

NOM :  
Prénom :  
Groupe :

## Examen

### Mathématiques

- *La calculatrice n'est pas autorisée.*
- *Documents et tout moyen de communication sont prohibés.*
- *Ce document est composé du sujet de l'examen ainsi que du support de réponse.*
- *Il ne s'agit en aucun cas d'une feuille de brouillon.*
- *Vous êtes autorisé à pleurer (en silence).*
- *Assurez-vous de ne pas laisser tomber vos larmes sur la copie.*
- *Position fœtale permise.*



### Exercice 1

5  
min

Questions de cours.

1. Donner un exemple de polynôme unitaire. 0.5
2. Dessiner une hyperbole. 0.5
3. En physique, que représente la dérivée? 0.5

### Exercice 2

15  
min

Résoudre.

1.  $3x - 8 + 4 - x = 10x - 7 + 5 + 2x + 3$  1
2.  $x^2 - 1 = 0$  1
3.  $(x - 1)(5x - 2) - (3x + 1)(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$  1
4.  $3x^2 - 4x + 2 = 0$  1

**Exercice 3**5  
min  
2

Donner l'équation de la droite passant par les points A(1;1) et B(4;7).

**Exercice 4**15  
min

Résoudre

$$\frac{(2x - 2)(x^2 - 3x + 2)}{x(3x + 9)} \geq 0$$

2.5

**Exercice 5**15  
min

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5}$

0.5

2.  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{5-x}$

0.5

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{5-x}$

0.5

**Exercice 6**10  
min

Calculer les dérivés des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

0.5

2.  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 1}$

1

3.  $h(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+3}}$

1

**Exercice 7**10  
min

Calculer la valeur exacte de

$$x = \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{1998}\right) \left(1 + \frac{1}{1999}\right) \left(1 + \frac{1}{2000}\right)$$

2

**Exercice 8**10  
min

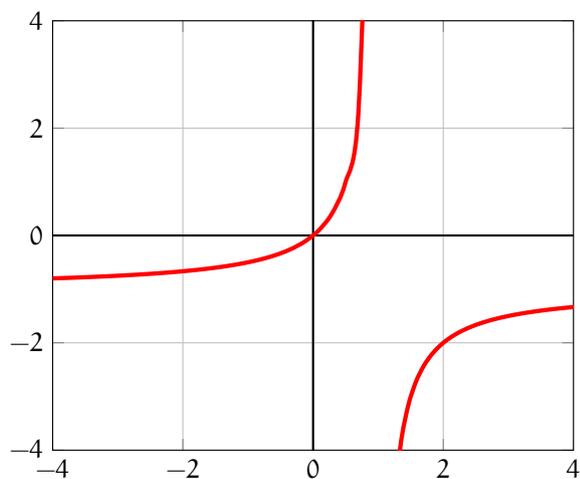
Calculer le nombre suivant.

$$x = 2016^2 - 2015^2$$

2

**Exercice 9**5  
min

Voici la représentation graphique d'une hyperbole.



Par lecture graphique :

1. Donner l'image de 0.

0.5

2. Donner les antécédents éventuels de -2.

0.5

3. Donner les équations des asymptotes que vous repérez.

1

### Exercice 10

15  
min

En ajoutant le même nombre au numérateur et dénominateur de  $\frac{15}{-7}$  on obtient 2. Quel est ce nombre?  
Justifier.

1.5

### Exercice 11

15  
min

Galois est en spectacle.

Deux types de billets sont en ventes. Les billets A qui permettent d'assister au spectacle en silence et les billets B qui permettent d'assister au spectacle mais également de poser des équations a Galois. Si vous achetez 3 billets A et 4 billets B vous en aurez pour 98 francs. Cela vous coutera 112 francs pour 1 billet A et 6 billets B.

Quel est le prix d'un billet A et d'un billet B? Justifier toutes les étapes.

2

**Exercice 12**10  
min

Le but de ce problème est de donner la valeur exacte de

$$A = \sqrt{15 + 2\sqrt{15 + 2\sqrt{15 + 2\sqrt{15 + 2\sqrt{15 + 2\sqrt{15 + 2\sqrt{15 + 2\sqrt{\dots}}}}}}}}$$

1. Résoudre l'équation  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .

1

2. Prouver que  $A^2 = 15 + 2A$ .

0.5

3. En déduire la valeur exacte de  $A$ .

0.5

**Exercice 13**15  
min

Le but de ce problème est de donner la valeur exacte de

$$A = \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{\dots}}}}}}}}} \quad B = \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{\dots}}}}}}}}$$

1. Résoudre l'équation  $x^2 - x - 6 = 0$ .

1

2. Prouver que  $A^2 = 7 + B$  et  $B^2 = 7 - A$ .

0.5

3. Prouver que  $A$  est une solution de  $x^2 - x - 6 = 0$ .

1

4. En déduire la valeur exacte de A et de B.

0.5

### Exercice 14

30  
min

Le prof de math pose une équation au tableau :

$$x^2 + bx + c = 0$$

- Bilal note cette équation mais se trompe de **b** en recopiant. Avec cette erreur, il trouve 6 et 1 comme solutions.
- Monique note cette équation et se trompe également en recopiant mais c'est le **c** qui est incorrect. Avec cette erreur elle trouve que  $-4$  et  $-1$  sont solutions.

Le but du problème est de retrouver le polynôme écrit au tableau par le prof.

**PARTIE I.** On va interpréter les informations de Bilal. Puisqu'il s'est trompé en recopiant le **b**, on va noter **b'** le "mauvais **b**" qu'il a noté. Il avait donc l'équation  $x^2 + b'x + c = 0$

1. Expliquer pourquoi on a 
$$\begin{cases} 36 + 6b' + c = 0 \\ 1 + b' + c = 0 \end{cases}$$

0.5

2. Résoudre le système précédent par la méthode de votre choix.

1

3. Que vaut **c** ?

0.5

**Partie II.** On raisonne de manière similaire avec les informations de Monique. On note  $x^2 + bx + c' = 0$  l'équation qu'elle a notée.

1. Donner le système d'équation qui traduit que  $-4$  et  $-1$  sont solutions de l'équation de Monique. 0.5

2. Résoudre le système précédent par la méthode d Gauss (combinaison). 1

3. Que vaut  $b$ ? 0.5

**Conclusion.** 1. Quelle était l'équation noté par le prof (sans erreur)? 0.5

2. Résoudre cette équation. 1

**Exercice 15**15  
min

On considère la fonction  $f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$ .

1. Donner le domaine de définition de  $f$ .

1

2. Calculer l'image de  $\sqrt{2}$  par  $f$ . On simplifiera le résultat.

0.5

3. Déterminer le(s) antécédent(s) éventuelle(s) de 1.

1

4. Calculer les limites de  $f(x)$  aux bord de son ensemble de définition.

2

5. Existe-t-il des asymptotes horizontales ou verticales? Justifier.

0.5

6. Prouver que pour tout  $x$  dans le domaine de définition  $f'(x) = -\frac{x^2 + 2}{(x^2 + x - 2)^2}$

1

7. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

1

### Exercice 16

∞  
min

Marie et Anne sont deux sœurs. La somme de leurs âges est égale à 44. Marie a deux fois l'âge qu'Anne avait lorsque Marie avait la moitié de l'âge qu'aura Anne lorsqu'elle aura le triple de l'âge qu'avait Marie à l'époque où elle était trois fois plus âgée qu'Anne.

Quel est l'âge de Marie ?

5