Coloration des graphes

Travaux Pratiques

Nous avons observé à l'exercice 6 de la feuille de cours-TD que si on trouve une 2-coloration de $\mathcal{K}_n$ sans aucun sous graphe monochromatique de la forme $\mathcal{K}_a$ ou $\mathcal{K}_b$ alors $R(a, b) > n$.

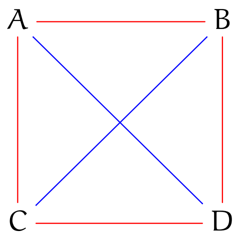
Dans la pratique une telle recherche se fait par ordinateur. Le but de ce TP est d'écrire un programme en `Python` analysant toutes les 2-colorations de $\mathcal{K}_n$ et indiquant s'il existe un $\mathcal{K}_a$ ou $\mathcal{K}_b$ monochromatique.

Vous pourrez tester votre programme sachant que $R(3, 3) = 6$, $R(4, 3) = 9$, $R(5, 3) = 14$, $R(3, 6) = R(4, 4) = 18$ et $R(4, 5) = 25$.

Vous pouvez vous lancer dans ce problème comme il vous plait. Voici quelques éléments vous permettant d'aboutir à une solution.

Dans cet exercice, on ne s'intéresse qu'à des cliques dont la matrice n'est composée que de 1 sauf sur la diagonale. On ne s'intéresse de plus qu'à des 2-colorations. On peut donc représenter une 2-coloration par une matrice, dont on ne s'intéresse qu'à la partie au dessus de la diagonale (grâce à la symétrie), avec des 1 et des 2 pour représenter les couleurs.

Par exemple, la 2-coloration



est représenté par la matrice

	A	B	C	D
A	X	1	1	2
B	X	X	2	1
C	X	X	X	1
D	X	X	X	X

Étant donnée un entier n il faut générer toutes les 2-coloration possible. Le graphe $\mathcal{K}_n$ a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes. On peut montrer qu'il y a $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 2-colorations différentes. En jouant sur d'éventuelle symétrie on peut diminuer ce nombre, jusqu'à le diviser par 2 ; voir en annexe l'exemple des 64 2-coloration de $\mathcal{K}_4$, permettant de comprendre les éventuelles simplifications qui peuvent intervenir.

Il suffit de ne s'intéresser qu'aux arêtes (puisque nous ne traitons que des cliques). On associe donc à chaque arête de la clique $\mathcal{K}_n$ un étiquette qui prendra la forme la plus simple : un entier entre 0 et $\dfrac{n(n-1)}{2} - 1$. Une 2-coloration est alors un simple tableau remplis de 1 et de 2[1].

Nous avons signalé en cours, que la valeur exacte de $R(4, 6)$ n'est toujours pas connu. On sait simplement qu'il est compris entre 36 et 41. Vous pourrez essayer de d'utiliser votre programme pour raffiner cette valeur, mais avant cela il serait intelligent d'étudier le temps d'exécution de votre code.

1. On pourrait même prendre la couleur `"rouge"` et `"bleu"` mais les chaines de caractère ont un temps de traitement informatique plus long. On pourrait d'ailleurs remplacer 1 et 2 par 0 et 1 voir même `True` et `False` dont le temps de traitement est beaucoup plus léger ; à votre guise.

Voici une idée des fonctions qui pourront vous aider.

`TousLesSousEns(n,p)`

Cette fonction prend en paramètre un entier n et un entier p et va renvoyer tous les sous-ensemble à p éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Par exemple `TousLesSousEns(4,2)` reverra le tableau où les lignes sont `[1 2]`, `[1 3]`, `[1 4]`, `[2 3]`, `[2 4]` et `[3 4]`. Cette fonction sera astucieusement programmé de manière récursive.

`DeuxColoration(n)`

Cette fonction prend en paramètre un entier n et renvoie la liste de toutes les 2-coloration de $\mathcal{K}_n$. On peut utiliser la fonction précédente. Les 2-coloration de $\mathcal{K}_5$ avec 3 arêtes de couleur 1 et les 7 autre de couleur 2 correspondent aux sous-ensembles `TousLesSousEns(n*(n-1)/2,3)` (c'est un ensemble qui peut être vu comme l'ensemble des indices des arêtes de couleur 1).

