

NOM :  
Prénom :  
Groupe :

## Examen

### Mathématiques DAEU - B

- *La calculatrice est autorisée.*
- *Tous documents, téléphones portables, et tout moyen de communication sont prohibés.*
- *Ce document est composé du sujet de l'examen ainsi que du support de réponse.*
- *Il ne s'agit en aucun cas d'une feuille de brouillon.*
- *Vous êtes autorisé à pleurer (en silence).*
- *Assurez-vous de ne pas laisser tomber vos larmes sur la copie.*
- *Position fœtale permise.*
- *L'utilisation du 49.3 ne permet pas de résoudre les problèmes.*



**Exercice 1**20  
min

Calculer les limites suivantes. Aucune justification n'est attendu.

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

0.5

4.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x - 2}{x}$

0.5

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{1 - 2x^2}$

0.5

5.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$

0.5

3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$

0.5

6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x}$

0.5

**Exercice 2**20  
min

Associer les formules de dérivation.

9

- |                       |   |                       |
|-----------------------|---|-----------------------|
| $(\ln(e^x + 1))'$     | • | $\frac{1}{2x^2}$      |
| $(\sqrt{x})'$         | • | $\frac{1}{4x + 1}$    |
| $(2x^2 + x + 1)'$     | • | $\frac{1}{2x}$        |
| $(u + v)'$            | • | $\frac{1}{u'v - v'u}$ |
| $(x^9 + x^9 + 18)'$   | • | $\frac{1}{v^2}$       |
| $(-\ln(e^{-x} + 1))'$ | • | $-\frac{1}{x^2}$      |
| $(\ln(\sqrt{x}))'$    | • | $\frac{2x}{2x}$       |
| $(3)'$                | • | $\frac{1}{e^{-x^2}}$  |
| $(e^x)'$              | • | $\frac{1}{3x}$        |
| $(x^{2018})'$         | • | $18x^8$               |
| $(e^{x^2})'$          | • | $e^x$                 |
| $(\frac{u}{v})'$      | • | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $(\frac{1}{-2x})'$    | • | $2018x^{2017}$        |
| $(\ln(\frac{x}{3}))'$ | • | $\frac{1}{x}$         |
| $(e^{\ln(x)})'$       | • | $\frac{1}{1 + e^x}$   |
| $(\frac{1}{x})'$      | • | $u' + v'$             |
| $(uv)'$               | • | $u'v + v'u$           |
| $(\frac{\ln(x)}{3})'$ | • | $\frac{e^x}{e^x + 1}$ |
|                       |   | • 0                   |

**Exercice 3**20  
min

Dans cet exercice vous devez étudier et dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6}$ .

Aucune question intermédiaire pour vous aider si ce n'est que  $y = x + 5$  doit peut-être, être une asymptote oblique.

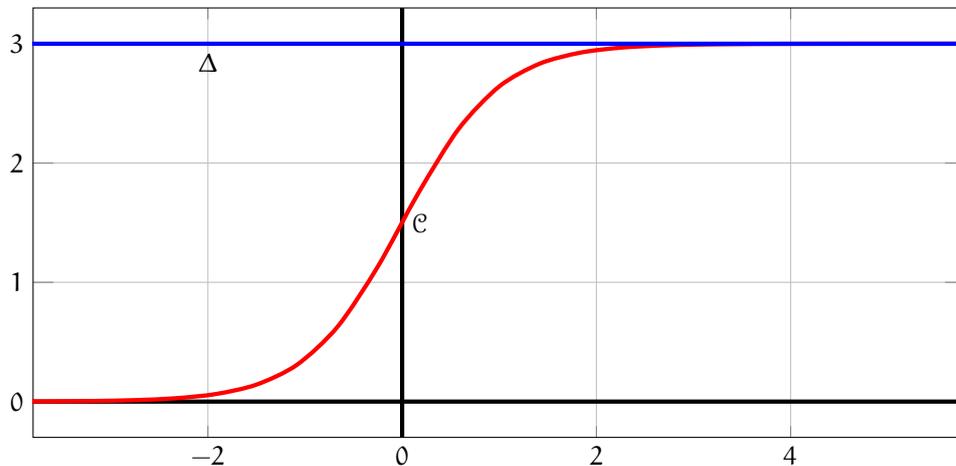
5

Extrait du Bac S de Pondichery 2015

**Partie A.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 3$ .



1. Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2

2. Justifier que la droite  $\Delta$  est une asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$ .

1

3. Démontrer que l'équation  $f(x) = 2.999$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

0.5

**Partie B.** Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = 3 - f(x)$ .

1. Justifier que la fonction  $h$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

0.5

2. On désigne par  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $H(x) = -\frac{3}{2}\ln(1 + e^{-2x})$ . Montrer que  $H' = h$ .

