Janvier 2017

NOM :
Prénom :
Groupe :

Examen

Mathématiques discrètes

- *La calculatrice n'est pas autorisée.*
- *Tous documents et tout moyen de communication sont prohibés.*
- *Ce document est composé du sujet de l'examen ainsi que du support de réponse.*
- *Il ne s'agit en aucun cas d'une feuille de brouillon.*
- *Vous êtes autorisé à pleurer (en silence).*
- *Assurez-vous de ne pas laisser tomber vos larmes sur la copie.*
- *Position fœtale permise.*
- *L'utilisation du 49.3 ne permet pas de résoudre les problèmes.*

Exercice 1

20 min

Soit $(\mathcal{B}, +, \times, \overline{\bullet}, 0, 1)$ un algèbre de Boole.

1. Relier chaque dénomination à la définition littérale associée **et entourer** (dans la colonne de gauche) **les axiomes** qui définissent une algèbre de Boole. 2

Commutativité •	• $\forall a, b \in \mathcal{B},\ a + a \times b = a$
Associativité •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ a + \overline{a} = 1$
Neutralité •	• $\forall a, b, c \in \mathcal{B},\ a + b \times c = (a + b) \times (a + c)$
Distributivité •	• $\forall a, b \in \mathcal{B},\ \overline{a} + \overline{b} = \overline{a \times b}$
Idempotence •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ a \times a = a$
Morgan •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ a \times \overline{a} = 0$
Absorption 1 •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ a + 1 = a$
Tiers Exclus •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ a \times 1 = a$
Involution •	• $\forall a, b \in \mathcal{B},\ a + b = b + a$
Contradiction •	• $\forall a, b, c \in \mathcal{B},\ (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Absorption 2 •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ \overline{\overline{a}} = a$

2. Démontrer, en ne vous servant que des axiomes d'une algèbre de Boole, la propriété d'idempotence. 1

3. Démonter que pour tout a et b de $\mathcal{B}$, $a + (\overline{a} \times b) = a + b$. 1

4. Soient $a, b, c \in \mathcal{B}$. Simplifier l'expression $x = (a + b) \times (a + b \times c) + \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$. 2

Exercice 2 — 30 min

On dispose d'une bouteille de 8 litres appelé a et remplis d'eau, de bouteille de 5 litres notée b et 3 litres noté c toutes deux vides. On ne dispose d'aucun moyen de mesure.

L'objectif de ce problème est d'obtenir exactement 4 litres dans la bouteille de 8 et de 5 litres.

A cette fin nous ne pouvons exécuter que des transvasements. C'est à dire verser le contenu d'une bouteille dans une autre jusqu'à que la seconde soit pleine ou la première complètement vide. On supposera qu'il n'y a pas de perte d'eau pendant les manipulations.

Nous souhaitons de plus trouver la solution nécessitant le moins de transvasement.

Pour cela on considère le graphe où les sommets sont des triplets (a, b, c) représentant respectivement la quantité d'eau, en litre, contenu dans la bouteille de 8, 5 et 3 litres. On dénombre 24 sommets référencés ci-dessous.

$A = (8,0,0)$	$E = (6,1,1)$	$I = (5,2,1)$	$M = (4,3,1)$	$Q = (3,4,1)$	$U = (2,5,1)$
$B = (7,0,1)$	$F = (6,2,0)$	$J = (5,3,0)$	$N = (4,4,0)$	$R = (3,5,0)$	$V = (1,4,3)$
$C = (7,1,0)$	$G = (5,0,3)$	$K = (4,1,3)$	$O = (3,2,3)$	$S = (2,3,3)$	$W = (1,5,2)$
$D = (6,0,2)$	$H = (5,1,2)$	$L = (4,2,2)$	$P = (3,3,2)$	$T = (2,4,2)$	$X = (0,5,3)$

On considère la relation interne définie par exactement un transvasement. Ainsi B est en relation avec A car il suffit de verser le contenu de c dans a mais A n'est pas en relation avec B.

La matrice booléenne de cette relation est la suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
A	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
B	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
E	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
F	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0			0	0	0	0	0
G	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	1
H	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	1	0
I	0	1	0	0	0	1													0	0	1	0	0	0
J	1	0	0	0	0		1	0		0	0	0	0	0	0		0	1	1	0	0	0	0	0
K	0	0	1	0		0	1	0		0	0	0	0	1	0		0	0	0	0	0	0	0	1
L	0	0	0	1	0		0	0		0	1	0	0	1	1		0	0	0	0	0	0	1	0
M	0	1	0	0	0	0	0	0		1	1	0	0	1	0		0	0	1	0	1	0	0	0
N	1	0	0	0	0	0	0		0	0	1	0	0	0	0		0	1	0	0	0	1	0	0
O	0	0	0	0	0	1	1		0	0	0	0	0	0	0		0	1	0	0	0	0	0	1
P	0	0	0		0	0	0		0	1	0	0	0	0	1		0	1	1	0	0	0	1	0
Q	0	1	0	0		0		0	0	0	0	0	0	1	1		0	1	0	0	1	1	0	0
R	1	0	0	0		0		0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	1
S	0	0	0	0	0		1	0	0	1	0	0	0	0	0		0	0	0	0	1	0	0	1
T	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
U	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
V	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
W	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
X	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

1. Compléter les valeurs booléennes manquantes dans la matrice précédente. 1.5
2. Donner une solution au problème. On prendra soin de détailler la démarche ainsi que d'expliquer pourquoi la solution proposée est celle nécessitant le moins de transvasement. 2

Exercice 3

30 min

Soit $p(x, y, z) = (xy = z)$; les variables prenants leurs valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Quelles sont les valeurs de vérités de $p(0, 7, 0)$, $p(2, 6, 3)$ et $p(0, 0, 0)$? 1

2. Déterminer la classe des prédicats suivants.

   (a) $\exists x,\ p(x, y, 12)$ 1

   (b) $\exists z,\ p(x, 1, z)$ 1

   (c) $\forall z,\ p(x, 1, z)$ 1

   (d) $\forall x, \exists z,\ p(x, y, z)$ 1

3. Déterminer la valeur de vérité de la proposition $\exists x, \forall z,\ p(x, 1, z)$. 1

4. Déterminer la valeur de vérité de la proposition $\forall x, \exists z,\ p(x, 1, z)$. 1

Exercice 4

30 min

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ par l'ensemble des relations suivantes :

$$\{(a,a)\ (a,b)\ (a,c)\ (b,b)\ (b,c)\ (d,b)\ (d,c)\ (d,d)\ (d,f)\ (f,e)\ (f,f)\ (e,c)\ (e,e)\}$$

.

1. Donner la représentation sagittale de $\mathcal{R}$. 0.5

2. Donner la représentation matricielle de $\mathcal{R}$. 0.5

3. La relation $\mathcal{R}$ est-elle antisymétrique ? Justifier brièvement. 1

4. Rappeler la définition d'une relation d'ordre. Expliquer pourquoi $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre. 1

5. Que faut-il ajouter comme relation pour faire de $\mathcal{R}$ une relation d'ordre ? 1