

Examen Graphes et langages

La Death Note défectueuse

Les parties 3 et 4 peuvent être traitées indépendamment du reste.
En aucun cas les enseignants ne souhaitent la mort de leurs étudiants.
Il ne s'agit que de *romancer* l'examen.



Les *shinigami* sont des démons de la mythologie japonaise, communément appelés *dieux de la mort*. Ils ont en leur possession un carnet magique, la *death note*, qui à la propriété que toute personne dont le nom est écrit meurt dans les secondes qui suivent (vous pourrez découvrir d'autres règles de ce carnet dans le manga éponyme). Grâce à l'*oeil de shinigami* ces démons ont la capacité de connaître le nom de chaque humain qu'il regarde.

Au moment même où vous lisez ces lignes, un shinigami très ancien (que normalement personne ne peut voir) viens d'entrer dans cette salle d'examen. Il dispose de sa death note mais celle ci est toute aussi ancienne que lui et très abimée (elle a été enterrée, mouillée, déchirée, brûlée, mâchée, analysée etc...). La fâcheuse conséquence est que la personne dont le nom est écrit ne fait "que" perdre des années de vie.

Ce shinigami étant très ancien son *oeil* ne fonctionne que lorsqu'il se trouve juste à coté de l'étudiant.

De plus le roi des shinigami ne permet pas à ses démons de se déplacer à leur guise dans le royaume des humains et donc *a fortiori* dans cette salle d'examen. Il leur impose de n'utiliser que des *voies spirituelles*. Mais ce shinigami étant très ancien, se déplacer dans le royaume des humains lui coute à lui aussi des années de vie.

On modélise la situation à l'aide d'un graphe \mathcal{G} où les sommets représentent certains étudiants dans cette salle, notés de A à K. Les arcs représentent les voies spirituelles.

On représente les années de vie perdu par ce shinigami en valuant le graphe.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| E | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| J | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| K | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |

Ce shinigami étant très ancien, il lui arrive parfois d'être NRV : Non Respect des Voies. Mais comme il a peur de son roi, il ne se permet que d'utiliser les voies dans les deux sens. Cela correspond donc à considérer $|\mathcal{G}|$ le graphe désorienté de \mathcal{G} .

Première Partie. Résultats préliminaires.

1. (a) Appliquer l'algorithme de filtration par les couches du graphe \mathcal{G} . Donner une bonne numérotation ainsi que les 6 niveaux de sources. 1.5

| Sommets | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numérotation | | | | | | | | | | | |
| src ₁ = { } | | | src ₃ = { } | | | src ₅ = { } | | | | | |
| src ₂ = { } | | | src ₄ = { } | | | src ₆ = { } | | | | | |

- (b) Donner une représentation sagittale de \mathcal{G} en couche. 0.5

2. (a) Donner la représentation matricielle de $|\mathcal{G}|$ le graphe désorienté de \mathcal{G} . Vous pourrez laisser les cases vide à la place de 0. 0.5

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | | | |
| J | | | | | | | | | | | |
| K | | | | | | | | | | | |

- (b) Appliquer l'algorithme de Prim en l'initialisant à E. 1

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init. | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

- (c) Donner les degrés de $|\mathcal{G}|$. 0.5

| \bullet | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|-------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d^1(\bullet, \mathcal{G})$ | | | | | | | | | | | |

- (d) Appliquer l'algorithme de Brelaz à $|\mathcal{G}|$. 1

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|--------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | | | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | | | |
| DSAT ₁₀ | | | | | | | | | | | |
| DSAT ₁₁ | | | | | | | | | | | |
| Couleur | | | | | | | | | | | |

- (e) Donner la valeur exacte de $X(|\mathcal{G}|)$, le nombre chromatique de $|\mathcal{G}|$. Justifier précisément. 0.5

3. En justifiant vos réponses, dire s'il existe un circuit eulérien et une chaîne eulérienne dans $|\mathcal{G}|$.

0.5

4. (a) Appliquer l'algorithme de Dijkstra à \mathcal{G} (et non $|\mathcal{G}|$) partant de E.

