LOGIQUE & CALCUL

La persistance des nombres

Quand on multiplie les chiffres d'un nombre entier, on trouve un autre nombre entier, et l'on peut recommencer. Combien de fois ? Onze fois au plus… semble-t-il.

Jean-Paul DELAHAYE

Certains problèmes qu'on explique en quelques secondes semblent hors de portée des raisonnements abstraits et des capacités de calcul des plus puissants ordinateurs. Le problème de la persistance multiplicative des nombres en base 10, d'énoncé très simple, est l'une de ces redoutables énigmes où le blocage est total.

Considérons un nombre entier positif, par exemple 377. Multiplions ses chiffres : $3 \times 7 \times 7 = 147$. Opérons de même avec le résultat 147 : $1 \times 4 \times 7 = 28$. Recommençons : $2 \times 8 = 16$. Encore : $1 \times 6 = 6$. Arrivé à un nombre d'un seul chiffre, on ne peut plus rien faire : $377 \rightarrow 147 \rightarrow 28 \rightarrow 16 \rightarrow 6$.

Cette suite est la « suite multiplicative » de 377 et la « persistance multiplicative » p de 377 est le nombre de fois qu'il a fallu multiplier les chiffres avant d'arriver à un nombre à un seul chiffre ; ici, $p = 4$.

Voici le tableau des persistances multiplicatives *(en rouge)* des entiers inférieurs à 100 *(chaque ligne représente une dizaine)* :

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
4	1	1	1	2	2	2	2	3	2	3
5	1	1	2	2	2	3	2	3	2	3
6	1	1	2	2	2	2	3	2	3	3
7	1	1	2	2	3	3	2	4	3	3
8	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
9	1	1	2	3	3	3	3	3	3	2

Parmi les entiers compris entre 0 et 100, 77 a la plus grande persistance : elle vaut 4.

La persistance multiplicative d'un entier ne peut pas être infinie. Ce n'est pas étonnant, mais démontrons-le, nous en tirerons une information plus fine sur la longueur des suites multiplicatives. Quand nous multiplions les chiffres d'un nombre $N = a_1 a_2 \ldots a_c$ ayant c chiffres (avec $c \geq 2$), nous obtenons au plus $a_1 \times 9^{c-1}$, car chaque a_i vaut au plus 9. Ce maximum possible est strictement inférieur à N (car $N \geq a_1 \times 10^{c-1}$). La suite multiplicative de N, qui ne comporte que des entiers positifs ou nuls, est strictement décroissante et donc finie.

La persistance atteint-elle un maximum ?

Ce que nous venons de dire permet de majorer la persistance d'un nombre en fonction de son nombre de chiffres. En effet, puisque le produit des chiffres de $N = a_1 a_2 \ldots a_c$ est inférieur ou égal à $a_1 \times 9^{c-1}$, le produit des chiffres d'un nombre N de c chiffres est inférieur à $N \times (9/10)^{c-1}$. Comme $(9/10)^{22} = 0{,}09847\ldots < 1/10$, on en déduit que si N a 23 chiffres ou plus, le nombre de chiffres du produit des chiffres de N est strictement inférieur au nombre de chiffres de N. Il s'ensuit que la persistance de N est majorée par le nombre de chiffres de N plus une constante. Des calculs complémentaires montrent que la constante 2 convient jusqu'à 10^{23}, et donc qu'elle convient aussi pour tout N : la persistance d'un entier N de c chiffres est toujours inférieure ou égale à $c + 2$.

Maintenant se posent les questions naturelles et élémentaires suivantes :

– La persistance d'un nombre peut-elle être n'importe quel entier ?