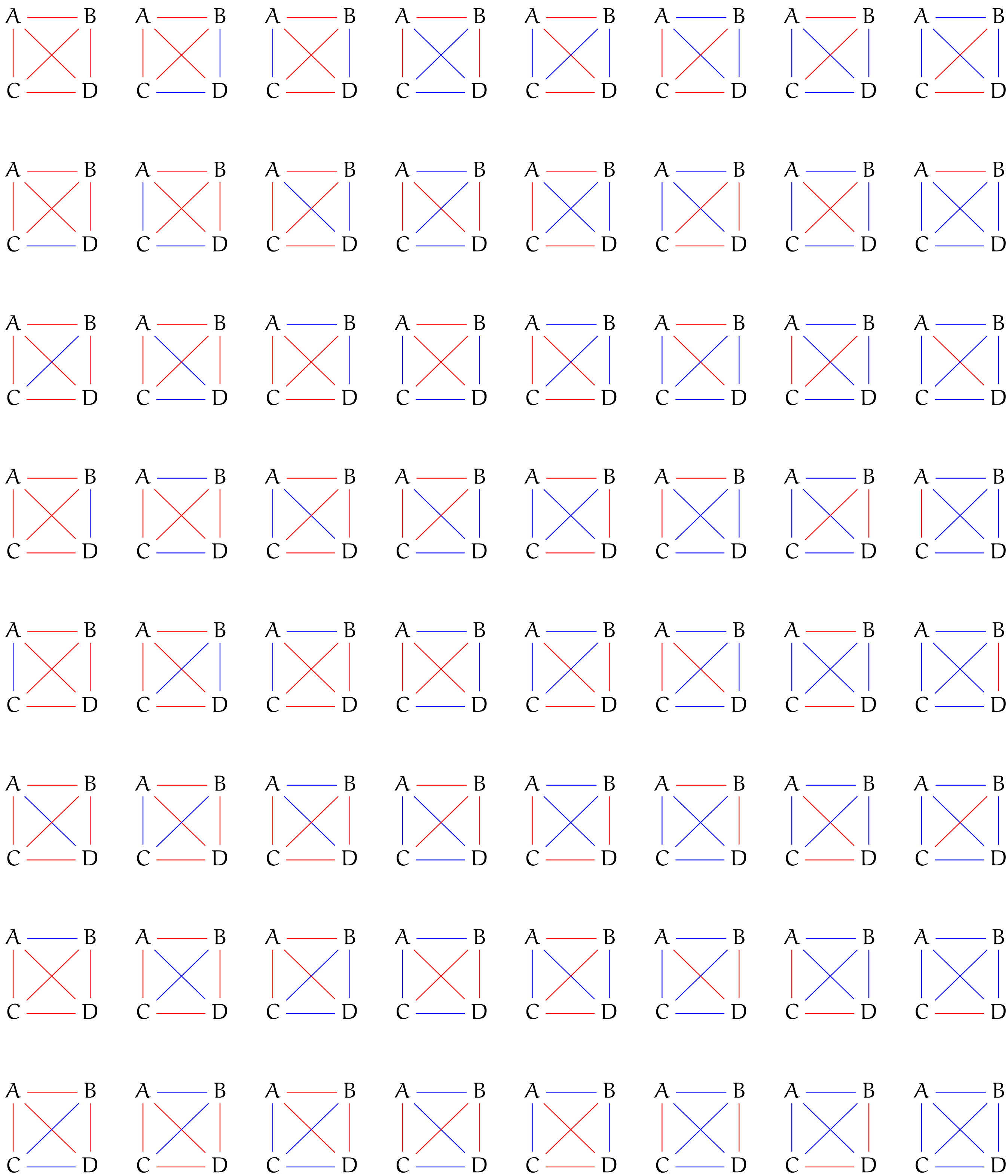
`ExisteCliqueMonoChrom(n,a,X)`

Cette fonction prend en paramètre deux entiers n et a et une coloration des arêtes X correspondant à un tableau à une ligne et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ colonnes de 1 et de 2 et renvoie `False` si pour tout $\mathcal{K}_a \subseteq \mathcal{K}_n$, $\mathcal{K}_a$ n'est pas monochrome avec la coloration induite par X.

`TousLesSousEns(n,a)` correspond à tous les $\mathcal{K}_a \subseteq \mathcal{K}_n$ (il s'agit des indices des sommets).

`TousLesSousEns(n,2)` correspond à l'ensemble de toutes les arêtes de $\mathcal{K}_n$.

Exemple des 64 2-coloration de $\mathcal{K}_4$



Quitte à échanger le rôle de la couleur 1 et de la couleur 2 on peut observer que la 2-coloration ligne 7 colonne 2 est la même que celle de la ligne 2 colonne 7. Ces deux colorations ne répondent d'ailleurs pas au problème de Ramsey, ce qui permet de montrer que $R(3,3) > 4$ (nous avons montré en TD que $R(3,3) = 6$).

On pourrait d'ailleurs encore diminuer le nombre de 2-coloration différentes en jouant sur le positionnement des sommets : la 2-coloration de la ligne 2 colonne 1 est la même que celle de la ligne 5 colonne 1. Cette simplification est un peu plus complexe à analyser.