Base de Numération

Cours et exercices

Théorème

Soient n et b des entiers tels que $b > 0$. Il existe un famille finie $\{a_0, a_1, \dots, a_k\} \in [\![0, b[\![$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = \sum_{i=0}^{k} a_i b^i$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n, le cas initial $n = 0$ étant trivial. D'après le théorème de la division euclidienne $n = bq + r$ où $0 \leqslant r < b$. Naturellement $q < n$. Par hypothèse de récurrence $q = \sum_{i=0}^{k} a_i b^i$ pour un certain k. Ainsi $n = \sum_{i=0}^{k} a_i b^{i+1} + rb^0$ ce qui prouve le résultat. □

Définition

Soit $b \in \mathbb{N}_{>0}$. L'écriture en **base** b d'un entier $n \in \mathbb{N}$ est la donnée de la famille $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ du théorème précédent. On note

$$n = (a_k \dots a_1 a_0)_b$$

La manière usuelle d'écrire les nombres est l'écriture en base 10 ou base décimale. Lorsque l'on ne précise pas la base, il s'agira de l'écriture décimale du nombre, c'est à dire $123 = (123)_{10}$

En observant la preuve du théorème précédent, on obtient un algorithme permettant d'écrire en base b quelconque : il suffit de réaliser des divisions euclidienne successives. Écrivons par exemple l'entier 123 en base 7.

- $123 = 7 \times 17 + \boxed{4}$
- $17 = 7 \times 2 + \boxed{3}$
- $2 = 7 \times 0 + \boxed{2}$

On a alors $123 = (234)_7$.

Définition

- L'écriture en base 2 est appelé le **binaire**.
- L'écriture en base 3 est appelé le **trinaire**.
- L'écriture en base 8 est appelé l'**octal**.
- L'écriture en base 16 est appelé l'**hexadécimal**.
- L'écriture en base 60 est appelé le **sexagésimal**.
- L'écriture en base 150 est appelé l'**indienne**.

Lorsque la base dépasse les 10 caractères usuelles de la numération, on ajoute des caractères. Par exemple, en hexadécimal, on l'habitude de compléter les chiffres de 0 à 9 par les lettres, A, B, C, D et E. Ainsi $(ABC)_{16} = \underbrace{10}_{A} \times 16^2 + \underbrace{11}_{B} \times 16^1 + \underbrace{12}_{C} = 2748$.

Autre exemple, pour écrire en base sexagésimal, on prend l'habitude de séparer les nombres par des points. Par exemple, $223 = (3.43)_{60} = 3 \times 60 + 43$.

Exercice 1

Convertir en décimal.

1. $(10110)_2$
2. $(1201)_3$
3. $(3021)_4$
4. $(444)_5$
5. $(555)_6$
6. $(666)_7$
7. $(765)_8$
8. $(45A0D)_{16}$

Exercice 2

Convertir les entiers n en base b.

1. $n = 12$, $b = 2$
2. $n = 12$, $b = 8$
3. $n = 12$, $b = 16$
4. $n = 987$, $b = 7$
5. $n = 150$, $b = 150$
6. $n = (A8)_{16}$, $b = 11$
7. $n = (754)_8$, $b = 16$
8. $n = (94E)_{16}$, $b = 8$

Exercice 3

Déterminer tous les entiers $b \in \mathbb{N}_{>0}$, tel que $((11)_b)^2 - (111)_b = 5$.

Exercice 4

On a $341 = (2331)_a$. Déterminer a.

Exercice 5

Déterminer les entiers x, y et z tels que $(xyz)_7 = (zyx)_{11}$

Exercice 6

Déterminer la base a du système de numération dans laquelle on a l'égalité $(46)_a + (53)_a = (132)_a$.

Exercice 7

Déterminer la base a du système de numération dans laquelle on a l'égalité $(31)_a \times (13)_a = (443)_a$.

Exercice 8

Déterminer a et b pour que le nombre qui s'écrit $(aabb)_{10}$ soit un carré.

Exercice 9

1. Vérifier que 123448 est divisible par 13. Si on fait passer le premier chiffre en dernière position, on obtient le nombre 234481. Vérifier que ce nombre est divisible par 13.
2. De manière générale, prouver qu'en déplaçant le premier chiffre en dernière position dans l'écriture décimal d'un nombre à 6 chiffres divisible par 13, on obtient un nombre également divisible par 13.

Exercice 10

(Olympiade de mathématiques - Ibéroamérique - 1994)

Un entier $n > 0$ est dit *Brésilien* s'il existe une base $b < n - 1$ tel que n s'écrit en base b avec le même symbole. Montrer que 1994 est brésilien mais pas 1993.