Déterminant & Inverse matricielle

Cours et exercices

L'année dernière en algèbre linéaire nous avons introduit la notion de matrice. Nous avons vu en particulier les liens qui existe entre la résolution de système linéaire et le langage matriciel.

Par exemple, résoudre le système

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & & & = & 4 \\ x & + & y & - & 2z & = & -4 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$

est équivalent à résoudre le système matricielle $A.X = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

L'avantage de cette notation permet de revenir à une équation plus *simple*. En effet, classiquement (c'est à dire avec des nombres réelles) résoudre $ax = b$ est très facile. La solution est $x = \dfrac{b}{a}$ que l'on peut encore noter $x = a^{-1}b$. Nous savons d'ailleurs que pour pouvoir écrire cette égalité il faut (et il suffit) que $a \neq 0$. Lorsque l'on travaille avec les matrices avons, comme pour les nombres réels, la même égalité à savoir que la solution du système (S) est la solution de l'équation matricielle $AX = B$ qui est $X = A^{-1}B$. Sauf que la condition $A \neq 0$ n'est pas suffisante pour pouvoir affirmer que la solution existe. Un outil va nous permettre de nous rapprocher de ce formalisme : le *déterminant*.

Pour tous entiers $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$, nous noterons $\mathcal{M}_{n,m}$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels. On notera simplement $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n,n}$. Soient $M \in \mathcal{M}_{n,m}$ on notera $M_{i,j}$ le coefficient à l'intersection de la i-ème ligne et j-ème colonne. On pourra alors noter $M = (M_{i,j})_{i,j}$. Par exemple, avec la matrice A introduite ci dessus $A_{1,2} = -1$ ou encore $A_{3,3} = 3$. Dans tout le cours n, m et p désignent des entiers strictement positifs.

Retour sur les matrices

Définition

Soient $M, N \in \mathcal{M}_{n,m}$. Alors $M \pm N = (M_{i,j} \pm N_{i,j})_{i,j}$.

En d'autre terme pour additionner (ou soustraire) deux matrices on additionne (ou soustrait) coefficient par coefficient. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 9 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 12 & 99 & 11 \\ -2 & 2 & 22 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 83 & 19 & 99 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Réaliser les opérations $A + B$, $C + D$, $D - C$, $D - E$, $E + D$ et $E - C$.

Correction

$A+B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}$, $C+D=\begin{pmatrix}11 & 99 & 13\\ -1 & 4 & 25\\ 4 & 9 & 6\end{pmatrix}$, $D-C=\begin{pmatrix}13 & 99 & 9\\ -3 & 0 & 19\\ -4 & -9 & -8\end{pmatrix}$, $D-E=\begin{pmatrix}-71 & 80 & -88\\ -4 & 0 & 26\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,
$E-C=\begin{pmatrix}84 & 19 & 97\\ 1 & 0 & -7\\ 3 & -8 & -9\end{pmatrix}$.

Définition

- On note 0 la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}$ à coefficient tous nul. Autrement dis : $(0)_{i,j}=0$. La matrice 0 est appelée la *matrice nulle*.
- Quelque soit la matrice $A\in\mathcal{M}_{n,m}$, on note $-A$ la matrice identique à A mais à coefficients opposés. Autrement dis : $(-A)_{i,j}=-A_{i,j}$. On l'appel l'*opposé* de la matrice A.

La matrice 0 joue, comme dans les nombres réels, le rôle de l'*élément neutre* pour l'addition. En d'autre terme $A+0=A$ quelque soit la matrice A. De même on observe que pour toutes les matrices A, on a $A-A=0$.

Ces deux observations sont importantes au niveau mathématiques puisqu'elles offrent à $\mathcal{M}_{n,m}$ une structure très proche de $\mathbb{Z}$ (il y a un 0 et on peut additionner et soustraire). Pour nous on retiendra que $\mathcal{M}_{n,m}$ est un ensemble fort sympathique qu'il faut voir comme $\mathbb{Z}$.

Définition

Soient $x\in\mathbb{R}$ et $A\in\mathcal{M}_{n,m}$ alors

$$xA=(xA_{i,j})_{i,j}$$

Une formule un peu pompeuse pour dire que multiplier une matrice par un nombre réel revient à multiplier chacun de ses coefficients par le nombre.

Définition

Soient $A\in\mathcal{M}_{n,m}$ et $B\in\mathcal{M}_{m,p}$. Alors $A.B=C$ où

$$C_{i,j}=\sum_{k=1}^{m}A_{i,k}\times B_{k,j}$$

Il faut prendre garde que le produit est bien possible : il faut que le nombre de colonne de la première soit égale au nombre de ligne de la seconde.