1

(b) Sans appliquer la recherche du noyau, expliquer pourquoi \mathcal{G} admet un noyau.

0.5

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init. | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

(c) Le Shinigami arrive dans la salle d'examen par le sommet E et quittera la salle dès qu'il ne pourra plus avancer. Quel est le nombre minimal d'années de vie qu'il perdra ?

0.5

Seconde Partie. Les boîtiers de survie.

Ce n'est pas la première fois qu'un shinigami s'introduit dans l'IUT pour voler des années de vie aux étudiants. Le chef de département a développé un boîtier de secours disposé sous chaque chaise de cette salle (regardez sous la votre). Ce boîtier est composé de 3 diodes, une bleue, une rouge et une jaune ainsi que de 3 interrupteurs qui ont des actions différentes en fonction de l'état du boîtier résumé dans le tableau ci-dessous.

| Si... | alors... |
|---|--|
| les trois diodes sont éteintes | l'interrupteur 1 allume la diode bleue, le 2 la diode rouge et le 3 la diode jaune. |
| la diode bleue est allumée | l'interrupteur 3 allume en plus la diode jaune et les autres interrupteurs n'ont aucun effet. |
| la diode rouge est allumée | l'interrupteur 1 éteint la diode rouge et allume les autres ; les autres interrupteurs sont sans effet. |
| la diode jaune est allumée | l'interrupteur 1 allume en plus la diode rouge, le 2 allume toutes les diodes et le 3 n'a aucun effet. |
| les diodes bleue et rouge sont allumées | l'interrupteur 1 éteint la rouge et allume la jaune, l'interrupteur 2 éteint simplement la rouge et l'interrupteur 3 éteint toutes les diodes. |
| les diodes bleue et jaune sont allumées | l'interrupteur 1 éteint la diode jaune, l'interrupteur 2 éteint la bleue et allume la rouge, l'interrupteur 3 n'a aucun effet. |
| les diodes rouge et jaune sont allumées | les interrupteurs 1 et 2 éteignent la rouge et allument la bleue tandis que l'interrupteur 3 allume toutes les diodes |
| les trois diodes sont allumées | l'interrupteur 1 ne laisse allumé que la rouge, le 2 n'éteint que la jaune et l'interrupteur n'a aucun effet. |

L'utilisation des boîtiers rend le shinigami NRV. S'il arrive à proximité d'un étudiant et que la couleur du boîtier est différente de la couleur du boîtier de l'étudiant visité précédemment par le shinigami, celui-ci *a le seum* et n'écrit pas son nom dans sa death note.

1. Est-ce qu'un boîtier à trois diodes de couleur différentes est suffisant pour qu'aucun étudiant ne perde des années de vie. Justifier. 1

2. Pour que les boîtiers fonctionnent ils doivent être mis en *réseau spirituelle* :
- chacun d'eux doit être connecté en *wifi spirituel* à au moins un autre - c'est à dire que les boîtiers sont connecté en utilisant les voies spirituelles (cas non orienté),
 - ils doivent tous être connecté les uns aux autres par au moins un *chemin spirituel* - c'est à dire un chemin à travers les voies spirituelles (cas non orienté).

Lorsque le shinigami arrive dans la pièce, les boîtiers se mettent en réseau spirituel, et il perd instantanément les années de vie correspondant à la somme des valeurs des voies spirituelles utilisé par le réseau. Si le shinigami perd strictement plus de 13 année de vie en arrivant, il se met à pleurer et le roi en personne arrive et tue toute la promo (sauf un prof de math).

Existe-t-il un moyen de mettre en réseau les boîtiers sans faire pleurer le shinigami? Justifier précisément. 1

3. Quand vous découvrez votre boîtier, il a déjà été utilisé et seule la diode rouge est allumée. Pour ne pas vous faire voler des années de vie, vous devez placer votre boîtier uniquement sur la couleur jaune.