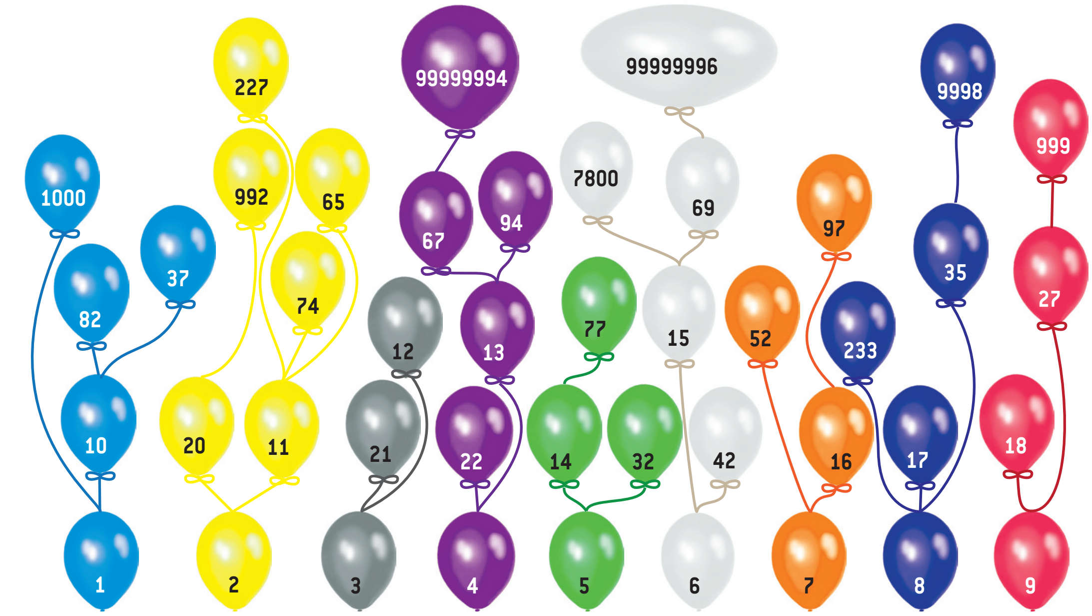
– Si ce n'est pas le cas, quelle est la persistance maximale d'un nombre ?

Ces questions paraissent faciles, dans la mesure où l'ordinateur peut suppléer à nos capacités limitées de manipulation des chiffres. L'expérience montre qu'il n'en est rien : jusqu'à présent, ni le raisonnement ni le calcul par ordinateur n'ont permis de trouver d'entiers ayant une persistance supérieure à 11 ! Et l'on désespère d'en découvrir, ainsi que de réussir à prouver que 11 est le maximum.

Voici le tableau des entiers N les plus petits ayant une persistance multiplicative p égale à 1, 2, 3, …, 11 :

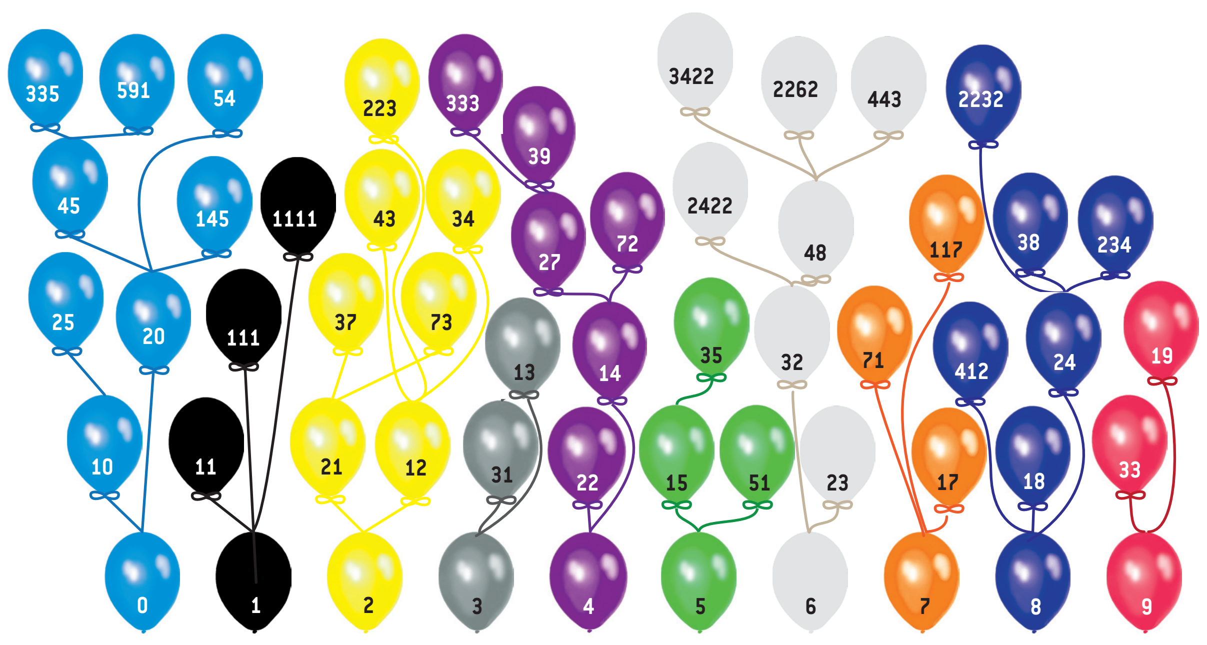
p	***N***
1	10
2	25
3	39
4	77
5	679
6	6788
7	68889
8	2677889
9	26888999
10	3778888999
11	277777788888899

