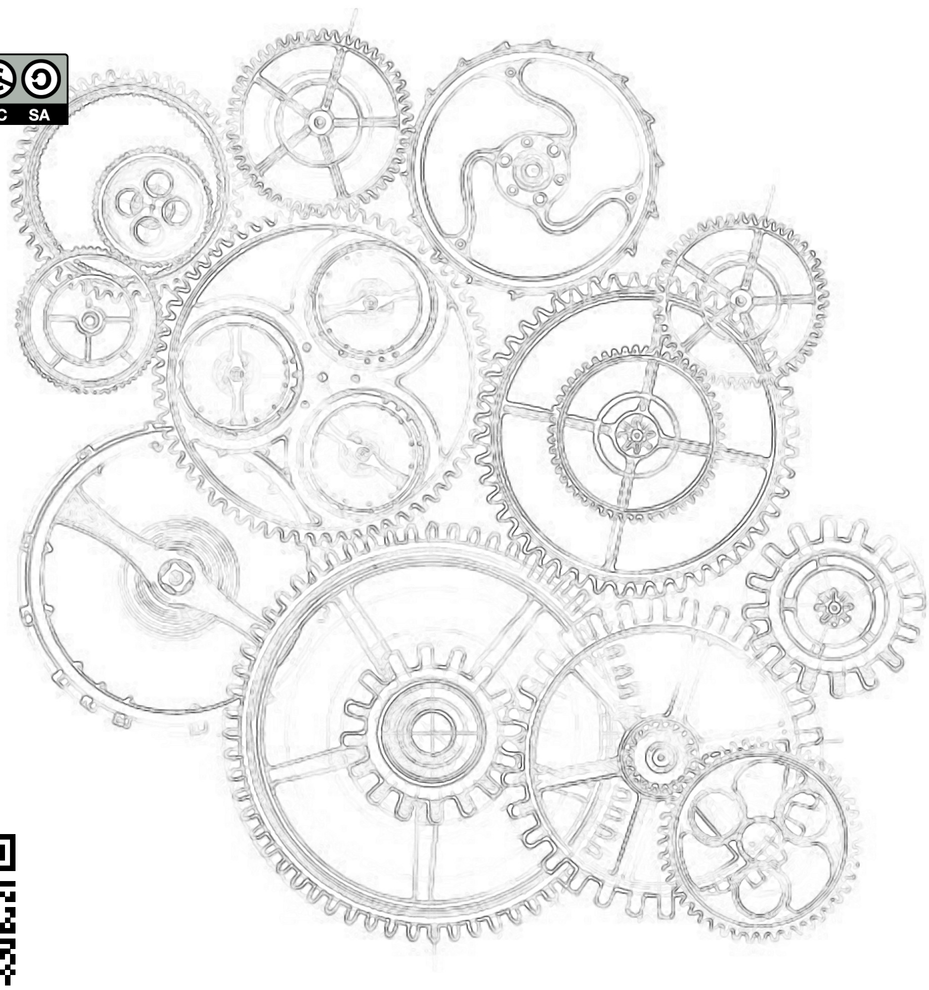
Exercices
Mathématiques des transmissions

David Hébert
hebert.iut@gmail.com

2021



Trigonométrie - Formule et formulaire

Exercice 1

1. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
2. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Exercice 2

Exprimer les expressions trigonométriques suivantes uniquement en fonction de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.
On parle de *délinéarisation*.

1. $\cos(2x)$
2. $\sin(2x)$
3. $\sin(4x)$
4. $\sin(3x)$
5. $\cos(5x)$
6. $1 - \sin^2(2x)$
7. $1 + \cos^2(2x)$
8. $\sin(x)\cos(2x)$

Exercice 3

Exprimer les expressions trigonométriques suivantes uniquement à l'aide du sinus.

