NOM :
PRENOM :
GROUPE :

Janvier 2019

Contrôle Examen
Mathématiques discrètes

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 15 min

Dans cet exercice on considère l'ensemble $\mathsf{X} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e}\}$ et la relation $\mathcal{R}$ définie par les couples

$$\{(\mathsf{a},\mathsf{a})(\mathsf{a},\mathsf{c})(\mathsf{a},\mathsf{d})(\mathsf{a},\mathsf{e})(\mathsf{b},\mathsf{b})(\mathsf{c},\mathsf{b})(\mathsf{c},\mathsf{c})(\mathsf{d},\mathsf{b})(\mathsf{d},\mathsf{c})(\mathsf{e},\mathsf{b})(\mathsf{e},\mathsf{c})(\mathsf{e},\mathsf{d})(\mathsf{e},\mathsf{e})\} \subseteq \mathsf{X} \times \mathsf{X}$$

1. Donner la matrice booléenne de $\mathcal{R}$. On pourra se contenter de ne mettre que les `true` $(= 1)$. 0.5

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

2. Donner une représentation sagittale de $\mathcal{R}$. 0.5

a

e b

d c

3. Expliquer quelles sont les propriétés (réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive) satisfaites par $\mathcal{R}$. Justifier. 2

4. Quelles sont les deux arcs à rajouter à $\mathcal{R}$ pour en faire une relation d'ordre ? Justifier brièvement. 1

Exercice 2

45 min

Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

On rappel que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. On considère la somme S des nombres paires entre 2 et 2020.
   (a) Écrire S à l'aide du symbole de sommation Σ. 1

   (b) Calculer la valeur de S. 1

2. Calculer la somme double suivante : $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} (i+j)$. 2

3. Un *ennéatriacontagone* est une polygone à 39 cotés. Sachant que le périmètre d'un ennéatriacontagone est 1482cm et que chaque coté a un centimètre de plus que son voisin, quelle est la longueur du plus petit des cotés ? 2

Exercice 3

15 min

Des relations binaires sur un ensemble X sont données ci dessous soit par leur définition ensembliste, leur représentation sagittale ou leur matrice booléenne. Entourer l'initiale de la ou les propriétés (réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive) quelles vérifient. Aucune justification n'est attendue.

1. S T A R

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[d] \\ d \arrow[u] & c \arrow[l] \end{tikzcd}$$

0.5

2. S T A R

	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	0
c	1	0	1

0.5

3. S T A R

$X = \{a, b, c\}$
$U =$
$\{(a, a)(a, b)(b, a)(b, b)(b, c)(c, c)\}$

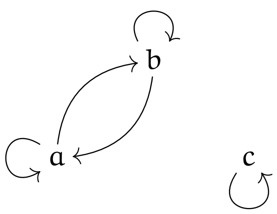
0.5

4. S T A R

	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	1
c	1	0	1	0
d	1	0	1	0

0.5

5. S T A R



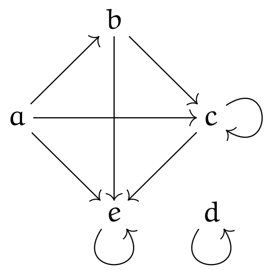
0.5

6. S T A R

$X = \{a, b, c, d, e\}$
$U =$
$\{(a, a)(a, b)(a, d)(a, e)(b, b)(b, c)$
$(c, c)(d, d)(d, c)(e, e)\}$

0.5

7. S T A R



0.5

8. S T A R

	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	0	1	0

0.5

9. S T A R

	a	b	c	d	e	f
a	1	0	1	1	0	1
b	0	1	0	1	0	0
c	1	0	1	1	0	0
d	1	1	1	1	0	1
e	0	0	0	0	1	0
f	1	0	0	1	0	1

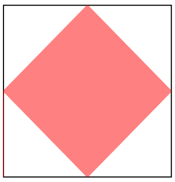
0.5

10. S T A R

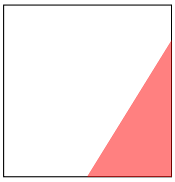
$X = \{a, b, c, d, e, f\}$
$U =$
$\{(a, a)(a, b)(a, f)(a, e)(b, b)(b, c)$
$(c, c)(d, f)(d, c)(e, e)(f, a)(f, f)\}$

0.5

Exercice 4 5 min



A



B

C

Considérons les trois sous-ensembles de $[0,1]^2$ suivants.
Indiquer les valeurs de vérité (1=VRAI, 0=FAUX) des propositions suivantes.
Chacune des colonnes représentent un des ensembles précédents. 2.5

	$X=A$	$X=B$	$X=C$	$X=\overline{B}$	$X=\overline{C}$
$\forall x,\ \forall y \quad (x,y)\in X$	0	0	0		
$\forall x,\ \exists y \quad (x,y)\in X$					
$\exists y,\ \forall x \quad (x,y)\in X$					
$\exists x,\ \forall y \quad (x,y)\in X$					
$\forall y,\ \exists x \quad (x,y)\in X$					
$\exists x,\ \exists y \quad (x,y)\in X$	1	1	1		

Exercice 5 30 min

Soit $(\mathcal{B},+,\times,\overline{\bullet},0,1)$ un algèbre de Boole.

1. Relier chaque dénomination à la définition littérale associée **et entourer** (dans la colonne de gauche) les axiomes qui définissent une algèbre de Boole. 2

Commutativité •	• $\forall a,b\in\mathcal{B},\ a+a\times b=a$
Associativité •	• $\forall a\in\mathcal{B},\ a+\overline{a}=1$
Neutralité •	• $\forall a,b,c\in\mathcal{B},\ a+b\times c=(a+b)\times(a+c)$
Distributivité •	• $\forall a,b\in\mathcal{B},\ \overline{a}+\overline{b}=\overline{a\times b}$
Idempotence •	• $\forall a\in\mathcal{B},\ a\times a=a$
Morgan •	• $\forall a\in\mathcal{B},\ a\times\overline{a}=0$
Absorption 1 •	• $\forall a\in\mathcal{B},\ a+1=1$
Tiers Exclus •	• $\forall a\in\mathcal{B},\ a\times 1=a$
Involution •	• $\forall a,b\in\mathcal{B},\ a+b=b+a$
Contradiction •	• $\forall a,b,c\in\mathcal{B},\ (a\times b)\times c=a\times(b\times c)$
Absorption 2 •	• $\forall a\in\mathcal{B},\ \overline{\overline{a}}=a$

2. Simplifier $x=(a+b)\times(a+b\times c)+\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$. 2