1. La persistance additive



On obtient la persistance additive en additionnant tous les chiffres d'un nombre à chaque étape : 32529 → 3 + 2 + 5 + 2 + 9 = 21 → 2 + 1 = 3. Ici la persistance additive est 2, le nombre d'étapes. Le chiffre final que l'on trouve est utilisé depuis toujours dans les « preuves par 9 » : on démontre que le point final de *N* est le reste de la division de *N* par 9 (ici, 9 étant équivalent à 0). Des exemples sont indiqués pour les différents points finals.

2. La persistance multiplicative



Pour calculer la persistance multiplicative d'un nombre, on multiplie ses chiffres. Avec le nouveau nombre obtenu, on recommence l'opération, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre constitué d'un seul chiffre. Le nombre d'étapes de l'opération est la persistance multiplicative du nombre. Ainsi, en partant de 335, on passe à 45, puis à 20, puis à 0 ; la persistance est égale à 3. Le dessin représente quelques nombres et les suites de nombres qu'on en déduit. On démontre sans mal que la persistance additive est aussi grande que l'on veut ; en revanche, on ne sait pas le démontrer pour la persistance multiplicative, qui semble ne jamais dépasser 11.

3. Une variante de John Conway

Le mathématicien britannique John Conway, inventeur du Jeu de la vie et de mille autres curiosités mathématiques, a proposé en 2007 une énigme dont le principe ressemble à celui de la persistance multiplicative et qui conduit à une très étrange situation.

Partant d'un nombre N, par exemple 3 462, on calcule le successeur de N en écrivant ce nombre comme un « train de puissances » $3^4 6^2$ et en effectuant l'évaluation $3^4 6^2 = 2\,916$. Puis on recommence.

Ainsi, $2916 \to 2^9 1^6 = 512 \to 5^1 2 = 10 \to 1^0 = 1$ (quand N est composé d'un nombre impair de chiffres, le dernier chiffre n'a pas d'exposant. Quand c'est nécessaire, on utilise la convention $0^0 = 1$.)

La question posée par J. Conway est : existe-t-il des nombres indestructibles, c'est-à-dire dont le calcul par sa règle ne conduit pas à un nombre constitué d'un seul chiffre ?

Neil Sloane

John Conway

Il trouva le nombre indestructible 2592 :

$2\,592 \to 2^5 9^2 = 2\,592$

N'en trouvant aucun autre, il conjectura que c'était le seul nombre indestructible. Neil Sloane effectua une recherche plus approfondie et découvrit :

$24\,547\,284\,284\,866\,560\,000\,000\,000 \to$

$2^4 5^4 7^2 8^4 2^8 4^8 6^6 5^6 0^0 0^0 0^0 0^0 0^0 =$

$24\,547\,284\,284\,866\,560\,000\,000\,000$

N. Sloane conjecture maintenant qu'il n'en existe pas d'autres. La situation est assez étonnante. L'opération de calcul du « train de puissances » détruit tous les entiers, car ils sont rapidement réduits à un seul chiffre, sauf deux nombres, 2 592 et 24 547 284 284 866 560 000 000 000. Qu'ont-ils donc de particulier ? Un lecteur essaiera-t-il de vérifier qu'il n'y a pas de troisième exception en prenant des nombres plus grands ?

Le plus ancien document sur la persistance des nombres est un article de 1973 écrit par Neil Sloane. Il indiquait qu'aucun nombre jusqu'à 10^{50} n'a de persistance supérieure à 11. N. Sloane formulait aussi la conjecture qu'il existe un nombre c (probablement 11) tel qu'aucun entier N n'a une persistance multiplicative supérieure à c.

La notion de persistance multiplicative a aussi un sens dans les autres bases de numération que 10. Sous sa forme générale, la conjecture énoncée par N. Sloane était que pour toute base de numération b, il existe une constante $p_{max}(b)$ (dépendante de b), qui indique le maximum possible pour la persistance des entiers écrits en base b.