1. $\cos(x)$
2. $\cos(x + 2020\pi)$
3. $\cos(x + 2021\pi)$
4. $\cos\left(4x - \frac{5\pi}{6}\right)$
5. $\cos^2\left(4x - \frac{5\pi}{6}\right)$
6. $\cos(x) + \sin(x)$
7. $\cos(2x) + \sin(2x)$
8. $\cos(2x) - \sin(2x)$
9. $\cos(2x)\sin(3x)$

Exercice 4

Exprimer les expressions trigonométriques suivantes uniquement à l'aide du cosinus.

1. $\sin(x)$
2. $\sin(x + 2020\pi)$
3. $\sin(x + 2021\pi)$
4. $\sin\left(4x - \frac{5\pi}{6}\right)$
5. $\sin^2\left(4x - \frac{5\pi}{6}\right)$
6. $\cos(x) + \sin(x)$
7. $\cos(2x) + \sin(2x)$
8. $\cos(2x) - \sin(2x)$
9. $\cos(2x)\sin(3x)$

Exercice 5

1. Pour tout réel x simplifier $A(x) = \cos(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)$
2. Pour tout réel x simplifier $B(x) = \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$

Trigonométrie - Équation *à la main*

Exercice 6

1. Déterminer la mesure de l'angle x tel que $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \\ \sin(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$
2. Déterminer la mesure de l'angle x tel que $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \\ \cos(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sin(x) = -1$
2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin(3x) = \frac{1}{2}$
4. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\sin\left(-3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{5\pi}{6}\right) = 0$

Exercice 8

Reprendre les équations précédentes et donner leur solution dans

1. $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right[$
2. $[2020\pi; 2021\pi[$

Trigonométrie - Équation *à la calculatrice*

Exercice 9

A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur approchée d'une solution, si c'est possible, de chacune des équations suivantes.

1. $\cos(x) = 0$
2. $\sin\left(\frac{1}{10}x\right) = 0.1$
3. $\cos\left(2^{10}x - 4096\right) = 0.2$
4. $\sin(-x + \pi) = 0.3$
5. $\cos\left(\frac{x}{10} - 1\right) = 0.4$
6. $\sin(\cos(x) + 1) = 0.5$
7. $\sin\left(\cos\left(5x - \frac{1}{3}\right)\right) = 0.6$
8. $\sin\left(x^2 - x\right) = 0.7$
9. $\cos\left(\cos(x)^2\right) = 0.8$
10. $\sin^2(1 - \sin(x)) = 0.9$

Fonction réciproque - Cadre général

Exercice 10

1. La fonction $f(x) = 3x + 4$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction réciproque.
2. Discuter, suivant les valeurs de a et de b de la fonction réciproque de $f(x) = ax + b$.

Exercice 11

En prenant soin de préciser les domaines, donner les fonctions réciproque des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2 - x - 6$
2. $g(x) = -x^2 + 4x - 3$
3. $h(x) = x^2 + x + 1$
4. $k(x) = \sqrt{x-1}$
5. $p(x) = -\sqrt{2x+4}$
6. $q(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$

Exercice 12

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante de $]0;+\infty[$ sur lui-même.

1. Déterminer la fonction réciproque de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Quelle est la fonction réciproque de f sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. En raisonnant de la même manière et en précisant les intervalles déterminer les fonctions réciproques de $g(x) = \frac{1}{x+1}$.

Exercice 13

1. Sans vous poser des questions de domaine, déterminer la fonction réciproque de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
2. De manière général, sans se poser des questions de domaine, déterminer la fonction réciproque de $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
3. En vous posant des questions de domaine, donner une condition nécessaire et suffisante pour que g admette une fonction réciproque sur des domaines à préciser.

Fonction réciproque - Trigonométrie

Exercice 14

Déterminer la valeur exacte des opérations suivantes.

1. $\operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)$
3. $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4. $\operatorname{Arcsin}(0)$
5. $\operatorname{Arctan}(0)$
6. $\operatorname{Arctan}(1)$
7. $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right)$
8. $\operatorname{Arctan}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Exercice 15

1. Pour quelle valeur de x, l'expression $\sin(\operatorname{Arccos}(x))$ est-elle définie.
2. En vous servant du théorème de Pythagore, proposez une simplification de $\sin(\operatorname{Arccos}(x))$.
3. De la même manière, en prenant soin de préciser les valeurs de x, déterminer une simplification de $\cos(\operatorname{Arcsin}(x))$.

