

# TD4 - Algèbre de boole

## Algèbre de Boole

### Exercice 1

Soient  $a, b$  et  $c$  trois éléments d'une algèbre de Boole  $\mathbb{B}$ .

1. Écrire le produit  $a.b$  en n'utilisant que l'addition et la complémentation.
2. Écrire la somme  $a + b$  en n'utilisant que la multiplication et la complémentation.
3. Soit  $E = (a.b.c) + (\bar{b}.c) + (\bar{a}.\bar{b})$ .
  - (a) Écrire le produit  $E$  en n'utilisant que l'addition et la complémentation.
  - (b) Écrire la somme  $E$  en n'utilisant que la multiplication et la complémentation.

### Exercice 2

Dans une algèbre de Boole  $\mathbb{B}$  on définit l'opération  $\downarrow$  par  $a \downarrow b = \overline{a + b}$ .

1. Exprimer  $\bar{a}$ ,  $a + b$  et  $a.b$  à l'aide du seul connecteur  $\downarrow$ .
2. Exprimer  $\bar{a} + b$  à l'aide du seul connecteur  $\downarrow$ .
3. Montrer que  $(a \downarrow c) \downarrow (a \downarrow b) = a + (b.c)$ .

### Exercice 3

Dans une algèbre de Boole  $\mathbb{B}$ , simplifier les expressions suivantes.

1.  $(\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}) + \overline{a + b + c}$
2.  $((a.\bar{d} + b)((a.\bar{d}) + c)$
3.  $(a.b) + (a.c) + (\bar{a}.b.c)$
4.  $a + (a.\bar{b}) + (a.b.c) + (\bar{b}.c) + (\bar{a}.b.c)$
5.  $b + \overline{(\bar{c} + \bar{d})} + \overline{(b.c)} + \overline{(\bar{c} + d)}$
6.  $\overline{(a.b)} + \bar{a} + \bar{b}$
7.  $(a + b)(\bar{a} + c)$
8.  $\overline{(a.c)} + \overline{(b.c)}$

### Exercice 4

Dans une algèbre de Boole  $\mathbb{B}$  quelconque, on considère l'opération "somme disjonctive" :

$$a \oplus b = (\bar{a}.b) + (a.\bar{b})$$

1. Calculer  $a \oplus 0$ ,  $a \oplus 1$ ,  $a \oplus a$  et  $a \oplus \bar{a}$ .
2. Calculer  $\overline{a \oplus b}$
3. Montrer que l'opération  $\oplus$  est commutative et associative.
4. Comparer  $a.(b \oplus c)$  avec  $(a.b) \oplus (a.c)$ . Qu'en déduisez-vous?
5. Comparer  $a \oplus (b + c)$  avec  $(a \oplus b) + (a \oplus c)$ . Qu'en déduisez-vous?
6. Montrer que  $a = b$  si et seulement si  $a \oplus b = 0$

### Exercice 5

Soient  $a$  et  $b$  une algèbre de Boole  $\mathbb{B}$ . Montrer que

$$(\exists x \in \mathbb{B}, (a + x = b + x) \wedge (a.x = b.x)) \iff a = b$$

### Exercice 6

Soit  $\mathbb{D}$  l'ensemble des diviseurs de 30. On considère sur  $\mathbb{D}$  les opérations suivantes.

- $a.b = \text{PGCD}(a, b)$ ,
- $a + b = \text{PPCM}(a, b)$ ,

- $\bar{a} = \frac{30}{a}$ .

1. Donner  $\mathbb{D}$  en extension.
2. Déterminer les complémentaires des éléments de  $\mathbb{D}$ .
3. Dresser les tables de multiplication et d'addition de  $\mathbb{D}$ .
4. Comparer  $\overline{3+5}$  et  $\overline{3.5}$
5. Comparer  $(3+5).10$  et  $(3.10) + (5.10)$ .
6. Quels sont les éléments neutres de l'addition et de la multiplication ?
7. Est-ce que  $\mathbb{D}$  est une algèbre de Boole ?

### Exercice 7

Soit  $\mathbb{D}$  l'ensemble des diviseurs de 12. On considère sur  $\mathbb{D}$  les opérations suivantes.

- $a.b = \text{PGCD}(a, b)$ ,
- $a + b = \text{PPCM}(a, b)$ ,
- $\bar{a} = \frac{12}{a}$ .

1. Donner  $\mathbb{D}$  en extension.
2. Déterminer les complémentaires des éléments de  $\mathbb{D}$ .
3. Dresser les tables de multiplication et d'addition de  $\mathbb{D}$ .
4. Quels sont les éléments neutres de l'addition et de la multiplication ?
5. Est-ce que  $\mathbb{D}$  est une algèbre de Boole ?

### Exercice 8

Dans une algèbre de Boole  $\mathbb{B}$ , montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

$P_1 : a + b = b$

$P_2 : a.b = a$

$P_3 : a.\bar{b} = 0$

Interpréter ces équivalences dans l'algèbre de Boole des parties d'un référentiel.