Formulaire - Séries

Équivalents

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
2. $\dfrac{1}{1-u_n} - 1 \sim u_n$
3. $\dfrac{1}{1+u_n} - 1 \sim -u_n$
4. $\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \dfrac{1}{2}u_n$
5. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
6. $\ln(1+u_n) \sim u_n$
7. $\sin(u_n) \sim u_n$
8. $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$
9. $\tan(u_n) \sim u_n$
10. $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

(i). $[(a \sim b) \wedge (c \sim d)] \Rightarrow (ac \sim bd)$

(ii). $[(a \sim b) \wedge (c \sim d)] \Rightarrow \left(\dfrac{a}{c} \sim \dfrac{b}{d}\right)$

(iii). $u \sim v \Rightarrow u^\alpha \sim v^\alpha$

(iv) $e^u \sim e^v \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

(v) $\left(\left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\right) \wedge (a \sim b)\right) \to (\ln(|a|) \sim \ln(|b|))$

(vi) $\left(\left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty\right) \wedge (a \sim b)\right) \to (\ln(|a|) \sim \ln(|b|))$

Théorème

Soient u et v deux suites non nulle à partir d'un certain rang tendant vers 0.

Si $u \sim v$ alors $\sum u$ et $\sum v$ sont de même nature.

Critères

Critère grossier : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$ alors $\sum u_n$ ne converge pas.

Critère de Riemann : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{convergente,} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{divergente,} & \text{si } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$

Critère de d'Alembert : si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \begin{cases} \text{convergente,} & \text{si } l < 1 \\ \text{divergente,} & \text{si } l > 1 \end{cases}$

Critère de Cauchy : si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \begin{cases} \text{convergente,} & \text{si } l < 1 \\ \text{divergente,} & \text{si } l > 1 \end{cases}$