TD7 - Récurrences

Exercice 1

Monter que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réel tel que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Monter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réel tel que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$. Monter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Exercice 4

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réel tel que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Monter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Exercice 6

Soit f une fonction dérivable une infinité de fois. On note $f^{[n]}$ la dérivé n-ième de f en convenant que $f^{[0]} = f$ ($f^[1] = f'$) et que la dérivé $(n+1)$-ième est la dérivé de la dérivé n-ième ($f^{[n+1]} = (f^{[n]})'$). Montrer les formules suivantes.

1. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f^{[n]}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.
2. Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$ alors $f^{[n]}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.
3. Si $f(x) = \sin(x)$ alors $f^{[2k+1]}(x) = (-1)^k \cos(x)$.
4. (Formule de Leibnitz) $(f(x)g(x))^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{[k]} g^{[n-k]}$

Exercice 7

On considère ici des divisions euclidienne (c'est à dire que nous ne manipulons que des nombres entiers). On note $a|b$ pour dire que a divise b. Cela équivaut à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b = ka$. Montrer les règles suivantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9|(10^{n+1} - 1)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3|(4^n - 1)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3|(4^n + 1)$