1

3. En déduire une fonction  $F$  tel que  $F' = f$ .

1

### Exercice 5

30  
min

Pour chacune des questions suivantes entourer la bonne réponse (il y a en toujours exactement une).

1.  $(x^{n^m})^p =$

0.5

(a)  $x^{n^{m+p}}$

(b)  $x^{n^{mp}}$

(c)  $x^{pn^m}$

(d)  $x^{np^m}$

2.  $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} =$

0.5

(a) 1

(b)  $\sqrt{2}$

(c) 2

(d) 4

3.  $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

0.5

(a) 0.7

(b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c)  $\frac{2}{\sqrt{2}+2}$

4.  $\ln(2) + \ln(4) =$  0.5
- (a)  $2\ln(2)$                       (b)  $\ln(6)$                       (c)  $\ln(4^2)$                       (d)  $\ln(2^3)$
5.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x =$  0.5
- (a) 0                      (b) 1                      (c)  $+\infty$                       (d)  $-\infty$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{2018}} =$  0.5
- (a) 0                      (b) 1                      (c)  $+\infty$                       (d)  $-\infty$
7. Quand je fais de la purée Mousseline  
(a) je suis sur de ce qu'il y a dedans.

### Exercice 6

45  
min

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction

$$f(x) = \frac{-x^3 + x}{x^2 - 4}$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ . 0.5
2. Calculer les limites de  $f$  au bord de son domaine de définition. 2
3. Montrer que  $f(x) = -x - \frac{3x}{x^2 - 1}$ . 1
4. En déduire que  $y = -x$  est une asymptote oblique à la courbe représentative de  $f$ . Existe-t-il d'autre asymptote? Justifier. 1

5. (a) Calculer  $f'$  la dérivé de  $f$ . 1.5

(b) Factoriser le polynôme  $X^2 - 11X + 4$ . 1

(c) En posant  $X = x^2$  en déduire que

$$f'(x) = - \frac{\left(x - \sqrt{\frac{11 + \sqrt{105}}{2}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{11 + \sqrt{105}}{2}}\right) \left(x - \sqrt{\frac{11 - \sqrt{105}}{2}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{11 - \sqrt{105}}{2}}\right)}{(x^2 - 4)^2}$$

1.5

6. Dresser le tableau de variation de  $f$ . 1

7. Dessiner aussi proprement que possible l'allure de la courbe représentative de  $f$ . On fera apparaitre les tangentes horizontales ainsi que les asymptotes. 2.5

**Exercice 7**15  
min

Résoudre l'inéquation suivante. Justifier toutes les étapes de votre calcul.

$$\ln(x^2 + x) \leq \ln(2x^2 - x - 1) + 1$$

3.5

**Exercice 8**20  
min

1. Considérons la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = xe^{x-2}$ .

(a) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

1.5

(b) Montrer qu'il existe un unique  $\alpha \in ]0; +\infty[$  tel que  $f(\alpha) = 1$ .

1

(c) Donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

0.5

2. Résoudre, en justifiant précisément, l'équation  $\ln(x) + x = 2$

2.5

**Exercice 9**15  
min

Résoudre le problème suivant. Vous détaillerez et justifierez toutes les étapes de votre raisonnement.

3

Martin organise une tombola. Pour cela, il dépense 3400 € pour acheter différents lots, et imprime un grand nombre de billets. S'il fixait le prix du billet à 3 €, il perdrait autant d'argent qu'il n'en gagnerait en le mettant à 5 €. Combien y a-t-il de billets ?

**Exercice 10**5  
min

Comme vous l'aurez remarqué le barème de chaque question et exercice se trouve dans la marge de droite. L'idée ici est de vous auto évaluer en estimant la note sur 50 que vous allez obtenir. Cela permettra d'observer votre capacité à évaluer votre propre travail.

Si la note obtenue et la note estimée ne diffère pas plus de cinq points, vous bénéficierez d'un bonus de 1 point sur votre note. Sinon vous hériterez d'un malus de 1 point.

**Note estimée à plus ou moins 5 points : \_\_\_\_\_ / 50**