Vérifier jusqu'à 10^{500}

Dans le cas de la base 10, les calculs les plus avancés effectués en 2011 par Mark Diamond, en Australie, assurent qu'aucun nombre inférieur à 10^{333} n'a une persistance supérieure à 11. On conjecture donc de plus en plus fortement que $p_{max}(10) = 11$: en base 10, aucun entier n'aurait une persistance multiplicative supérieure à 11.

Faire la vérification jusqu'à 10^{333} en prenant les entiers les uns après les autres est totalement impossible. Les calculs les plus longs, entrepris par exemple pour factoriser de grands entiers ou relever des défis cryptographiques, comportent environ 10^{21} opérations. De tels calculs ont occupé des dizaines de machines assez puissantes pendant des semaines et leur coût est élevé. Mener un calcul demandant plus de 10^{21} opérations élémentaires (ou instructions) est peut-être envisageable, mais 10^{25} est une borne technologique qu'on ne dépassera pas avant plusieurs années. Bien sûr, 10^{333} risque d'être à tout jamais inenvisageable.

Il est donc intéressant de comprendre comment on a pu aller jusqu'à 10^{333}. Cela illustre l'idée que dans la programmation d'un ordinateur même puissant, l'intelligence et les mathématiques sont utiles, et permettent de dépasser très largement les limites que la technologie fixe à celui qui se précipite bêtement. Tout se fonde sur une série de remarques impliquant chacune une économie de calcul. Ici, il n'est question que de la persistance multiplicative en base 10, que nous abrégeons en «persistance».

Remarque 1. Dès qu'un nombre comporte un chiffre 0, sa persistance est 1. Il n'est donc pas nécessaire de s'occuper des nombres comportant un ou plusieurs 0.

Remarque 2. En enlevant tous les chiffres 1 d'un nombre, on ne change pas sa persistance. Il est donc inutile de s'occuper des nombres comportant des 1.

Remarque 3. Si un nombre comporte un chiffre pair (2, 4, 6 ou 8) et un 5, sa persistance est au plus 2, car le produit de ses chiffres se termine par un 0. Il sera donc inutile de considérer les nombres comportant à la fois un chiffre pair et un 5 (exemple : 7877995 → 1111320 → 0).

Remarque 4. L'ordre des chiffres d'un nombre est sans importance pour le calcul de sa persistance. C'est évident, puisque le produit de ses chiffres ne dépend pas de l'ordre dans lequel ils sont écrits ; ainsi, 23 477 et 77 324 ont la même persistance. On pourra donc considérer uniquement les nombres dont les chiffres sont classés par ordre croissant, tel 222 667 779 999. On n'oubliera aucun nombre en procédant ainsi ; par exemple, 772 992 ne sera pas traité directement, mais le sera indirectement *via* le nombre 227 799, qui est plus petit et de même persistance.

Remarque 5. En remplaçant les 8 d'un nombre N auquel on s'intéresse par 222, les 4 par 22, les 6 par 23, les 9 par 33 (par exemple, 8 726 793 devient 22 272 237 333), on obtient un nombre ayant la même persistance que N, qu'on nommera *forme normalisée* de N. On pourra donc n'étudier que les nombres ne comportant que les chiffres premiers : 2, 3, 5 et 7.

En cumulant les cinq remarques, on en déduit que tout entier qui n'aboutit pas à 0 en deux étapes a la même persistance qu'un nombre de la forme 222...2333...3777...7 ou 333...3555...5777...7.

Dans un test entrepris en 2011, M. Diamond a effectivement calculé la persistance de tous les nombres d'une des deux formes ci-dessus comportant jusqu'à 1 000 fois le chiffre 2, 1 000 fois le 3, 1 000 fois le 5, 1 000 fois le 7. Aucun nombre de persistance supérieure à 11 n'a été trouvé.

Remarquons que ce test n'a pas porté sur le nombre 88...8 comportant 334 fois le 8, car il n'est pas traité directement et que lorsqu'on le met sous la forme normalisée, il devient 222...2 avec 1 002 fois le 2, dont la persistance n'a pas été calculée par M. Diamond. Ce nombre 88...8 (334 fois le 8) est le plus petit ayant échappé au test, car les autres substitutions pour mettre un nombre sous forme normale (4 → 22, 6 → 23, 9 → 33) rallongent moins que la substitution 8 → 222. Il en résulte que tous les nombres de 333 chiffres ou moins ont été envisagés directement ou indirectement par le test réalisé en 2011 (qui en a traité d'autres, mais de manière non systématique, au-delà de 10^{333}).

