Coloration des graphes

Cours et exercices

A la fin du second semestre nous avons travaillé avec l'objet *graphe*. En tant qu'utilisation de cet objet nous nous sommes intéressé à la **coloration**. Il s'agissait de colorier chacun des sommets du graphes en faisant en sorte que deux sommets connectés par un arc ou une arête n'ai pas la même couleur.

A présent nous allons nous intéresser à la coloration des arêtes.

Exercice 1

1. Rappeler la définition d'un graphe non orienté.
2. Quelle propriété caractérise un graphe connexe ?
3. Donner un exemple de graphe connexe à 7 sommets et 9 arêtes. Vous donnerez une représentation sagittale et sa représentation matricielle.
4. Donner un exemple de graphe connexe à 9 sommets et 7 arêtes. Vous donnerez une représentation sagittale et sa représentation matricielle.
5. (a) Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté et connexe. Rappeler la définition de $X(\mathcal{G})$, le nombre chromatique de $\mathcal{G}$.

   (b) Pour chacun de graphes standards suivants, rappeler la valeur du nombre chromatique.

   i. $X(\mathcal{K}_{2017})$
   ii. $X(\mathcal{C}_{2017})$
   iii. $X(\mathcal{Z}_{2017})$
   iv. $X(\mathcal{K}_{2018})$
   v. $X(\mathcal{C}_{2018})$
   vi. $X(\mathcal{Z}_{2018})$

La théorie à laquelle nous allons nous intéresser est appelé la *théorie de Ramsey*[1].

La théorie de Ramsey est souvent paraphrasé par

Il n'existe pas de désordre complet dans une structure assez grande.

Avant d'énoncer le théorème de Ramsey commençons par un principe similaire mais beaucoup plus faible : **les tiroirs de Dirichlet**. Une commode dispose de t tiroirs (t est un nombre entiers strictement positif). Existe-t-il un nombre n de paire de chaussettes, rangé *n'importe comment* dans les tiroirs de cette commode, pour garantir qu'un tiroir contient au moins deux chaussettes ?

Exercice 2

Déterminer une relation simple entre t et n résolvant le principe des tiroirs de Dirichlet.

Avec ce principe très simple on peut résoudre des problèmes beaucoup moins simple.

Exercice 3

Dans une fête, il y n personnes ($n > 1$) ayant au moins un ami. Montrer que dans cette fête au moins deux personnes ont le même nombre d'amis.

On pourra considérer le graphe où les sommets représentent les personnes et les arêtes la relation d'amitié que l'on supposera toujours réciproque et encadrer les degrés de chaque sommet.

Le théorème de Ramsey généralise le principe de Dirichlet : considérer un nombre n suffisamment grand d'objet (les chaussettes) afin d'assurer que certain d'entre eux partagent une propriété commune (être dans le même tiroir).

1. Ne pas confondre avec Ramsay Bolton. Le Ramsey de notre théorie est Frank Plumton Ramsey (1903-1930) - oui, oui, mort à 26 ans - et on ne lui connaissait pas de trouble particulier avec des chiens.

Coloration des arêtes

Soient $\mathcal{G}$ un graphe non orienté et $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Une **n-coloration** de $\mathcal{G}$ est la donnée d'une application

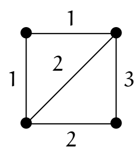
$$\lambda : \mathbf{Ar}(\mathcal{G}) \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

L'application λ est appelé **la coloration des arêtes de $\mathcal{G}$**.

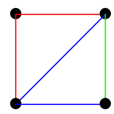
La paire $(\mathcal{G}, \lambda)$ est appelé un **chromage** de $\mathcal{G}$.

Si pour toute paire d'arête $\{x, y\}$ et $\{x', y'\}$ de $\mathcal{G}$, $\lambda(\{x, y\}) = \lambda(\{x', y'\})$ on dira que $(\mathcal{G}, \lambda)$ est **monochromatique**.

En général, on représente la coloration des arêtes, comme pour une valuation : en indiquant le nombre sur l'arête.



Dans la pratique, on associe à chaque nombre une couleur pour ne pas surcharger le graphe



Théorème de Ramsey

Pour tout entier c et toute suite d'entier $(n_1, \ldots, n_c)$, il existe un entier N suffisamment grand tel que pour toute c-coloration λ de $\mathcal{K}_N$ il existe $i \in [\![1, c]\!]$ tel que $\mathcal{K}_{n_i} \subseteq \mathcal{K}_N$ est monochromatique (avec la couleur induite de chromage $(\mathcal{K}_N, \lambda)$.

