Mai 2017

NOM :
Prénom :
Groupe :

Examen

Mathématiques DEAU - B

- *La calculatrice est autorisée.*
- *Tous documents, téléphones portables, et tout moyen de communication sont prohibés.*
- *Ce document est composé du sujet de l'examen ainsi que du support de réponse.*
- *Il ne s'agit en aucun cas d'une feuille de brouillon.*
- *Vous êtes autorisé à pleurer (en silence).*
- *Assurez-vous de ne pas laisser tomber vos larmes sur la copie.*
- *Position fœtale permise.*
- *L'utilisation du 49.3 ne permet pas de résoudre les problèmes.*
- *Melissa métisse d'Ibiza.*

Exercice 1

20 min

Dériver les fonctions suivantes. Justifier brièvement.

1. $f(x) = x^{2017}\ln(x)$ 1.5

2. $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2+1)}$ 1.5

3. $h(x) = \dfrac{\sqrt{e^x + x}}{\ln(x^2+1)}$ 1.5

Exercice 2

20 min

Pour chacune des questions entourer la ou les bonnes réponses.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un face en lancer une pièce de monnaie parfaitement équilibrée trois fois de suite ? 0.5

   (a) $\dfrac{3}{8}$ (b) $\dfrac{7}{8}$ (c) $\dfrac{4}{8}$

2. Quelle formule est correcte. 0.5

   (a) $P_B(A) = \dfrac{P(A \cup B)}{P(B)}$ (b) $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (c) $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

3. On découpe un disque en 7 parts, comme une pizza, et on colorie chaque part avec 6 couleurs différentes. Combien y a-t-il de coloriage différent possible ? 0.5

   (a) 7^6 (b) 7×6 (c) 6^7

4. Quel est la probabilité que deux nombres tirés au hasard soient premiers entre eux ? 0.5

   (a) $\dfrac{6}{\pi^2}$ (b) π (c) $\dfrac{\pi^2}{6}$

5. Une urne contient 18 boules : 8 blanches et 10 noires. On effectue un tirage simultané de 5 boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ? 0.5

   (a) $1 - \frac{C_8^5}{C_{18}^5}$ (b) $1 - \frac{A_8^5}{A_{18}^5}$ (c) $1 - \frac{8^5}{18^5}$

6. La porte de chez moi s'ouvre avec un code à 4 chiffres. Les chiffres sont entre 0 et 5. Il n'y a pas deux fois le même chiffre mais l'ordre compte. Combien de combinaison sont possibles ? 0.5

   (a) 6^4 (b) C_6^4 (c) $6 \times 5 \times 4 \times 3$

Exercice 3

45 min

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1. Donner le domaine de définition f. 0.5

2. Calculer les limites suivantes. Aucune justification n'est attendue. 2

   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ (c) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ (d) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

3. En déduire l'existence d'asymptotes. 0.5

4. Calculer f' la dérivé de f. 1

5. En déduire les variations de f. 1

6. Montrer que l'équation $f(x) = \pi$ admet une unique solution α dont on déterminera un encadrement à 10^{-3}. 0.5

7. Calculer la valeur exacte de α. 1

8. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f. 0.5

Exercice 4

45 min

[Extrait du sujet d'Amérique du Nord - 2016]

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A. 1

2. Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B. 1

3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
   A-t-il raison ? Justifier. 0.5

Partie B

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
   (a) On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}. 1

   (b) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ? 0.5

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ? 1.5

Exercice 5 30 min

[Extrait du sujet de Guyane - 2014]

On considère l'équation

$$(E_1) : \qquad e^x - x^n = 0$$

où x est un nombre réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation

$$(E_2) : \qquad \ln(x) - \frac{x}{n} = 0$$

0.5

2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ? 2

Exercice 6

75 min

[Extrait du sujet d'Asie - 2013]

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

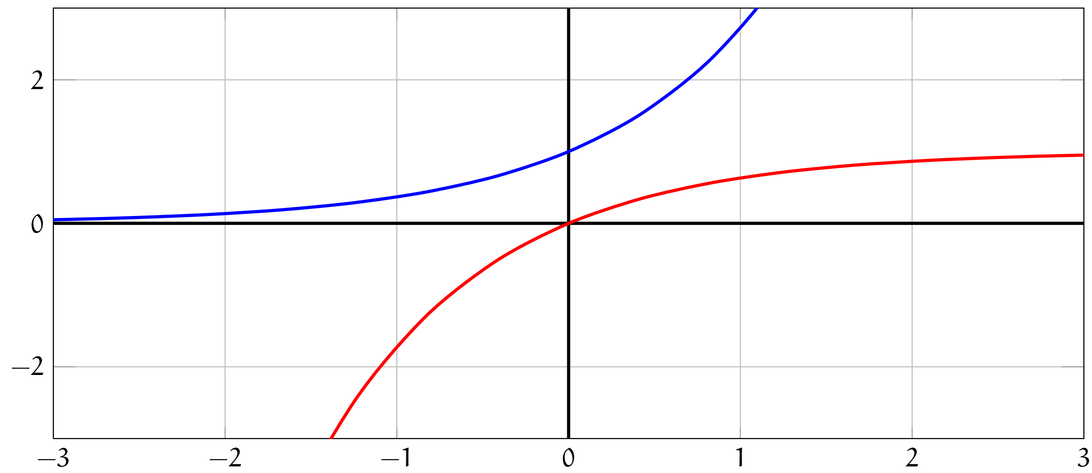
$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - e^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan sont notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure suivante.

0.5



Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. (a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A. 0.5

   (b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B. 0.5

   (c) En déduire que $b = -a$. 0.5

2. Démontrer que le réel α est solution de l'équation

$$2(x-1)e^x + 1 = 0.$$

0.5

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1.$$

1. (a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$. 1

   (b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe. 1

   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$. 1

2. (a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$. 0.5

(b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation. A l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième. 0.5

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E. 0.5

2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F. 0.5

Exercice 7 ∞ min

Résoudre l'équation suivante

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 2$$

Exercice 8 5 min

Comme vous l'aurez remarqué le barème de chaque question et exercice se trouve dans la marge de droite. L'idée ici est de vous auto évaluer en estimant la note sur 30 que vous allez obtenir. Cela permettra d'observer votre capacité à évaluer votre propre travail.

Si la note obtenue et la note estimée ne diffère pas plus de trois points, vous bénéficierez d'un bonus de 1 point sur votre note. Sinon vous hériterez d'un malus de 1 point.

Note estimée à plus ou moins 3 points : ______ / 30