Toujours pas de théorème

Le test de M. Diamond, qui couvre tous les entiers jusqu'à 10^{333}, a effectué environ deux milliards de calculs de persistance au total. En effet, il y a exactement 1001^3 = 1 003 003 001 nombres de la forme 222...2333...3777...7 où le 2 apparaît entre 0 et 1 000 fois, le 3 entre 0 et 1 000 fois, le 7 entre 0 et 1 000 fois. Il y a autant de nombres de la seconde forme (333...3555...5777...7), ce qui fait un total de 2 006 006 002 nombres passés directement par le test. Par rapport aux 10^{333} cas à traiter pour celui qui ne réfléchit pas, le gain est colossal ! En mai 2013, Francesco De Comité, au LIFL, a poussé la vérification jusqu'à 10^{500}.

Il est intéressant que la conjecture ait été testée aussi loin. Mais aux yeux du mathématicien, tant qu'un raisonnement n'aura pas été trouvé, on continuera de parler de conjecture et non de théorème.

Même si on ne peut aujourd'hui être certain que la persistance d'un entier est au plus 11, on peut se consoler avec le résultat suivant, qui donne la persistance en moyenne d'un nombre à l'infini : la persistance multiplicative moyenne des nombres compris entre 1 et N tend vers 1 quand N tend vers l'infini (elle est donc largement inférieure à 11). Comme nous allons le voir, ce résultat (démontré) provient de l'étude des points finals des suites multiplicatives.

Chaque suite multiplicative en base 10 se termine par l'un des dix chiffres, son point final (parfois nommé *multiplicative digital root* en anglais). On en trouve une table sur http://oeis.org/A031347.

Cependant, tous les chiffres n'ont pas la même probabilité d'être un point final. Le calcul indique que pour N variant entre 1 et 100, on obtient 25 fois le 0 comme point final, seulement 2 fois le 1 et 23 fois le 8. Le tableau ci-dessous précise ce qui se passe quand N varie entre 1 et 100, puis entre 1 et 1 000, puis entre 1 et 10 000, etc.

On le voit, une majorité de plus en plus importante de nombres ont pour point final le chiffre 0. Il semble même que la proportion d'entiers positifs inférieurs à N dont le point final est 0 tend progressivement vers 100 %. Pour le démontrer, on remarque que lorsqu'on prend au hasard un nombre de c chiffres, la probabilité qu'il ne comporte aucun 0 est $(9/10)^{c-1}$ (son deuxième chiffre n'est pas un 0 neuf fois sur dix ; de même pour le troisième chiffre, etc.). Cette probabilité tend vers 0 quand c tend vers l'infini.

Puisqu'un nombre qui comporte un 0 a une persistance égale à 1 et que ceux qui n'ont pas la persistance 1 ont une persistance majorée par $c + 2$ *(voir plus haut)*, il s'ensuit que la persistance multiplicative moyenne d'un entier inférieur à N tend vers 1 quand N tend vers l'infini.

Malheureusement, le fait de savoir que cette moyenne est égale à 1 ne permet pas de savoir si 11 est le maximum : la moyenne ne dit rien sur les écarts à la moyenne !

À propos des points finals d'une suite multiplicative, une autre question pourtant simple reste non résolue. On remarque qu'entre 1 et 10^n, le point final 1 est obtenu n fois exactement *(voir la colonne sous le 1)*. Cela provient de ce que le produit des chiffres d'un entier vaut 1 si et seulement si cet entier ne comporte que des 1, c'est-à-dire si c'est un nombre parmi 1, 11, 111, 1 111, 11 111, etc. Entre 1 et 10^n, il y a donc au moins n nombres dont le point final est 1 (d'ailleurs atteint en une seule étape).

Points finals et *rep-units*

Pour prouver qu'entre 1 et 10^n, il y a exactement n entiers ayant pour point final le 1, il suffit donc de prouver que les nombres de la forme 1111...1, dénommés *rep-units*, ont toujours un autre diviseur premier que 2, 3, 5 ou 7. En effet, si un *rep-unit* A n'avait comme facteurs premiers que 2, 3, 5 et 7, alors il existerait un nombre B (celui ayant les facteurs premiers de A comme chiffres) qui ne serait pas un *rep-unit*, mais qui en donnerait un par multiplication de ses chiffres, et aurait donc 1 comme point final. Du coup, il y aurait toujours, entre 1 et 10^n, plus de n entiers ayant le point final 1 pour n assez grand.