On note $R(n_1, \ldots, n_c)$ le plus petit N satisfaisant le théorème. Il est appelé **nombre de Ramsey**.

Prenons par exemple $c = 2$, $n_1 = 2$ et $n_2 = 2$. Le théorème de Ramsey affirme qu'il existe une clique $\mathcal{K}_N$ pour un certain N tel que pour toute 2-coloration de $\mathcal{K}_N$, c'est à dire quelque soit la manière de colorier les arêtes de $\mathcal{K}_N$ avec (au plus) 2 couleurs, on trouvera toujours un sous graphe $\mathcal{K}_2$ de $\mathcal{K}_N$ qui soit monochromatique.

On observe ici que $N = 2$ répond facilement au problème. Donc $R(2, 2) = 2$.

Exercice 4

Que vaut $R(\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{\text{c fois}})$?

Attardons-nous au problème des 2-colorations. On s'intéresse aux nombres de Ramsey $R(a, b)$ pour différente valeur de a et b, au moins égale à 2.

Exercice 5

Pour tout entier $n \geqslant 2$, déterminer $R(2, n)$.

Exercice 6

Soit N un entier tel que $\mathcal{K}_N$ satisfait le théorème de Ramsey et tel qu'il existe une 2-coloration de $\mathcal{K}_{N-1}$ sans sous-graphe monochromatique de la forme $\mathcal{K}_a$ ou $\mathcal{K}_b$. Quelle est la valeur exacte de $R(a, b)$?

Exercice 7

Le but de cet exercice est de montrer que $R(3, 3) = 6$. Pour ce faire on va utiliser le principe de raisonnement exhibé à l'exercice précédent.

1. Considérons une 2-coloration de $\mathcal{K}_6$ et un de ses sommets s ; ce sommet a 5 voisins.
   (a) Montrer que 3 des 5 arêtes issue de s ont la même couleur.
   (b) Montrer qu'il existe $\mathcal{K}_3 \subseteq \mathcal{K}_6$ monochromatique (avec la coloration induite par le chromage de $\mathcal{K}_6$).
   (c) En déduire une majoration de $R(3, 3)$.
2. Déterminer une 2-coloration de $\mathcal{K}_5$ sans aucun $\mathcal{K}_3$ monochromatique.

3. Conclure.

Exercice 8

Le problème des amis et des étrangers

Dans une soirée, il y a n personnes. Si deux personnes se connaissent on dit qu'ils sont *amis* sinon on dit qu'ils sont *étrangers*.

Au cours de la soirée on forme un groupe de 3 individus arbitrairement choisis. Pour quelles valeurs de n est-on certain que dans ce groupe de 3 individus, soit ils sont deux à deux amis soit ils sont deux à deux étrangers ?

A l'origine, c'est ce problème que Ramsey a résolu en donnant naissance à la théorie qui portera son nom.

Il semblerait que le théorème de Ramsey soit utilisé en informatique théorique dans le domaine du calcul distribué.

Déterminer un nombre de Ramsey $R(a, b)$ est très difficile. A titre d'exemple, on ne connait pas aujourd'hui la valeur exacte de $R(4, 6)$. Grâce à des méthode probabiliste, Paul Erdös a déterminé des bornes de ce nombre. On sait par exemple que $36 \leqslant R(4, 6) \leqslant 41$ mais pas sa valeur exacte.

On sait par exemple que $R(4, 4) = 18$. Pour démontrer ce résultat on utilise une majoration des nombres de Ramsey

$$R(a, b) \leqslant R(a, b-1) + R(a-1, b)$$

pour arriver à $R(4, 4) \leqslant 18$. Puis on "demande à l'ordinateur" de réaliser les quelques 2.46×10^{26}, 2-coloration de $\mathcal{K}_{17}$ pour en trouver une seule qui ne possède aucun $\mathcal{K}_4$ monochromatique.

Paul Erdös a démontré que $R(n, n) \sim_\infty \dfrac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi n}}$ ($\sim_\infty$ signifie que lorsque n est très grand, la valeur de $R(n, n)$ se rapproche de la valeur donnée).