Par exemple si $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ alors $AB=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 13\\ 0 & -2 & 3\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 2

Réaliser les calculs suivants.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Soit $\vartheta \in \mathbb{R}$ et $R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

1. Calculer $R(0)$, $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $R(\pi)$.
2. Considérons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Placer le vecteur de coordonné $\vec{v} = \binom{1}{1}$.
   (b) Placer les vecteurs de coordonné $\vec{u_1} = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \vec{v}$, $\vec{u_2} = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \vec{u_1}$ et $\vec{u_3} = R(\pi) \times \vec{u_1}$. Qu'observez-vous ?
3. Calculer $R(\vartheta) \times R(\vartheta')$. En déduire que $R(\vartheta)^2 = R(2\vartheta)$.
4. Calculer $R(\vartheta)^n$.

Définition

On appel matrice *identité*, notée Id_n la matrice à coefficient tous nuls sauf ceux sur la diagonale qui valent 1 :

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice identité équivaut au 1 de l'ensemble des nombres réels. Précisément :

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ alors $AId_n = Id_nA = A$.

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}$. On note ${}^tA$ la *transposée* de la matrice A définie par $({}^tA)_{i,j} = A_{j,i}$

En d'autre terme la transposée d'une matrice reviens à inverser lignes et colonnes.

Par exemple ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminant

A présent nous nous placerons toujours dans le cadre des matrices carrés de $\mathcal{M}_n$.

Voici une définition de déterminant à oublier très vite :

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Le *déterminant* de la matrice A, noté $\mathtt{det}(A)$, est le nombre réel défini par la formule :

$$\mathtt{det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne le *groupe symétrique d'ordre* n (*i.e.* toutes les bijections de l'ensemble $[\![1; n]\!]$) et $\varepsilon(\sigma)$ la *signature* de la permutation σ.

On précise bien qu'il est très important dans la suite du cours d'oublier cette formule. Mais il était indispensable de la donner. D'une part parce qu'il s'agit un peu d'un cours de math alors faisons des math ! D'autre part parce que sous ses apparence terrifiante cette formule n'est pas si compliquée et une telle formalisation permet très rapidement de donner des règles assez puissantes de calcul. Précisément avec cette définition, les démonstrations des formules suivantes sont très facile (mais nous nous en priverons dans le cadre de ce cours).

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice A. En d'autre terme $A = (C_1, \dots, C_n)$.

1. Si on permute deux colonnes, le déterminant change de signe :
$$\mathtt{det}(\dots, C_i, \dots, C_j, \dots) = -\mathtt{det}(\dots, C_j, \dots, C_i, \dots)$$
2. On ne modifie par la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne un multiple d'une autre colonne :
$$\mathtt{det}(\dots, C_i, \dots, C_j, \dots) = \mathtt{det}(\dots, C_i + \lambda C_j, \dots, C_j, \dots)$$
3. Si on multiplie tous les coefficients d'une colonne par un réel x alors le déterminant est multiplier par x :
$$\mathtt{det}(\dots, xC_i, \dots) = x\mathtt{det}(\dots, C_i, \dots)$$
4. $\mathtt{det}(AB) = \mathtt{det}(A)\mathtt{det}(B)$
5. $\mathtt{det}({}^tA) = \mathtt{det}(A)$. En particulier toutes les règles ci-dessus s'applique en replaçant le mot "colonne" par le mot "ligne".

Exercice 4

En ne vous servant que des résultats de la proposition précédente déterminer :

1. la valeur du déterminant d'une matrice avec deux colonnes identique,
2. une formule pour $\mathtt{det}(xA)$ en fonction de $\mathtt{det}(A)$.

Pour l'instant avec la définition de déterminant que nous avons, nous avons certes plein de résultats sympathiques mais techniquement aucune méthode de calcul. Remédions à cela rapidement (encore une fois nous nous priverons de la démonstration qui découle très facilement de la définition).

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_n$ et p et q deux entiers entre 1 et n. Le *mineur d'ordre* p, q de la matrice A est la matrice notée $\widehat{A}_{p,q} \in \mathcal{M}_{n-1}$ correspondant à la matrice A où l'on a supprimé la ligne p et la colonne q. Précisément :

$$(\widehat{A}_{p,q})_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{, si } i < p \text{ et } j < q \\ A_{i,j+1} & \text{, si } i < p \text{ et } j \geqslant q \\ A_{i+1,j} & \text{, si } i \geqslant p \text{ et } j < q \\ A_{i+1,j+1} & \text{, si } i \geqslant p \text{ et } j \geqslant q \end{cases}$$

où i et j sont des nombres entiers entre 1 et $n-1$.

Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ alors $\widehat{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Théorème

Si $A \in \mathcal{M}_n$ pour $n > 1$

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \texttt{det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} \texttt{det}(\widehat{A}_{i,j})$$

$$\forall j \in [\![1;n]\!], \quad \texttt{det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} \texttt{det}(\widehat{A}_{i,j})$$

En particulier $\texttt{det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

Si $A \in \mathcal{M}_1$ alors $\texttt{det}(A) = A_{1,1}$.