Exercice 16

1. Dans un triangle rectangle les deux plus petit coté mesurent 13 et 22 centimètres. Déterminer la mesure des trois angles de ce triangle rectangle.
2. Même question avec des mesures de 1 et 0.01 centimètres.

Exercice 17

1. Soit $x \in [-\pi; 0]$ déterminer en fonction de x la valeur de $\text{Arccos}(\cos(x))$.
2. Même question si $x \in [2020\pi; 2021\pi[$.
3. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, simplifier l'expression $\sin(\text{Arcsin}(\sin(x)))$

Logarithme

En construction

Exponentielle

En construction

Nombre complexe - Forme cartésienne

Exercice 18

Mettre les nombres suivants sous la forme $a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. $(5-i)(7+2i)$
2. $(i-1)(3+7i)$
3. $(1+i)^2$
4. $(1+i)^4$
5. $\dfrac{1}{1-i}$
6. $\dfrac{i}{1+2i}$
7. $\dfrac{3+6i}{4-2i}$
8. $\dfrac{7-8i}{9+4i} + \dfrac{7+8i}{9-4i}$

Exercice 19

Déterminer le nombre conjugué des nombres complexes suivants.

1. $3-4i$
2. $\sqrt{7}i - \sqrt{2}$
3. $(1+i)^2$
4. $\dfrac{1}{1-i}$
5. $\dfrac{i}{1+i}$
6. $\dfrac{3+6i}{4-2i}$
7. $\dfrac{7-8i}{9+4i} + \dfrac{7+8i}{9-4i}$

Exercice 20

Soient $z_1 = 7 + 15i$ et $z_2 = -9 + i$. Déterminer la partie imaginaire de z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $\overline{z_1} \times z_2$ et $\dfrac{z_2}{z_1}$.

Exercice 21

Déterminer les racines des polynômes suivants dans $\mathbb{C}$.

1. $x^2 + x + 1$
2. $x^2 - x + 1$
3. $2x^2 + 4x + 2$
4. $-x^2 + 2x - 3$
5. $x^2 + 1$
6. $x^2 + 3x + 1$

Exercice 22

Déterminer les racines carrés des nombres complexes suivants.

1. 1
2. i
3. $3+4i$
4. $8-6i$
5. $7+24i$
6. -1

Exercice 23

Déterminer les racines des polynômes suivants dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2-(1+2i)z+i-1$
2. $z^2-\sqrt{3}z-i$
3. $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)$
4. $z^2-(3+4i)z-1+5i$
5. z^4+10z^2+169
6. z^4+2z^2+4

Nombre complexe - Forme polaire

Exercice 24

Mettre les nombre suivants sous forme cartésienne.

1. e^i
2. e^{1+i}
3. $e^{i\vartheta}+e^{2i\vartheta}$ où $\vartheta \in \mathbb{R}$.
4. $\dfrac{1}{1+e^{i\frac{\pi}{4}}}$

Exercice 25

Mettre les nombre suivants sous forme polaire.

1. $i-\sqrt{3}$
2. $\sqrt{2}(1-i)$
3. $7+7i$
4. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\sqrt{3}$

Exercice 26

Déterminer le module et l'argument des nombres suivants.

1. 1
2. -1
3. i
4. $-i$
5. $1+i$
6. $1-i$
7. $\sqrt{12}-2i$
8. e^i
9. e^{1+i}
10. $ie^{i\frac{\pi}{4}}$
11. $1+2e^{i\frac{\pi}{2}}$
12. $i+e^{\frac{\pi}{4}}$

Exercice 27

Calculer le module et l'argument des nombres $u=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v=1-i$. En déduire le module et l'argument de $\dfrac{u}{v}$.

