

Partiel Mathématiques discrètes

Exercice 1

10
min

Questions de cours.

1. Soient p et q deux propositions.
 - (a) Donner la réciproque de $p \Rightarrow q$. 0.25
 - (b) Donner la contraposé de $p \Rightarrow q$. 0.5
 - (c) Donner l'inverse de $p \Rightarrow q$. 0.25
2. Quelle est la définition de la classe d'un prédicat $p(x)$ sur un référentiel \mathcal{E} ? 0.5
3. Donner la négation de l'expression quantifiée suivante $\forall x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k + 1$. 0.5
4. Soit $A = \{a, b, c\}$. Quelle est la cardinalité de $\mathcal{P}(A)$? 0.5
5. Soient P la classe d'un prédicat $p(x)$ et Q la classe d'un prédicat $q(x)$. Quelle est la classe du prédicat $p(x) \Rightarrow q(x)$? 0.5

Exercice 2

30
min

En Papouasie, il y a des "papous" et des "pas-papous". Parmi les "papous" il y a des "papas papous" et des "papous pas papa". Mais il y a aussi des "papas pas papous" et des "pas papous pas papas". De plus, il y a des "papous pas papas à poux" et des "papas pas papous à poux". Mais il n'y a pas de "papas papous à poux" ni de "pas papous pas papas à poux". Sachant qu'il y a 240 000 poux (en moyenne 10 par tête) et qu'il y a 2 fois plus de "pas papous à poux" que de "papous à poux", déterminer le nombre de "papous pas papas à poux" et en déduire le nombre de "papas pas papous à poux"!

On note A l'ensemble des papous, B l'ensemble des papas et C l'ensemble des individus avec des poux.

1. Relier chaque ensemble à droite avec sa traduction en langage courant à gauche 2

Les pas-papous	•		•	A ∩ B
Les papas papous	•		•	\overline{A}
Les papous pas papa	•		•	$\overline{A \cup B}$
Les papas pas papous	•		•	$A \cap \overline{B}$
Les pas papous pas papas	•		•	$\overline{A} \cap B \cap C$
Les papous pas papa à poux	•		•	$\overline{A} \cap B$
Les papas pas papous à poux	•		•	$\overline{A} \cap C$
Les papas papous à poux	•		•	$\overline{A} \cap B \cap C$
Les pas papous à poux	•		•	$A \cap B \cap C$
Les papas pas papous à poux	•		•	$A \cap \overline{B} \cap C$

2. Que dire de $\#(A \cap B \cap C)$ et de $\#(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$? 0.5

3. Déterminer $\#(C)$. 0.5

4. Quelle relation existe entre $\#(\bar{A} \cap C)$ et $\#(A \cap C)$? 0.5

5. Représenter la situation à l'aide d'un diagramme de Venn. 0.5

6. Résoudre le problème. 0.5

Exercice 3

10
min

En utilisant les propriétés des propositions simplifier l'expression suivante.

2

$$(p \implies (p \wedge (q \vee \neg q))) \implies (r \wedge (r \vee q))$$

Exercice 410
min

Compléter la table de vérité suivante

1.5

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Quelle observation pouvez-vous faire?

0.5

Exercice 530
minSoit $p(x, y, z) = (xy = z)$; les variables prennent leurs valeurs dans \mathbb{N} .1. Quelles sont les valeurs de vérité de $p(0, 7, 0)$, $p(2, 6, 3)$ et $p(0, 0, 0)$?

1

2. Considérons l'expression quantifiée $\exists x, \forall z, p(x, y, z)$ identifier les variables libres et les variables liées.

3. Déterminer la classe des prédicats suivants.

(a) $\exists x, p(x, y, 12)$

1

(b) $\exists z, p(x, 1, z)$

0.5

(c) $\forall z, p(x, 1, z)$

0.5

4. Déterminer la valeur de vérité de la proposition $\exists x, \forall z, p(x, 1, z)$.

0.5

5. Déterminer la valeur de vérité de la proposition $\forall x, \exists z, p(x, 1, z)$.

0.5

Exercice 6

10
min

Simplifier l'expression suivante : $\overline{(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A} \cap B)} \cap \overline{(\overline{A \cap \overline{B}}) \cup (\overline{A} \cap B)}$

2

Exercice 7

15
min

Dans \mathbb{R}^2 on considère les prédicats $p(x, y) = (x - y = -1)$ et $q(x, y) = (x = 2y)$. Représenter dans le repère cartésien, la classe de $p(x, y)$, la classe de $q(x, y)$ et la classe de $p(x, y) \wedge q(x, y)$.

2

