme vous l'aurez remarqué le barème de chaque question et exercice se trouve dans la marge de droite. L'idée ici est de vous auto évaluer en estimant la note sur 40 que vous allez obtenir. Cela permettra d'observer votre capacité à évaluer votre propre travail.
Si la note obtenue et la note estimée ne diffère pas plus de quatre points, vous bénéficierez d'un bonus de 1 point sur votre note. Sinon vous hériterez d'un malus de 1 point.

Note estimée à plus ou moins 4 points : ______ / 40