Janvier 2016

NOM :
Prénom :
Groupe :

Examen

Mathématiques discrètes

- *La calculatrice est autorisée.*
- *Documents et tout moyen de communication sont prohibés.*
- *Ce document est composé du sujet de l'examen ainsi que du support de réponse.*
- *Il ne s'agit en aucun cas d'une feuille de brouillon.*
- *Vous êtes autorisé à pleurer (en silence).*
- *Assurez-vous de ne pas laisser tomber vos larmes sur la copie.*
- *Position fœtale permise.*

Exercice 1

15 min

Questions de cours.

1. Quelle est la réciproque de $p \Rightarrow q$? 0.25

2. Donner la table de vérité de $p \Rightarrow q$. 0.25

3. Dans une expression quantifiée, qu'est-ce qu'une variable libre ? 0.25

4. Donner la négation de $\forall x \in \mathbb{C}, x^2 + x + 1 \neq 0$. 0.25

5. Exprimer à l'aide de quantificateur la définition d'une relation binaire $\mathcal{R}$ réflexive. 0.5

6. Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Combien de relation binaire différente peut-on construire sur E ? 0.5

Exercice 2

45 min

Soit $(\mathcal{B}, +, \times, \overline{\bullet}, 0, 1)$ un algèbre de Boole.

1. Relier chaque dénomination à la définition littérale associée **et entourer** (dans la colonne de gauche) les axiomes qui définissent une algèbre de Boole. 2

Commutativité •	• $\forall a, b \in \mathcal{B},\ a + a \times b = a$
Associativité •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ a + \overline{a} = 1$
Neutralité •	• $\forall a, b, c \in \mathcal{B},\ a + b \times c = (a+b) \times (a+c)$
Distributivité •	• $\forall a, b \in \mathcal{B},\ \overline{a} + \overline{b} = \overline{a \times b}$
Idempotence •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ a \times a = a$
Morgan •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ a \times \overline{a} = 0$
Absorption 1 •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ a + 1 = a$
Tiers Exclus •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ a \times 1 = a$
Involution •	• $\forall a, b \in \mathcal{B},\ a + b = b + a$
Contradiction •	• $\forall a, b, c \in \mathcal{B},\ (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Absorption 2 •	• $\forall a \in \mathcal{B},\ \overline{\overline{a}} = a$

2. Démontrer, en ne vous servant que des axiomes d'une algèbre de Boole, la propriété d'idempotence. 1

3. Démonter que pour tout a et b de $\mathcal{B}$, $a + (\overline{a} \times b) = a + b$. 0.5

4. Soient $a, b, c \in \mathcal{B}$. Posons $x = (a + b) \times (a + b \times c) + \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$.

   (a) Réaliser le diagramme de Karnaugh de x. Que pouvez-vous conjecturer sur l'expression de x ? 1

   (b) Prouver, en justifiant les propriétés utilisées, la conjecture précédente. 1.5

Exercice 3

10 min

Soit $E = \mathcal{D}^+(4) = \{1, 2, 4\}$ l'ensemble des diviseurs positifs de 4. On pose :

Addition ($+_E$) : $\forall a, b \in E,\ a +_E b = \mathrm{PPCM}(a, b)$.

Multiplication ($\times_E$) : $\forall a, b \in E,\ a \times_E b = \mathrm{PGCD}(a, b)$.

Conjugué ($\overline{\bullet}^E$) : $\forall a, b \in E,\ \overline{a}^E = \dfrac{4}{a}$.

Éléments neutres (0_E et 1_E) : $0_E = 1$, $1_E = 4$.

On admettra que cette addition et multiplication sont associatives et distributives.

Ces données font-elles de $(E, +_E, \times_E, \overline{\bullet}^E, 0_E, 1_E)$ une algèbre de Boole ? Justifier avec précision. 1

Exercice 4

15 min

Sur $\mathbb{N}$ on considère les prédicats $p(n)$ et $q(n)$ définis par :

- $p(n) = \Big(\exists K \in \mathbb{N}, n^2 = 2K+1\Big)$.
- $q(n) = \Big(\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1\Big)$.

1. Expliquer pourquoi $\neg p(n) = \Big(\exists K' \in \mathbb{N},\ n^2 = 2K'\Big)$? 0.5

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer $p(n) \Rightarrow q(n)$ par contraposé. 1

Exercice 5

30 min

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^k} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}$$

.

1. Calculer S_0, S_1 et S_2. 1

2. Montrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ que $S_n = 3 - \dfrac{1}{3^n}$ 2

3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. 1

Exercice 6

30 min

Soit $p(x, y, z) = (xy = z)$; les variables prenants leurs valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Quelles sont les valeurs de vérités de $p(0, 7, 0)$, $p(2, 6, 3)$ et $p(0, 0, 0)$? 1

2. Considérons l'expression quantifiée $\exists x, \forall z,\ p(x, y, z)$ identifier les variables libres et les variables liées. 0.5

3. Déterminer la classe des prédicats suivants.
   (a) $\exists x,\ p(x, y, 12)$ 1

   (b) $\exists z,\ p(x, 1, z)$ 0.5

   (c) $\forall z,\ p(x, 1, z)$ 0.5

4. Déterminer la valeur de vérité de la proposition $\exists x, \forall z,\ p(x, 1, z)$. 0.5

5. Déterminer la valeur de vérité de la proposition $\forall x, \exists z,\ p(x, 1, z)$. 0.5

Exercice 7

30 min

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ par l'ensemble des relations suivantes :

$$\{(a, a)\ (a, b)\ (a, c)\ (b, b)\ (b, c)\ (d, b)\ (d, c)\ (d, d)\ (d, f)\ (f, e)\ (f, f)\ (e, c)\ (e, e)\}$$

.

1. Donner la représentation sagittale de $\mathcal{R}$. 0.5

2. Donner la représentation matricielle de $\mathcal{R}$. 0.5

3. La relation $\mathcal{R}$ est-elle antisymétrique ? Justifier brièvement. 0.5

4. Rappeler la définition d'une relation d'ordre. Expliquer pourquoi $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre. 1

5. Que faut-il ajouter comme relation pour faire de $\mathcal{R}$ une relation d'ordre ? 1