

NOM :
Prénom :
Groupe :

Examen

Mathématiques DEAU - B

- *La calculatrice est autorisée.*
- *Tous documents, téléphones portables, et tout moyen de communication sont prohibés.*
- *Ce document est composé du sujet de l'examen ainsi que du support de réponse.*
- *Il ne s'agit en aucun cas d'une feuille de brouillon.*
- *Vous êtes autorisé à pleurer (en silence).*
- *Assurez-vous de ne pas laisser tomber vos larmes sur la copie.*
- *Position fœtale permise.*
- *L'utilisation du 49.3 ne permet pas de résoudre les problèmes.*
- *Melissa métisse d'Ibiza.*

Exercice 120
min

Calculer les limites suivantes. Justifier (très) brièvement.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 0.5

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ 0.5

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x}$ 0.5

4. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x - 2}{x}$ 0.5

5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 0.5

Exercice 220
min

Calculer la dérivée des fonctions suivantes. Détailler les calculs.

1. $a(x) = \sqrt{x}$ 1

2. $b(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ 1

3. $c(x) = (x^2 - 1)^{2017} \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ 1

4. $d(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$ 1

Exercice 330
min.

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + x - 1}$$

1. Étude du domaine de définition.

(a) Résoudre l'équation $2x^2 + x - 1 = 0$

0.5

(b) En déduire le domaine de définition.

0.5

2. Étude de limite. Aucune justification n'est attendue.

1

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$

3. En déduire l'existence d'éventuelle asymptote.

0.5

4. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2(2x^2 + 2x - 3)}{(2x^2 + x - 1)^2}$.

1

5. (a) Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{3x - 1}{4(2x^2 + x - 1)}$.

0.5

(b) En déduire que $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f .

0.5

6. (a) Calculer $f(1)$ et $f'(1)$. 0.5

(b) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f et $a = 1$. 0.5

7. Dresser le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f . 1

8. Donner l'allure de la courbe représentative de f . 1

Exercice 4

15
min

En me rendant à la boulangerie, j'achète des croissants et des pains au chocolats. Trois croissants et deux pains au chocolats me coûtent sept euros. C'est le même prix si je n'achète qu'un croissant mais trois pains au chocolats. Déterminer le prix d'un croissant et le prix d'un pain au chocolat. Détailler les étapes de vos calculs.

3

Exercice 5

15
min

1. Montrer que $X^5 + 1 = (X + 1)(X^4 - X^3 + X^2 - X + 1)$.

1

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{15} + 1}{x^3 + 1}$. On pourra poser $X = x^3$.

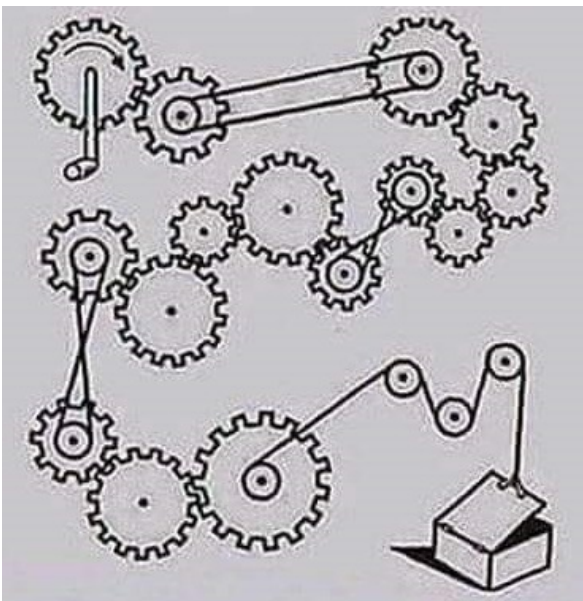
2

Exercice 6

5
min

La boîte va-t-elle s'ouvrir ou se fermer ?

2



Dans cet exercice on s'intéresse à l'étude de la fonction suivante.

$$f(x) = \frac{x}{x^3 - x - 1}$$

Partie A - Domaine de définition. Considérons la fonction $P(x) = x^3 - x - 1$ définie sur \mathbb{R} .

1. (a) Calculer la valeur exacte de $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Donner également sa valeur approchée à 10^{-2} près. 0.5

(b) Calculer la valeur exacte de $P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Donner également sa valeur approchée à 10^{-2} près. 0.5

2. Calculer P' la dérivé de P . 0.5

3. Dresser le tableau de variation de P . 1

4. En déduire que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement à 10^{-3} . 1

5. En déduire le domaine de définition de f . 0.5

Partie B - Étude de f.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{-2x^3 - 1}{(x^3 - x - 1)^2}$.

|

2. On admettra que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution notée $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ dont la valeur approchée est -0.7937 . Dresser le tableau de variation de f.

|

3. Dessiner aussi proprement que faire se peut, le schéma de la courbe représentative de f.

|

Exercice 8

20
min

Calculer la dérivée de la fonction suivante. On ne s'intéressera pas au domaine de définition. On prendra soin de rédiger proprement la solution.

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^3 - 1)}$$

2

Exercice 9

20
min

J'ai 1000 euros sur un compte mais la crise frappe. Chaque minute, je perd 1% de mon capital. Au bout de combien de temps j'aurais perdu la moitié de mon argent ?

Cet exercice peut se résoudre à l'aide de la fonction logarithme. Pour arriver à la solution, vous pouvez commencer par calculer le capital au bout d'une minute, de deux, de dix etc.

3

Exercice 10

30
min

Problème de Nicolas Chuquet.

Des frères se partagent un héritage. Le premier prend 1000 euros et 10% du reste. Le second prend 2000 euros et 10% du nouveau reste. Le troisième prend 3000 euros et 10% du nouveau reste et ainsi de suite jusqu'au dernier. Ils ont alors chacun la même part.

A combien se monte l'héritage et combien y a-t-il de frères?

3

Exercice 1120
min

Résoudre l'équation suivante en précisant le domaine.

$$\ln(x^2) \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

4

Exercice 12 ∞
min

Soient A, B et C trois nombres. On sait que $A + B + C = 1$ et que $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = 0$. Que vaut $A^2 + B^2 + C^2$. Justifier.

Exercice 135
min

Comme vous l'aurez remarqué le barème de chaque question et exercice se trouve dans la marge de droite. L'idée ici est de vous auto évaluer en estimant la note sur 40 que vous allez obtenir. Cela permettra d'observer votre capacité à évaluer votre propre travail.

Si la note obtenue et la note estimée ne diffère pas plus de quatre points, vous bénéficierez d'un bonus de 1 point sur votre note. Sinon vous hériterez d'un malus de 1 point.

Note estimée à plus ou moins 4 points : _____ / 40