NOM :
PRENOM :
GROUPE :

Partiel
DEAU - B

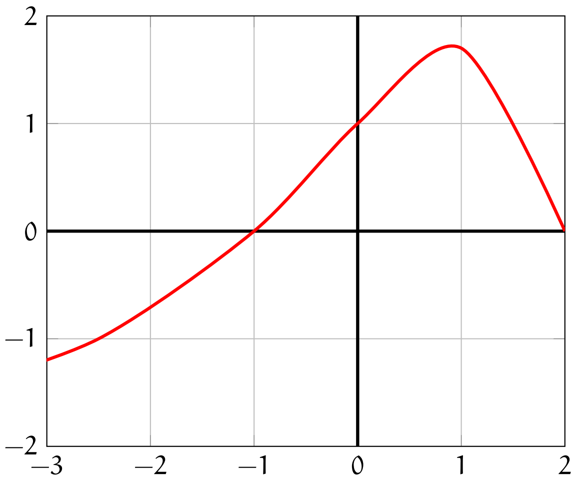
Mars 2015

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1

30 min

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère une fonction f dérivable sur $[-3;2]$ dont on sait que $f(0) = -1$ et dont la dérivé f' de la fonction f admet la courbe représentative suivante



Pour chacune des questions suivantes dire si elle est vrai ou fausse et justifier la réponse.

1. $\forall x \in [-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$. 1

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1, 2]$. 1

3. $\forall x \in [-3; 2]$, $f(x) \geqslant -1$. 1

4. La tangente en 0 à la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(1; 0)$. 1

Exercice 2

45 min

Extrait du sujet du baccalauréat Scientifique 2014 - Antilles Guyane.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 &= 2, \\ u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times (0.5)^n \end{cases}$$

1. (a) Compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près : 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n									

(b) D'après ce tableau, que pouvez-vous dire du sens de variation de la suite ? 0.5

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. 2

3. On admettra que la suite (u_n) est convergente. Nous allons déterminer sa limite. Pour cela, on considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la relation

$$v_n = u_n - 10 \times (0.5)^n$$

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme. 1.5

(b) En déduire une expression de v_n en fonction de n. 0.5

(c) En déduire une expression de u_n en fonction de n. 0.5

(d) Donner la limite de la suite (v_n). 1

(e) En déduire la limite de la suite (u_n). 0.5

Exercice 3

50 min

Première partie. On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 12x - 18$.

1. Prouver que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3(x^2 - 4)$. 1

2. Dresser le tableau de signe de g'. En déduire le tableau de variation de g. 1

3. Expliquer pourquoi il existe $\alpha \in [2;5]$ tel que $g(\alpha) = 0$. 0.5

4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approché de α à 10^{-1} près. 0.5

5. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x. Le résultat dépendra de α. 1

Deuxième partie. On considère la fonction définie pour tout réels x non nul $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x + 9}{x^2}$.

1. Déterminer les limites suivantes (on justifiera brièvement les réponses) :
   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 0.5

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 0.5

   (c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ 0.5

   (d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 0.5

2. Existe-t-il des asymptotes verticales ou horizontales ? Justifier. 0.5

3. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$. 1

4. En déduire le signe de f' (on pourra se servir de la première partie et utiliser α) et les variations de f (on dressera le tableau de variation). 1

5. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x - 6 + \dfrac{12x + 9}{x^2}$. 0.5

6. En déduire que la droite $y = x + 6$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ et $-\infty$. 0.5

7. Donner l'équation de la tangente à la fonction f en 2. 0.5

8. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On fera apparaitre les asymptotes ainsi que la tangente en 2. 1

Exercice 4

45 min

Extrait du sujet du baccalauréat Scientifique 2013 - France métropolitaine.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 2, \\ u_{n+1} &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra donner les valeurs approchées à 10^{-2} près. 1

   (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite. 0.5

2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leqslant n + 3$$

2

(b) Démonter que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

(c) En déduire une validation de la conjecture précédente. 0.5

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$. 1

   (b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

0.5

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n). 0.5

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \qquad \text{et} \qquad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

(a) Exprimer S_n en fonction de n. 1

(b) Déterminer la limite de la suite (T_n). 1

Exercice 5

10 min

En Papouasie, il y a des *papous* et des *pas-papous*. Parmi les *papous* il y a des *papas papous* et des *papous pas papa*. Mais il y a aussi des *papas pas papous* et des *pas papous pas papas*.

De plus, il y a des *papous pas papas à poux* et des *papas pas papous à poux*. Mais il n'y a pas de *papas papous à poux* ni de *pas papous pas papas à poux*.

Sachant qu'il y a 240 000 poux (en moyenne 10 par tête), et qu'il y a 2 fois plus de *pas papous à poux* que de *papous à poux*, déterminer le nombre de *papous pas papas à poux* et en déduire le nombre de *papas pas papous à poux*. 3