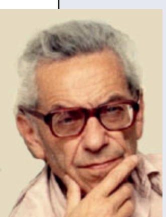
Les *rep-units* ont été largement étudiés. Des pages Internet leur sont consacrées, mais rien ne permet d'affirmer que tous ont un facteur premier supérieur à 9. Ceux déjà factorisés ont tous un facteur premier supérieur à 9 *(voir http://homepage2.nifty.com/m_kamada/math/11111.htm)*, mais qu'en est-il des autres ? Personne, à ma

Répartition des nombres entre 1 et 10^n en fonction de leur « point final »

Point final	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Entre 1 et 10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Entre 1 et 10^2	25	2	9	3	10	7	14	3	23	4
Entre 1 et 10^3	477	3	77	6	65	40	155	6	161	10
Entre 1 et 10^4	6 740	4	543	10	279	172	1 172	10	1 050	20
Entre 1 et 10^5	82 402	5	3 213	15	894	607	6 843	15	5 971	35

4. La variante de Paul Erdős

D'après Richard Guy, le mathématicien hongrois Paul Erdős a lui-même proposé une intéressante et très simple variante du problème de la persistance multiplicative. Trouvant peut-être trop facile la conjecture (pourtant non résolue...) affirmant que la persistance multiplicative de tout nombre en base 10 est au plus 11, il a proposé que d'une étape à l'autre, on ne calcule que le produit des chiffres non nuls ; par exemple, 4570 → 140 → 4.



Cette « persistance à la Erdős » (toujours au moins égale à la persistance usuelle) est encore plus mal connue. W. Schneider a en effet découvert les nombres suivants qui ont une persistance à la Erdős supérieure à 11 :

(a) Le nombre $N = 5_{(16)}7_{(13)}$ (le 5 répété 16 fois, suivi du 7 répété 13 fois) a une persistance à la Erdős de 12 : 55 555 555 555 555 557 777 777 777 777 → 14 784 089 722 747 802 734 375 → 49 962 386 718 720 → 438 939 648 → 4 478 976 → 338 688 → 27648 → 2688 → 768 → 336 → 54 → 20 → 2.

(b) $7_{(42)}8_{(2)}9_{(14)}$ a une persistance à la Erdős de 13.

(c) $2_{(1)}6_{(1)}7_{(130)}9_{(8)}$ a une persistance à la Erdős égale à 14.

Wilfred Whiteside et Phil Carmody ont été jusqu'à 17 (voir www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_341.htm) :

(d) $6_{(1)}7_{(157)}8_{(46)}9_{(25)}$ a une persistance à la Erdős de 15.

(e) $3_{(1)}7_{(54)}8_{(82)}9_{(353)}$ a une persistance à la Erdős de 16.

(f) $3_{(1)}7_{(27)}8_{(622)}9_{(399)}$ a une persistance à la Erdős de 17.

Comment être certain qu'on ne trouvera pas mieux ? Et même, comment savoir qu'un maximum sera atteint ? Erdős n'a pas répondu, mais il a proposé la conjecture suivante : pour toute base de numération b, il existe une constante $p'(b)$ donnant le maximum possible pour la persistance à la Erdős des nombres écrits dans cette base. Cette variante de la conjecture est plus ardue que l'énoncé initial. Il n'est d'ailleurs pas si probable que cela qu'elle soit vraie, puisque, aujourd'hui, nul ne semble avoir identifié ce maximum indépassable dont elle annonce l'existence, même dans le cas de la base 10 !

connaissance, n'a prouvé que c'était vrai pour tous les *rep-units*. Il est donc possible que la colonne sous le 1 du tableau des points finals, prolongée indéfiniment, ne soit pas, comme elle semble l'être, la suite régulière des entiers 1, 2, 3, 4, ... C'est peut-être le cas, mais l'affirmer, c'est énoncer une conjecture !

Dans le tableau des points finals, F. De Comité a remarqué trois autres colonnes.

– La colonne sous le 3 et la colonne sous le 7 contiennent toujours les mêmes nombres : il s'agit des nombres triangulaires, de la forme $n(n-1)/2$, qu'on trouve sur la troisième colonne du triangle de Pascal : 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

– La colonne sous le 9 contient les nombres de la quatrième colonne du triangle de Pascal, de la forme $n(n-1)(n-2)/6$: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120...

Comme pour la colonne sous le 1, il est assez facile de démontrer que les nombres trouvés dans ces colonnes doivent au moins avoir ces valeurs, mais il est parfaitement possible que cela cesse d'être vrai si l'on va assez loin dans le tableau. Comme précédemment, cela dépend de conjectures difficiles sur la factorisation des entiers en nombres premiers.