On représente le boîtier par un automate sur l'alphabet $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ correspondant à l'action successif sur les interrupteurs. Les différents états de l'automate représentent les diodes allumées. On en dénombre 8 : \emptyset si toutes les diodes sont éteintes, R si seul la diode rouge est allumée, J pour la jaune, B pour la bleu et BR, BJ, RJ, BRJ pour les combinaisons de diodes allumées.

- (a) Donner la représentation matricielle de cet automate. 1
- (b) Quels sont les états initiaux et finaux de votre automate. 0.5

| | 1 | 2 | 3 |
|-------------|---|---|---|
| \emptyset | | | |
| B | | | |
| R | | | |
| J | | | |
| BR | | | |
| BJ | | | |
| RJ | | | |
| BRJ | | | |

- (c) Quels interrupteurs devez-vous activer et dans quel ordre pour ne pas vous faire voler des années de vie? 1

4. Même NRV, pour ne pas attirer l'attention du roi, le shinigami ne doit pas passer deux fois par la même arête. Combien d'année de vie peut-il perdre au maximum. Justifier très précisément. 0.5

Troisième Partie. Les meurtres de Tic et Tac.

Le shinigami à la pouvoir de se rendre visible à ceux qu'il veut. Et là, subitement, en face de vous il apparait et vous propose de jouer à un jeu macabre.

Comme vous pouvez le voir à la fenêtre, deux écureuils vous observent. L'un s'appelle Tic et l'autre Tac. Si les noms de Tic ou de Tac sont écrit dans la death note par le shinigami ou vous même l'écureuil perd une année de vie. Si on écrit *TicEtTac* alors les deux perdent chacun une année de vie. Le shinigami vous laissera sa death note (et vous la voulez) si vous parvenez à tuer le dernier écureuil. Le shinigami vous informe qu'il reste cinq années de vie à Tic et quatre à Tac. A tour de rôle vous écrivez sur la death note *Tic*, *Tac* ou *TicEtTac*.

On représente la situation à l'aide d'un graphe où les sommets sont des couples (x_i, x_a) où x_i représente le nombre d'année de vie restante à Tic et x_a ceux de Tac. Les arcs de ce graphes représente l'écriture d'un des deux noms ou des deux noms des écureuils dans la death note.

1. Donner une représentation sagittale du graphe.

1

2. Donner, sans justifier, le noyau de ce graphe.

1

$N = \{ \quad \quad \quad \}$

3. Avant de commencer à jouer le shinigami vous demande si vous souhaitez commencer ou non. Que devez-vous répondre et pourquoi ?

1

TOURNEZ S.V.P.

Quatrième Partie. Les règles de la death note.

Vous avez (forcement) gagné au jeu (et donc tué Tic et Tac). Vous avez la death note entre les mains.

1. Donner le nom des trois premières personnes que vous écrivez.

2. Dans la couverture du carnet vous découvrez une règle sémantique permettant non pas de voler des années de vie mais d'en rajouter. Il faut précéder le nom écrit d'un ensemble de caractère étant reconnu par l'automate \mathcal{A} suivant.

| | ♣ | ♠ | ♦ |
|-----------------|---|------|------|
| $\rightarrow A$ | B | | |
| B | B | B | B, C |
| C | C | C, D | C |
| D \rightarrow | | | |

(a) Quel est l'alphabet et les états de cet automate.
0.5

(b) Quels sont les états initiaux et finaux de cette automate.
0.5

(c) Appliquer l'algorithme de détermination et calculer \mathcal{A}_{det} . Donner sa représentation sagittale ci-dessous.
1

(d) Expliquer pourquoi \mathcal{A}_{det} n'est pas complet.
0.5

(e) Appliquer l'algorithme de complétion et rendez \mathcal{A}_{det} complet en ajoutant un état. Faites le apparaître en rouge à la question (c).
0.5

(f) Quel est le langage reconnu par \mathcal{A} ?
1