Exercice 28

Soient $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2=e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. En déduire la forme exponentielle et cartésienne de z_1z_2.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 29

Soient $\vartheta \in \mathbb{R}$ et $z = e^{i\vartheta}$. Déterminer le module et l'argument de $1+z$ et $1+z+z^2$.

Exercice 30

Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de $\dfrac{1}{1+e^{i\alpha}}$ où $\alpha \in [0;\pi[$.

Exercice 31

Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de $\dfrac{1}{1-e^{i\alpha}}$ où $\alpha \in]0;\pi]$.

Exercice 32

1. Calculer le module et l'argument de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.
2. Calculer les racines carrés de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
4. En raisonnant de la même manière, trouver les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 33

Linéariser les expressions suivantes ($\vartheta \in \mathbb{R}$).

1. $\cos^2(\vartheta)$
2. $\sin^2(\vartheta)$
3. $\cos^2(\vartheta)\sin^2(\vartheta)$
4. $\cos(\vartheta)\sin^3(\vartheta)$
5. $\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)$
6. $\cos^2(\vartheta)\sin^3(\vartheta)$
7. $\cos(\vartheta)\sin^4(\vartheta)$
8. $\sin^5(\vartheta)$
9. $\cos^6(\vartheta)$

Exercice 34

Délinéariser les expressions suivantes ($\vartheta \in \mathbb{R}$).

1. $\cos(2\vartheta)$
2. $\sin(3\vartheta)$
3. $\cos(4\vartheta)$
4. $\sin(5\vartheta)$

Nombre complexe - Géométrie

Exercice 35

Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tel que

1. $|z| = 1$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-(1+i)| = \sqrt{2}$
4. $|2z-1| = 3$
5. $|z-1| = |z+1|$
6. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$
7. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 2$

Exercice 36

Dans le plan complexe on note A et B les points d'affixe respectives $-3+2i$ et $5-3i$. On considère l'application f qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z+3-2i}{z-5+3i}$$

1. Interpréter géométriquement le module de z' puis l'argument de z'.
2. Déterminer la partie réel et la partie imaginaire de z' en fonction de $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
3. Déterminer puis construire le ensembles suivants.
   (a) L'ensemble E_1 défini comme étant les point M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.
   (b) L'ensemble E_2 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit réel.
   (c) L'ensemble E_3 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur.
   (d) L'ensemble E_1 défini comme étant les point M d'affixe z tel que $|z'| = 2$.
   (e) L'ensemble E_2 défini comme étant les point M d'affixe z tel que z' soit réel strictement négatif.

Exercice 37

On se place dans le plan complexe de centre O. On fera un dessin que l'on complètera au fur et à mesure. On considère les points A, B et C d'affixe respectives $a = -1 + 2i$, $b = -2 - i$ et $c = -3 + i$.

1. Placer les points A, B et C.
2. Calculer $\dfrac{b}{a}$. En déduire la nature du triangle OAB.
3. On considère l'application qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par
$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}$$
   (a) Calculer l'affixe c' du point C' image de C par f et placer le point C' sur la figure.
   (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tel que $z \neq b$ et $|z'| = 1$.
   (c) justifier que $\mathcal{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathcal{E}$.
4. On appel J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. On appel K l'image du point C par la rotation r' de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On note L le milieu de $[JK]$. Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC

Exercice 38

Dans le plan complexe, on note r la rotation de centre O et de rayon $\dfrac{\pi}{6}$. On considère le point A d'affixe $z_A = -\sqrt{3}+i$, le point A_1 d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ (conjugué de z_A). On considère également B l'image de A_1 par r et on note z_B son affixe.

1. Ecrire le nombre z_A sous forme exponentielle et placer A et A_1 dans le repère ; on prendre $2\mathrm{cm}$ pour unité graphique.
2. Vérifier que $z_B = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
3. En déduire l'écriture cartésienne de z_B et placer B dans le repère.
4. Démontrer que le triangle OAB est isocèle en O.
5. On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisse et B' l'image de B_1 par la rotation r. Démontrer que $B' = A$.