Le mathématicien se comporte souvent comme le célèbre ivrogne qui, la nuit, cherche ses clefs sous un lampadaire. On lui demande : « Êtes-vous certain d'avoir perdu vos clefs sous ce lampadaire ? ». « Non, répond-il, mais ici il y a de la lumière. » Ne réussissant pas à résoudre le problème fondamental de la persistance multiplicative des nombres en base 10 (est-elle au plus 11 ?), les mathématiciens se sont intéressés aux variantes du problème, qu'ils ont parfois résolues parce qu'elles se trouvaient sous le lampadaire.

Et dans les autres bases ?

La première idée de variante consiste à considérer d'autres bases de numération.

En base 2, le problème est particulièrement facile. Un nombre écrit en base 2 ne comporte que des 1 et des 0. S'il comporte un 0, sa persistance multiplicative en base 2 est 1 (et son point final est 0). S'il n'en comporte pas, c'est qu'il n'est fait que de 1, et donc sa persistance multiplicative en base 2 est aussi égale à 1 (et son point final est 1). Ainsi, il n'y a aucun mystère en base 2 : 0 et 1 ont la persistance 0, et les autres entiers sont de persistance 1.

En base 3, c'est déjà plus intéressant. Un entier s'y écrit avec des 0, des 1 et des 2. S'il comporte un 0, sa persistance est 1 et son point final 0. Sinon, les 1 n'ont pas d'importance et le produit de ses chiffres est une puissance de 2.

Il se trouve que toutes les puissances de 2 écrites en base 3, à l'exception de 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 et 2^{15}, semblent contenir un 0, ce qui arrête la suite multiplicative.

Le test pour savoir si toute puissance de 2 en base 3 comporte un 0 a été mené jusqu'à $2^{10\,000}$ et aucune autre exception que les cinq mentionnées n'a été découverte. Cela ne constitue pas une preuve et il semble malheureusement que la conjecture « Toutes les puissances de 2 à partir de 2^{16} comportent un 0 dans leur écriture en base 3 » soit difficile.

Dommage, car si l'on admet cette conjecture, le problème de la persistance en base 3 est résolu :

(a) Si N comporte un 0, sa persistance multiplicative en base 3 est 1.

(b) Si N ne comporte que des 1, sa persistance multiplicative en base 3 est 1.

(c) Si $N = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ ou 2^{15}, le calcul donne pour la persistance p (les indices désignent la base de numération utilisée) :

$2^1 = 2$, $p = 0$; $2^2 = 12_3 \to 2$, $p = 1$; $2^3 = 22_3 \to 11_3 \to 1$, $p = 2$; $2^4 = 121_3 \to 2$, $p = 1$; $2^{15} = 221122221_3 \to 1012_3 \to 0$, $p = 2$.

(d) Si N comporte uniquement des 1 et des 2 avec 1, 2, 3, 4 ou 15 fois le 2, on est ramené en une étape au cas *(c)*. La persistance est alors 1, 2, 3, 2, 3 selon le cas. Par exemple, $1121122_3 \to 22_3 \to 11_3 \to 1$.

(e) Si N ne comporte que des 1 et des 2

et que le nombre de 2 n'est pas 1, 2, 3, 4 ou 15, alors (sous réserve de la conjecture concernant les puissances de 2) la persistance est 2, puisque N donne un nombre comportant un 0, qui donne 0 à l'étape de calcul suivante.

La persistance multiplicative maximale en base 3 serait donc 3, et le plus petit nombre ayant cette persistance serait $26_{10} = 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2$ qui, en base 3, donne la suite multiplicative $26 = 222_3 \to 22_3 \to 11_3 \to 1$.

Des propriétés sont connues pour les autres bases, mais aucune n'élucide la question de la persistance maximale.

Des bases à pas variable

Les bases de numération à pas variable conduisent à des cas où le problème de la persistance multiplicative est complètement résolu : enfin, un bon lampadaire !

En base 10, la suite de chiffres 322201 représente le nombre :
$3 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10 + 1$.
Dans la base à pas variable $B = (b_1, b_2, ..., b_n, ...)$, 322201 représente l'entier :
$3 \times b_5 \times b_4 \times b_3 \times b_2 \times b_1 + 2 \times b_4 \times b_3 \times b_2 \times b_1 + 2 \times b_3 \times b_2 \times b_1 + 2 \times b_2 \times b_1 + 0 \times b_1 + 1$.

