

*La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.*

---

**Le secret de la correction des copies**

---

*Pour rappel : la moyenne entre des notes est la somme des notes divisées par le nombre de notes.*

En enseignant responsable, comme cela m'a été appris lors de ma formation, je ne corrige pas les copies aux mérites des résultats et des raisonnements mais par un tirage a peu près aléatoire des notes (en fonction de la tête des étudiants bien évidemment). Mais je respecte quelques règles (*genre*) :

1. Ce sont des notes sur 20, donc chacune d'elles ne peut pas excéder 20 (et sont positives ou nulles).
2. Je veux que le premier étudiant, le meilleur, n'ai pas plus de 14/20.
3. Je veux que le deuxième étudiant, qui est le plus mauvais, ai au moins 4/20.
4. Je veux une moyenne de exactement 10/20 lorsque je la calcule sans l'étudiant le plus mauvais.
5. La moyenne entre le meilleur et le pire étudiant doit être supérieur où égale à la moyenne des deux autres plus 1.
6. Mon chouchou, le troisième étudiant, doit avoir au moins 12/20.

**Quelles notes dois-je attribuer pour respecter mes contraintes et avoir la pire moyenne possible.**

**Correction**

Notons  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  les notes sur 20 des quatre étudiants dans cette ordre. Les conditions de l'énoncé se traduisent par :

1.  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$  et  $x_1 \leq 20, x_2 \leq 20, x_3 \leq 20, x_4 \leq 20$ .
2.  $x_1 \leq 14$
3.  $x_2 \geq 4$
4.  $\frac{x_1 + x_3 + x_4}{3} = 10$
5.  $\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \frac{x_3 + x_4}{2} + 1$
6.  $x_3 \geq 12$

La condition  $x_1 \leq 20$  est absorbée par  $x_1 \leq 14$ . Pour se priver de manipuler (trop) des fractions, la condition 4 deviens  $x_1 + x_3 + x_4 = 30$  et la condition 5 deviens  $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leq 2$ .

La moyenne de ces 4 étudiants est  $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ . Puisqu'on cherche la pire moyenne il faut le minimum de cette quantité. Sachant que  $\min\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) = -\max\left(-\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)$ , le problème linéaire est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & & \leq 14 \\ & x_2 & \leq 20 \\ & & x_3 & \leq 20 \\ & & & x_4 & \leq 20 \\ & x_2 & & & \geq 4 \\ x_1 + & & x_3 + x_4 & = & 30 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & \geq & 2 \\ & & x_3 & \geq & 12 \end{array} \right.$$

On résout ce problème par la méthode des deux phases.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$a_1$	$a_2$	$e_6$	$a_3$	$e_7$	$a_4$	
$e_1$	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14
$e_2$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
$e_3$	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	20
$e_4$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	20
$a_1$	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	4
$a_2$	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	30
$a_3$	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	2
$a_4$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	12
Max	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	-1	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$a_1$	$a_2$	$e_6$	$a_3$	$e_7$	$a_4$	
$e_1$	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14
$e_2$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
$e_3$	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	20
$e_4$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	20
$a_1$	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	4
$a_2$	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	30
$a_3$	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	2
$a_4$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	12
Max	2	2	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	0	48

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$a_1$	$a_2$	$e_6$	$a_3$	$e_7$	$a_4$	
$e_1$	0	-1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	12
$e_2$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
$e_3$	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	20
$e_4$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	20
$a_1$	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	4
$a_2$	0	-1	2	2	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	28
$x_1$	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	2
$a_4$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	12
Max	0	0	3	2	0	0	0	0	-1	0	0	1	-2	-1	0	44

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$a_1$	$a_2$	$e_6$	$a_3$	$e_7$	$a_4$	
$e_1$	0	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	0
$e_2$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
$e_3$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	8
$e_4$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	20
$a_1$	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	4
$a_2$	0	-1	0	2	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	2	-2	4
$x_1$	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	1	14
$x_3$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	12
Max	0	0	0	2	0	0	0	0	-1	0	0	1	-2	2	-3	8



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	
$x_4$	0	0	0	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	4
$e_2$	0	0	0	0	0	1	0	0	$\boxed{1}$	0	0	16
$e_3$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	8
$e_4$	0	0	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	16
$e_1$	0	0	0	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$x_2$	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	4
$x_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	14
$x_3$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	12
Max	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{17}{2}$

  

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	
$x_4$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	12
$e_5$	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	16
$e_3$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	8
$e_4$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	-1	8
$e_1$	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	8
$x_2$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	20
$x_1$	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	6
$x_3$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	12
Max	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	$-\frac{25}{2}$

**Conclusion :** La solution du système est  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 20$ ,  $x_3 = 12$  et  $x_4 = 12$  pour une moyenne de  $12,5/20$