

# Contrôle de théorie des graphes



Vous vous réveillez dans un Paris vide... pas un parisien, pas un touriste, les feuilles de papier journaux relatant d'un 49.3 volent au vent... quelques poubelles fumantes font s'étouffer un feu ancien... Vous êtes seul. Enfin pas tout à fait, quelques camarades de votre groupe TD sont avec vous.

Un homme arrive devant vous : "Je n'en peux plus, je m'arrête. Tiens, prend cette carte du terrain de jeu" et vous le voyez disparaître devant vos yeux. Un camarade comprend que vous êtes tombé dans le terrier du lapin.

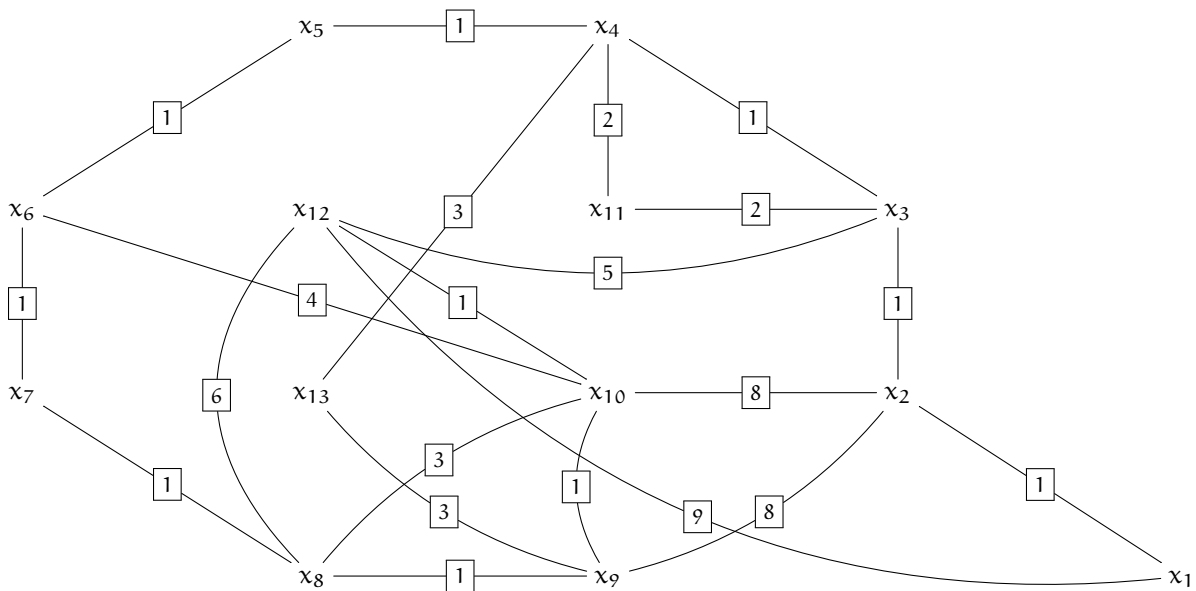
Pour ne pas disparaître, vous devez jouer à des jeux. Chaque jeu fait appel à votre force, votre intelligence ou encore votre esprit d'équipe...

Le niveau de difficultés des jeux est représenté par des cartes... et la partie en est au niveau des figures... survivrez vous ?

On modélise le problème à l'aide d'un graphe.

- Les sommets représentent **les différents quartiers** de Paris, le terrain de jeu.
- Les arcs représentent **les routes** qui relient les quartiers.
- La valuation représente le temps en minutes pour passer d'un quartier à l'autre en velib'.

Voici la carte du terrain de jeu :





**Calculs préliminaires.**

1. Donnez la matrice booléenne augmenté par la valuation de ce graphe. On pourra laisser les cases vides à la place de 0.

1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
$x_1$													
$x_2$													
$x_3$													
$x_4$													
$x_5$													
$x_6$													
$x_7$													
$x_8$													
$x_9$													
$x_{10}$													
$x_{11}$													
$x_{12}$													
$x_{13}$													

2. Déterminez les degrés de chacun des sommets.

1

Sommet	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
$d^1(\bullet, \mathcal{G})$													

3. Appliquez l'algorithme de Brelaz.

2

Som													
DSAT													
DSAT													
DSAT													
DSAT													
DSAT													
DSAT													
DSAT													
DSAT													
DSAT													
DSAT													
DSAT													
DSAT													
Couleur													

4. En déduire le nombre chromatique de ce graphe.

1



**La dame de pique** est un personnage qui passe de quartier en quartier et fait un bisou à tous ceux qu'elle croise. Le joueur embrassé disparaît alors instantanément. Vous souhaitez l'éviter à tout pris. Vous croisez un autre joueur, le *chapelier*, qui est prêt à vous donner des détecteurs que vous pouvez placer dans chaque quartier vous indiquant alors, en temps réel, la position de la reine de pique.

1. Vous vous dites qu'il serait probablement astucieux, lorsque vous installerez les détecteurs, d'en profiter pour découvrir le terrain de jeu en traversant toute les routes une et une seule fois. Cela est-il possible? Justifiez. 1

2. Vous avez placé les détecteurs et retournez voir le *chapelier* qui, en fourbe qu'il est, vous indique :

Pour qu'un détecteur fonctionne, il faut qu'il soit connecté à au moins un autre et qu'en plus il existe un chemin qui relie n'importe quelle paire de détecteur. Une fois tous les détecteurs interconnectés alors tu pourras suivre la position de la reine de pique sur ton téléphone. Mais le temps que les détecteurs s'interconnectent tu va devoir attendre de heures hi hi hi!