Exercice 39

On se place dans le plan complexe. On appel f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que
$$z' = \frac{1}{z + 1}$$
Le but de l'exercice est de déterminer l'image de la droite D d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ par f.

1. Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respectives $z_A = -\dfrac{1}{2}$, $z_B = -\dfrac{1}{2} + i$ et $z_C = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.
   (a) Placer les points A, B et C dans un repère. On prendra $2\mathrm{cm}$ pour unité graphique.
   (b) Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ et placer ces points dans le repère.
   (c) Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. Soit g la transformation du plan qui à tout point du plan d'affixe z associe le point d'affixe $z+1$.
   (a) Qu'est-ce que g ?
   (b) Sans donner d'explication placer les points $A_1 = g(A)$, $B_1 = g(B)$ et $C_1 = g(C)$.
   (c) De même tracer D_1 l'image de D par g.
   (d) Démontrer que D_1 est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1| = |z|$
3. Soit h l'application qui a tout point du plan d'affixe $z \neq 0$ associe le point z' d'affixe $\dfrac{1}{z}$.
   (a) Justifier que $h(A_1) = A'$, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.
   (b) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 0$,

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z|$$

   (c) En déduire que l'image de D_1 par h est incluse dans un cercle dont on précisera les éléments caractéristiques. On tracera ce cercle sur la figure.

Exercice 40

Dans le plan complexe centré en O, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit f la transformation qui à tout point du plan d'affixe $z \neq 1$ associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2+i$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{C'}$ de $C' = f(C)$. On placera C et C' dans un repère cartésien.
   (b) Montrer que C' appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (c) Montrer que les points A, C et C' sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble Δ l'ensemble des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3. Représenter Δ.
4. Montrer que pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}$.
5. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel.
6. Que peut-on en déduire sur les points A, M et M' ?
7. Soient $\vartheta \in]0; 2\pi[$ et $z = e^{i\vartheta}$ un point de $\mathcal{C}$ distinct de A. Déterminer $A' = f(A)$ en fonction de ϑ.
8. Donner un programme de construction (uniquement avec une règle) de M' quelque soit le point M du plan.

Exercice 41

On se place dans le plan complexe et on considère les points A et B d'affixe respective $z_A = 1$ et $z_B = i$. A tout point M du plan d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = -iz$.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Déterminer la forme cartésienne de z.
   (b) En déduire la forma cartésienne de z'.
   (c) Placer les points A, B, M et M' dans un repère ; on prendra 2 centimètres pour unité graphique.
2. On reviens au cas général.
   (a) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[AM]$ en fonction de $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
   (b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   (c) Ecrire les coordonnées des points I, B, M'.
   (d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
   (e) Montrer que $BM' = 2OI$.

Exercice 42

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

1. Un point M est dit *invariant* lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que OAB est un triangle équilatérale (le point O est le centre du repère).
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tel que M' soit réel.
4. Dans le plan, placer A et B et tracer $\mathcal{E}$.

Exercice 43

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
   (a) Calculer le module et l'argument de a.
   (b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   (c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O (l'origine du repère) dont on déterminera le rayon.
   (d) Placer les points A, B et C dans le repère.
3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Montrer que $b' = 8$
   (b) Calculer le module et l'argument de a'. Dans la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$
4. On admet que si M et N sont deux points d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|m-n|$.
   (a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$. Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.
   (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ?

Exercice 44

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égale à 2 et dont l'argument est égale à $\dfrac{\pi}{3}$.
   (a) Calculer a^2 sous forme algébrique.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. Démontrer que si z est une solution de (E) alors son conjugué $\overline{z}$ l'est également.
4. En déduire toutes les solutions de (E) (on admettra que (E) a au plus 4 solutions).

Exercice 45

On se place dans le plan complexe centré en O. Soient A, B et C trois points sur un cercle de centre O et de rayon $r > 0$. Montrer que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$