NOM :
PRENOM :
GROUPE :

Novembre 2014

Contrôle 3
Démonstration - Correction

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.
La calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1

10 min

Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n+1$$

On considère le prédicat $P(n)$: $2^n \geqslant n+1$.

- Vérifions $P(0)$.

  D'un coté $2^0 = 1$; d'un autre coté $0+1=1$.

  On a ainsi $2^0 \geqslant 0+1$.

- Supposons que pour un n quelconque fixé $2^n \geqslant n+1$ soit vrai.

  Montrons que $2^{n+1} \geqslant n+2$.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2.2^n \\ &\geqslant 2(n+1) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\geqslant 2n+2 \\ &\geqslant n+n+2 \\ &\geqslant n \quad \text{puisque } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

8

- Conclusion : nous avons montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vrai.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n+1$$

Exercice 2

20 min

On va démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Compléter la table de vérité suivante 2

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$\neg p \Rightarrow q$	$(\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

2. Déduire de la question précédente l'expression simplifier de $(\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$. 1
   On observe que $(\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$ et p on les mêmes valeurs de vérité. On en déduit que $(\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) = p$.
3. Retrouver le résultat précédent en utilisant et EN CITANT, les règles de simplification des propositions (CANDIMATICA). 2

$$\begin{aligned} (\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) &= (\neg(\neg p) \vee \neg q) \wedge (\neg(\neg p) \vee q) \quad \text{Caractérisation de l'implication} \\ &= (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \quad \text{Involution} \\ &= p \vee (\neg q \wedge q) \quad \text{Distributivité} \\ &= p \vee \mathcal{F} \quad \text{Contradiction} \\ &= p \quad \text{Élément neutre} \end{aligned}$$

4. On considère p="$\sqrt{2}$ est irrationnel", q="$\sqrt{2} = a/b$ où a et b ne sont pas paire en même temps".
   (a) Justifier que $\neg p \Rightarrow q$. 1

   La proposition $\neg p$ donne que $\sqrt{2}$ est rationnelle. Par définition, être rationnelle signifie qu'il existe a et b tel que $\sqrt{2} = a/b$. De plus on peut supposer que a et b ne sont par paires en même temps. En effet s'ils l'étaient, il suffirait de simplifier la fraction pour se ramener à ce cas.

   On a ainsi montré que $\neg p \Rightarrow q$.

   (b) i. Montrer par contraposé que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est paire alors n est paire. 2.5

   L'énoncé contraposé de "Si n^2 paire alors n est paire" est "Si n est impaire alors n^2 est impaire". Montrons cette dernière proposition.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre impaire. Par définition, cela signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

   Dans ce cas $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ soit encore $n^2 = 2K + 1$ où $K = 2k^2 + 2k$.

   Par définition, cela signifie que n^2 est un nombre impaire.

   Ceci prouve le résultat.

   ii. En utilisant la proposition précédente, montrer que $\neg p \Rightarrow \neg q$. 2.5

   Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Cela signifie que $\sqrt{2} = a/b$.

   En élevant au carré cette expression et en effectuant un produit en croix, on arrive à $a^2 = 2b^2$.

   Ceci signifie que a^2 est paire.

   D'après la proposition établie à la question précédente, a est paire ; il se met donc sous la forme $a = 2\alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{N}$.

   D'une part on a $a^2 = 2b^2$ d'un autre coté $a = 2\alpha$ soit encore $a^2 = 4\alpha^2$. Ce qui nous permet d'aboutir à $4\alpha^2 = 2b^2$, soit encore en simplifiant par 2 à $b^2 = 2\alpha^2$

   Ainsi b^2 est paire et donc b est paire d'après la proposition de la question précédente.

   On a ainsi prouvé que si $\sqrt{2}$ est rationnel alors il se met sous la forme a/b où a et b sont paires.

5. Conclure en utilisant les résultats précédent et la question 2. 1

   Aux questions précédente on a prouvé que $\neg p \Rightarrow \neg q$ est vrai et que $\neg p \Rightarrow q$ est vrai. Ainsi $(\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$ est vrai et a la même valeur de vérité que la proposition p d'après la question 2 (ou 3).

   Ainsi p est vrai et $\sqrt{2}$ est irrationnel. Nous avons raisonné par l'absurde.