

Partiel Mathématiques discrètes

Exercice 1

10
min

Soit $\mathcal{E} = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{\{a\}\}\}$.

Dire si les propositions suivantes sont vraies, en entourant V, ou fausses en entourant F.

5

- | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. $\{a\} \in \mathcal{E}$ _____ | V | F | 6. $\{\{\{a\}\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$ _____ | V | F |
| 2. $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{E}$ _____ | V | F | 7. $\{a, \{\{a\}\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ _____ | V | F |
| 3. $a \in \mathcal{E}$ _____ | V | F | 8. $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$ _____ | V | F |
| 4. $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{E}$ _____ | V | F | 9. $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{E}$ _____ | V | F |
| 5. $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ _____ | V | F | 10. $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$ _____ | V | F |

Exercice 2

10
min

1. Compléter la table de vérité suivante

1

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

2. Quelle observation pouvez-vous faire ?

0.5

3. Simplifier l'expression $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ en donnant les règles utilisées à chaque étape du calcul.

1.5

Exercice 3

5
min
3

Faire un diagramme de Venn avec trois ensembles A, B et C et

- Colorer (hachurer) en rouge, l'ensemble $A \cup C$
- Colorer (hachurer) en vert, l'ensemble $B \cap \overline{A} \cap \overline{C}$
- Entourer en bleu l'ensemble $(A \cup C) \cap B \cap \overline{A} \cap \overline{C}$

Exercice 4

5
min
2

Simplifier l'expression suivante : $\overline{\left(\overline{(A \cap B)} \cup (\overline{A} \cap B) \right) \cap \left(\overline{(A \cap \overline{B})} \cup (\overline{A} \cap B) \right)}$

Exercice 5

30
min

En Papouasie, il y a des "papous" et des "pas-papous". Parmi les "papous" il y a des "papas papous" et des "papous pas papa". Mais il y a aussi des "papas pas papous" et des "pas papous pas papas". De plus, il y a des "papous pas papas à poux" et des "papas pas papous à poux". Mais il n'y a pas de "papas papous à poux" ni de "pas papous pas papas à poux". Sachant qu'il y a 240 000 poux (en moyenne 10 par tête) et qu'il y a 2 fois plus de "pas papous à poux" que de "papous à poux", déterminer le

nombre de "papous pas papas à poux" et en déduire le nombre de "papas pas papous à poux"!

On note A l'ensemble des papous, B l'ensemble des papas et C l'ensemble des individus avec des poux.

1. Relier chaque ensemble à droite avec sa traduction en langage courant à gauche

2

Les pas-papous	•	•	$A \cap B$
Les papas papous	•	•	\bar{A}
Les papous pas papa	•	•	$\overline{A \cup B}$
Les papas pas papous	•	•	$A \cap \bar{B}$
Les pas papous pas papas	•	•	$\bar{A} \cap B \cap C$
Les papous pas papa à poux	•	•	$\bar{A} \cap B$
Les papas pas papous à poux	•	•	$\bar{A} \cap C$
Les papas papous à poux	•	•	$\bar{A} \cap B \cap C$
Les pas papous à poux	•	•	$A \cap B \cap C$
Les papas pas papous à poux	•	•	$A \cap \bar{B} \cap C$

2. Que dire de $\#(A \cap B \cap C)$ et de $\#(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$?

0.5

3. Déterminer $\#(C)$.

0.5

4. Quelle relation existe entre $\#(\bar{A} \cap C)$ et $\#(A \cap C)$?

0.5

5. Représenter la situation à l'aide d'un diagramme de Venn.

0.5

6. Résoudre le problème.

0.5

Exercice 6

30
min

Considérons les prédicats suivants définis sur le référentiel \mathbb{R} :

$$p(x) = (x > 1), \quad q(x) = (x \leq 2)$$

Déterminer la classe des prédicats suivants :

1. $p(x)$ 0.5

2. $q(x)$ 0.5

3. $\neg p(x)$ 0.5

4. $p(x) \Rightarrow q(x)$ 0.5

5. $(\forall y \in \mathbb{R}, p(y) \Rightarrow q(x))$ 0.5

6. $(\exists x \in \mathbb{R}, p(y) \Rightarrow q(x))$ 0.5