Le théorème suivant donne une méthode récursive de calcul du déterminant. Par exemple calculons $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (on remplace les parenthèses par des barres pour indiquer que nous calculons un déterminant). On choisi la colonne avec le plus de 0 pour minimiser les calculs. A savoir la colonne 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{-2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=6} \underbrace{+0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=0} \underbrace{-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} = 7$$

Calculons à nouveau $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. La première ligne ne change pas et nous allons l'utiliser pour faire apparaitre des 0 sous le 1 en haut à gauche. Pour cela nous allons soustraire à la seconde ligne deux fois la première et à la troisième une fois la première.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

La seconde égalité c'est obtenue en développant le déterminant par rapport à la première colonne et la dernière égalité est le calcul des déterminants en dimension 2.

Exercice 5

Calculer les déterminants suivants :

1. $\texttt{det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$
2. $\texttt{det}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 199 & 22 & 7 \end{pmatrix}$
3. $\texttt{det}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
4. $\texttt{det}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5. $\texttt{det}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
6. $\texttt{det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. $\texttt{det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
8. $\texttt{det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} a+b & a & \dots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & yx & zx \\ xy & z^2+x^2 & zy \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix}$

Inverse matricielle

Rappelons que nous cherchons à résoudre le système matricielle $AX = B$ dont nous avons précédemment observé qu'une solution pourrait être $X = A^{-1}B$. Nous en sommes donc à nous demander : *qu'est-ce que* A^{-1} *?*.

Définition

On dira qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n$ tel que $AB = BA = Id_n$. Dans ce cas, la matrice B est appelé l'*inverse* de A.

Il faut considérer l'inverse comme dans l'ensemble des nombres réels. L'inverse de 19 est $\dfrac{1}{19}$ et ce nombre vérifie bien $19 \times \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{19} \times 19 = 1$ (le "1" de l'ensemble des matrices est la matrice identité).

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice inversible. Son inverse est unique et est noté A^{-1}.

Démonstration. Soient B_1 et B_2 des inverses : $B_1 = B_1 Id_n = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = Id_n B_2 = B_2$. $\square$

Déterminons une méthode de calcul pour inverser une matrice.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. La matrice des **cofacteurs** de A ou **comatrice** de A est la matrice, notée $Co(A)$ définie pour tout i et j de $[\![1; n]\!]$ par

$$Co(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \mathtt{det}(\hat{A}_{i,j})$$

où $\hat{A}_{i,j}$ est la matrice A où on a supprimé la ligne i et la colonne j.

Par exemple,

$$Co\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & 13 & -13 \\ 40 & -30 & 0 \\ 9 & -23 & 13 \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

(i). La matrice A est inversible si et seulement si $\mathtt{det}(A) \neq 0$.

(ii). Si A est inversible alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\mathtt{det}(A)} {}^t\mathrm{Co}(A)$.

Démonstration. Supposons que $\mathtt{det}(A) \neq 0$ et vérifions que $A\,{}^t\mathrm{Co}(A) = {}^t\mathrm{Co}(A)A = \mathtt{det}(A).\mathrm{Id}_n$.

$$\begin{aligned}
(A\,{}^t\mathrm{Co}(A))_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\,{}^t(\mathrm{Co}(A))_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\mathrm{Co}(A)_{j,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(-1)^{j+k}\mathtt{det}(\hat{A}_{j,k})
\end{aligned}$$

Si $i = j$ alors cette dernière égalité correspond au déterminant d'après le calcul du déterminant par développement.

Sinon, cette dernière ligne s'identifie à $\mathtt{det}(A')$ où A' est la même matrice que A sauf que la ligne j à été remplacée par la ligne i. Puisque i est différent de j, la matrice A' a deux lignes identiques ce qui implique que $\mathtt{det}(A') = 0$.

□

Par exemple $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-130} {}^t\begin{pmatrix} -39 & 13 & -13 \\ 40 & -30 & 0 \\ 9 & -23 & 13 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{130}\begin{pmatrix} 39 & -40 & -9 \\ -13 & 30 & 23 \\ 13 & 0 & -13 \end{pmatrix}$. En conclusion, pour savoir si un système, équivalent à l'équation matricielle $AX = B$ possède une unique solution il faut et il suffit que $\mathtt{det}(A)$ soit non nul. En particulier on trouve la solution en réalisant le calcul $A^{-1}B$.

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice inversible. Déterminer une relation simple entre $\mathtt{det}(A)$ et $\mathtt{det}(A^{-1})$.

Exercice 8

Pour chacune des matrices suivante, dire s'ils sont inversibles et si oui, donner son inverse.

1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 9

Discuter suivant les valeurs des paramètres (λ, a et b) des solutions éventuelles des système suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + y + z &=& 1 \\ x + \lambda y + z &=& 1 \\ x + y + \lambda z &=& 1 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} ax + by + z &=& 1 \\ x + aby + z &=& b \\ x + by + az &=& 1 \end{array}\right.$