NOM :
PRENOM :
GROUPE :

Juin 2018

Contrôle 5
ROAD

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

Le secret de la correction des copies
Version facile

Pour rappel : la moyenne entre des notes est la somme des notes divisées par le nombre de notes.

Dans une classe, il y a trois étudiants. Le meilleur, le mauvais et le chouchou. Lors d'un contrôle le prof attribue à ces étudiants des notes en respectant les règles suivantes :

1. Les notes sont des nombres réels entre 0 et 20.
2. Le meilleur étudiant a entre 10 et 14 sur 20.
3. Le pire étudiant a au moins 4 mais pas plus de 12.
4. Le chouchou a une note supérieur à la moyenne de la classe plus 1.

Quelle est la note obtenue par le chouchou sachant que les notes attribuées aboutissent à la pire moyenne de classe ?

Correction

Soit x_1, x_2 et x_3 les notes sur 20 des étudiants respectivement le meilleur, le chouchou et le pire. Les contraintes se traduisent par les règles suivantes :

1. $0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 20$
2. $10 \leqslant x_1 \leqslant 14$
3. $4 \leqslant x_3 \leqslant 12$
4. $x_2 \geqslant \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + 1$

La dernière contraintes donne, en multipliant par trois et en manipulant les termes, $-x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 3$. Au final le problème linéaire associé à ce problème est :

$$\begin{cases}
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & & & & \leqslant & 14 \\
x_1 & & & & & \geqslant & 10 \\
 & & & & x_3 & \leqslant & 12 \\
 & & & & x_3 & \geqslant & 4 \\
 & & x_2 & & & \leqslant & 20 \\
-x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geqslant & 3 \\
 & & & & & & \mathrm{Min}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)
\end{array}
\end{cases}$$

On applique l'algorithme des deux phases :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	a_1	e_3	e_4	a_2	e_5	e_6	a_3	
e_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	14
a_1	1	0	0	0	−1	1	0	0	0	0	0	0	10
e_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	12
a_2	0	0	1	0	0	0	0	−1	1	0	0	0	4
e_5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	20
a_3	−1	2	−1	0	0	0	0	0	0	0	−1	1	3
Max	0	0	0	0	0	−1	0	0	−1	0	0	−1	0

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	a_1	e_3	e_4	a_2	e_5	e_6	a_3	
e_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	14
a_1	1	0	0	0	−1	1	0	0	0	0	0	0	10
e_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	12
a_2	0	0	1	0	0	0	0	−1	1	0	0	0	4
e_5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	20
a_3	−1	$\boxed{2}$	−1	0	0	0	0	0	0	0	−1	1	3
Max	0	2	0	0	−1	0	0	−1	0	0	−1	0	17

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	a_1	e_3	e_4	a_2	e_5	e_6	a_3	
e_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	14
a_1	$\boxed{1}$	0	0	0	−1	1	0	0	0	0	0	0	10
e_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	12
a_2	0	0	1	0	0	0	0	−1	1	0	0	0	4
e_5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{37}{2}$
x_2	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
Max	1	0	1	0	−1	0	0	−1	0	0	0	−1	14

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	a_1	e_3	e_4	a_2	e_5	e_6	a_3	
e_1	0	0	0	1	1	−1	0	0	0	0	0	0	4
x_1	1	0	0	0	−1	1	0	0	0	0	0	0	10
e_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	12
a_2	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	−1	1	0	0	0	4
e_5	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{27}{2}$
x_2	0	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$
Max	0	0	1	0	0	−1	0	−1	0	0	0	−1	4

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	a_1	e_3	e_4	a_2	e_5	e_6	a_3	
e_1	0	0	0	1	1	−1	0	0	0	0	0	0	4
x_1	1	0	0	0	−1	1	0	0	0	0	0	0	10
e_3	0	0	0	0	0	0	1	1	−1	0	0	0	8
x_3	0	0	1	0	0	0	0	−1	1	0	0	0	4
e_5	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{23}{2}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{2}$
Max	0	0	0	0	0	−1	0	0	−1	0	0	−1	0

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	
e_1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	4
x_1	1	0	0	0	−1	0	0	0	0	10
e_3	0	0	0	0	0	1	1	0	0	8
x_3	0	0	1	0	0	0	−1	0	0	4
e_5	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{23}{2}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{17}{2}$
Max	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	0	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	
e_1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	4
x_1	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	10
e_3	0	0	0	0	0	1	1	0	0	8
x_3	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	4
e_5	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{23}{2}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{17}{2}$
Max	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	0	0	0	0	0

Ainsi le problème linéaire a pour solution $(x_1, x_2, x_3) = (10, 8.5, 4)$. Avec la pire moyenne de classe, le chouchou aura 8.5/20.