Si chaque b_i est supérieur ou égal à 2, tout entier a au moins une écriture en base B. Si, de plus, on impose au chiffre placé en i-ème position à partir de la droite d'être strictement inférieur à b_i, l'écriture en base B d'un entier est unique. On impose donc cette condition aux chiffres d'un nombre écrit en base B.

Les bases à pas variable sont la généralisation naturelle de la notion de base de numération à pas constant. Elles permettent en particulier de rendre compte simplement des systèmes de mesure inégaux : 1 écu = 3 livres ; 1 livre = 20 sous ; 1 sou = 12 deniers.

La base de numération « factorielle » est particulièrement prisée des mathématiciens ; elle consiste à prendre $b_i = i + 1$. Ainsi, en base factorielle, le nombre s'écrivant 322201_F (l'indice F signifie qu'il s'agit de l'écriture en base factorielle) vaut :
$3 \times 6! + 2 \times 5! + 2 \times 4! + 2 \times 3! + 0 \times 2! + 1 = 3 \times 720 + 2 \times 120 + 2 \times 24 + 2 \times 6 + 0 \times 2 + 1 = 2\,461_{10}$.

Bien évidemment, la notion de persistance a un sens en base factorielle : pour passer d'un entier N au suivant dans la suite multiplicative, on fait le produit des chiffres de son écriture en base factorielle, et on écrit le résultat en base factorielle. La conjecture généralisée de la persistance en base factorielle est bien évidemment qu'il existe une persistance maximale p_{Fmax}.

M. Diamond et Daniel Reidpath ont montré que cette conjecture en base factorielle est fausse. Leur méthode vaut aussi pour la « persistance à la Erdős » (on ne multiplie que les chiffres non nuls), qui, en base factorielle, est elle aussi résolue par la négative.

Voici le raisonnement de M. Diamond et D. Reidpath. En base 10, les chiffres utilisables sont 0, 1, ..., 9. En base factorielle, les chiffres utilisables pour le n-ième chiffre à partir de la droite sont les nombres de 0 à n (le chiffre le plus à droite est un 0 ou un 1, à côté c'est un 0, un 1 ou un 2, etc.).

De cette remarque, il s'ensuit que tout nombre N a un antécédent M (un nombre M dont le produit des chiffres de l'écriture en base factorielle est N) ne comportant aucun 0. C'est le nombre $M = N11...1_F$ avec $(N - 1)$ fois le 1, qui est bien une écriture correcte d'un nombre dans la base factorielle, puisque son N-ième chiffre à partir de la droite est compris entre 0 et N. Si tout nombre a un antécédent, il ne peut y avoir de maximum à la persistance en base factorielle : on part de $A_1 = 11_F = 3_{10}$ (dont la persistance est 1), on considère son antécédent $A_2 = 311_F$, puis l'antécédent A_3 de A_2, etc. Par construction, le nombre A_N possède la persistance N. Il n'y a pas de persistance maximale.

En fait, la méthode décrite fonctionne pour toutes les bases à pas variable où les pas b_i ne sont pas bornés. Cela suggère une nouvelle et dernière conjecture (plus difficile que toutes les autres !) que je propose ici pour la première fois :

– Pour toute base à pas variable dont les b_i sont bornés par une constante, la persistance multiplicative (simple ou à la Erdős) est elle aussi bornée.

Il est peu probable que nous soyons là sous un lampadaire ! ■

L'AUTEUR

J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

Persistence of a number, *Wikipedia*, 2013 : http://en.wikipedia.org/wiki/Persistence_of_a_number

E. Weisstein, **Multiplicative Persistence**, 2013 : http://mathworld.wolfram.com/MultiplicativePersistence.html

C. Rivera, **Problems & Puzzles**, www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_022.htm et www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_341.htm

N. Sloane, **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences**, 2013 : http://oeis.org/search?q=persistence&language=french&go=Chercher

M. R. Diamond, **Multiplicative persistence base 10 : Some new null results**, 2011 : www.markdiamond.com.au/download/joous-3-1-1.pdf

A. Bellos, **Here's Looking at Euclid : A Surprising Excursion Through the Astonishing World of Math**, Free Press, 2010 (p. 176).

M. R. Diamond et D. Reidpath, **A counterexample to a conjecture of Sloane and Erdős**, *J. Recreational Math.*, vol. 29(2), pp. 89-92, 1998.