Sachant que le temps de connexion entre deux détecteurs est le temps indiqué sur le graphe, combien de temps minimum devrez-vous attendre pour pouvoir localiser la dame de pique? 1.5

**Le valet de cœur** vous appelle sur votre téléphone.

J'ai enlevé tous tes camarades de TD. Ils sont avec la dame de pique au sommet de la tour Eiffel. Elle attend de savoir combien de bisous elle a le droit de distribuer et c'est toi qui va me donner ce nombre. Tu trouveras au centre de chaque quartier, un casier avec un clavier numérique. Saisi un nombre. Le plus grand nombre que tu saisira tout quartier confondu sera le nombre de bisous que donnera la dame de pique. Pour t'éviter de saisir 0 à chaque fois, il y a une règle supplémentaire : deux quartiers reliés par une route ne peuvent porter le même numéro. Si tu te trompe, tout ton groupe de TD sera embrassé par la dame de pique.

1. Quel est le plus petit nombre de bisous possible? 0.5

2. Indiquer quel numéro saisir dans quel quartier. 1.5

**L'as de trèfle** vous invite à une course en vélib'. Vous partez de la tour Eiffel (sommet  $x_8$ ) et devez arriver le plus vite possible à place des fêtes (sommet  $x_1$ ). L'as de trèfle rajoute :

Mon record est de 8 minutes. Tu peux abandonner maintenant !

1. Pensez-vous pouvoir gagner cette course? 0.5

2. Par quel quartier devrez-vous passer pour faire le meilleur temps? 1

**Le roi de carreau** vous regarde arriver et vous propose un dernier jeu. Si vous gagnez, il vous révélera un grand secret.

Il dispose devant vous deux tas de 26 cartes rangés par couleurs (les rouges  $\heartsuit$  et les noires  $\clubsuit$ ). Vous allez à tour de rôle prendre au moins une carte dans un tas ; c'est à dire dans un tas et un seul vous pouvez prendre d'une à 26 cartes. Le gagnant à ce jeu est celui qui prend la dernière carte.

Le roi vous pose cette question

### Tu commences ou je commence ?

On considère un graphe dont les sommets sont des couples  $(x, y)$  où  $x$  représente le nombre de carte rouge et  $y$  le nombre de carte noire. On choisi de connecter deux sommets lorsqu'il est possible de passer d'un nombre de carte par tas à un autre.

Par exemple il est possible de passer du sommet  $(12, 24)$  au sommet  $(2, 24)$  en prenant 10 cartes rouges.

1. Combien de sommet possède ce graphe? 0.5

2. Expliquer simplement pourquoi ce graphe possède un noyau. 0.5

3. Quels sont les successeurs du sommet  $(1, 1)$ ? 0.5

4. Donner une condition sur  $a$  et  $b$  pour qu'il existe un arc  $(a, y) \rightarrow (b, y)$ . On prendra soin de distinguer les cas  $a = 0$  et  $a > 0$ . 0.5
5. Donner une condition sur  $a, b, c$  et  $d$  pour qu'il existe un arc  $(a, c) \rightarrow (b, d)$ . 0.5
6. Quels sont les prédécesseurs du sommet  $(0, 0)$ ? 1
7. Calculer exactement le noyau de ce graphe est un peu compliqué. Mais les questions précédentes vous guident un peu. Sans justifier, donner son noyau. 1
8. Que répondre au roi de carreau? 0.5

**(Bonus) Les dealers** sont des joueurs mais qui travaillent pour les cartes; c'est ce que vous apprend le roi de carreau. Certains de vos camarades sont des dealers. Vous avez appris qu'un journal contenant le nom de tous les dealers se trouve enfermé dans un coffre. Le roi de carreau vous a indiqué la position du coffre sur la carte. Arrivé devant le coffre, vous le trouvez fermé par un étrange mécanisme. Trois led, sont initialement éteintes. Si vous arrivez à toutes les allumer alors le coffre s'ouvrira. Il y a quatre interrupteurs. L'action de chacun des interrupteurs modifie l'état des leds si elles sont allumées elles s'éteignent et inversement. Les quatre interrupteurs sont appelés A, B, C et D. Vous effectuez quelques tests pour essayer de comprendre l'action des interrupteurs sur les leds. Vous synthétisez vos observations dans le tableau suivant mais ne vous intéressez qu'au nombre de led allumées.

	A	B	C	D
0	0	0	1	1
1	1	2	0	0,1
2	0,1	2	2,3	0
3	0	1	2	3

Ce problème passe par l'utilisation d'un automate non déterministe et complet

1. Quels sont les états initiaux et finaux de cet automate? 0.5

2. Donnez l'algorithme déterministe associé à cet algorithme. 2

3. Quels interrupteurs actionner pour ouvrir le coffre? 0.5

**Épilogue.** Vous ouvrez le coffre. Vous ne vous attendiez pas à trouver ce que vous voyez. Mais qu'y avez-vous trouvé? ∞