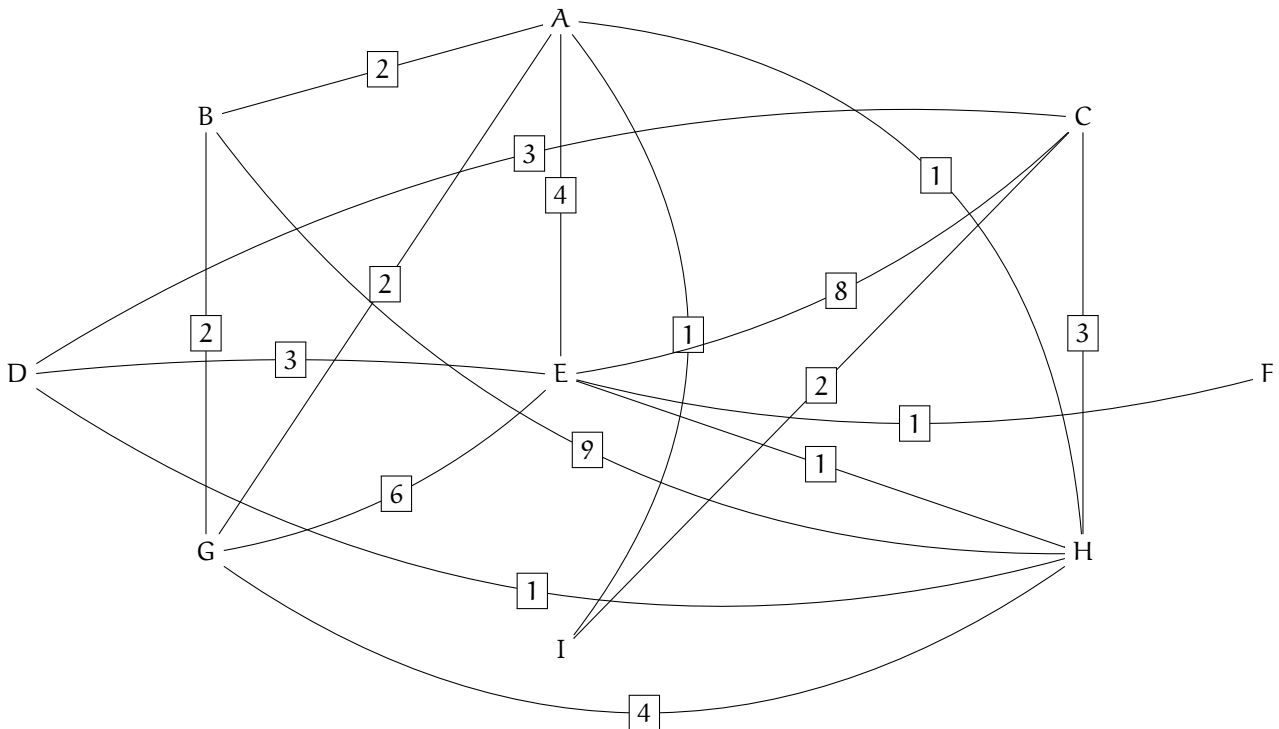


La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

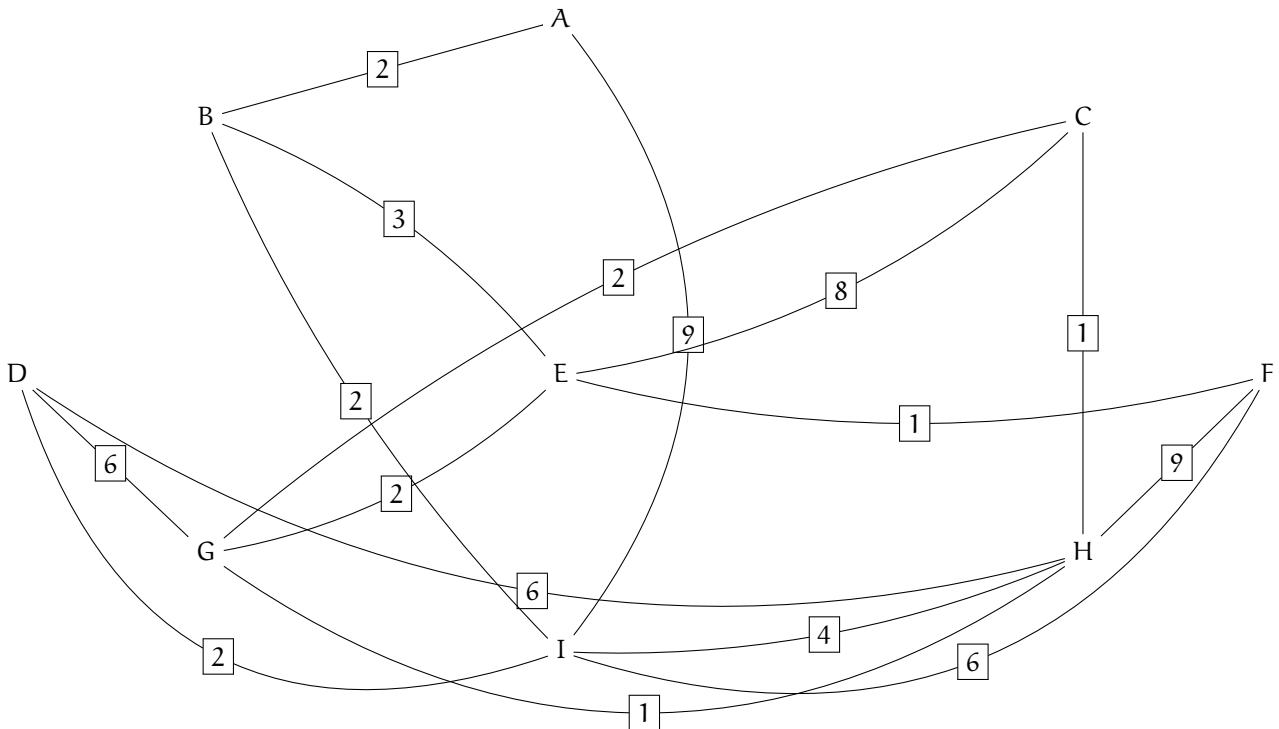
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

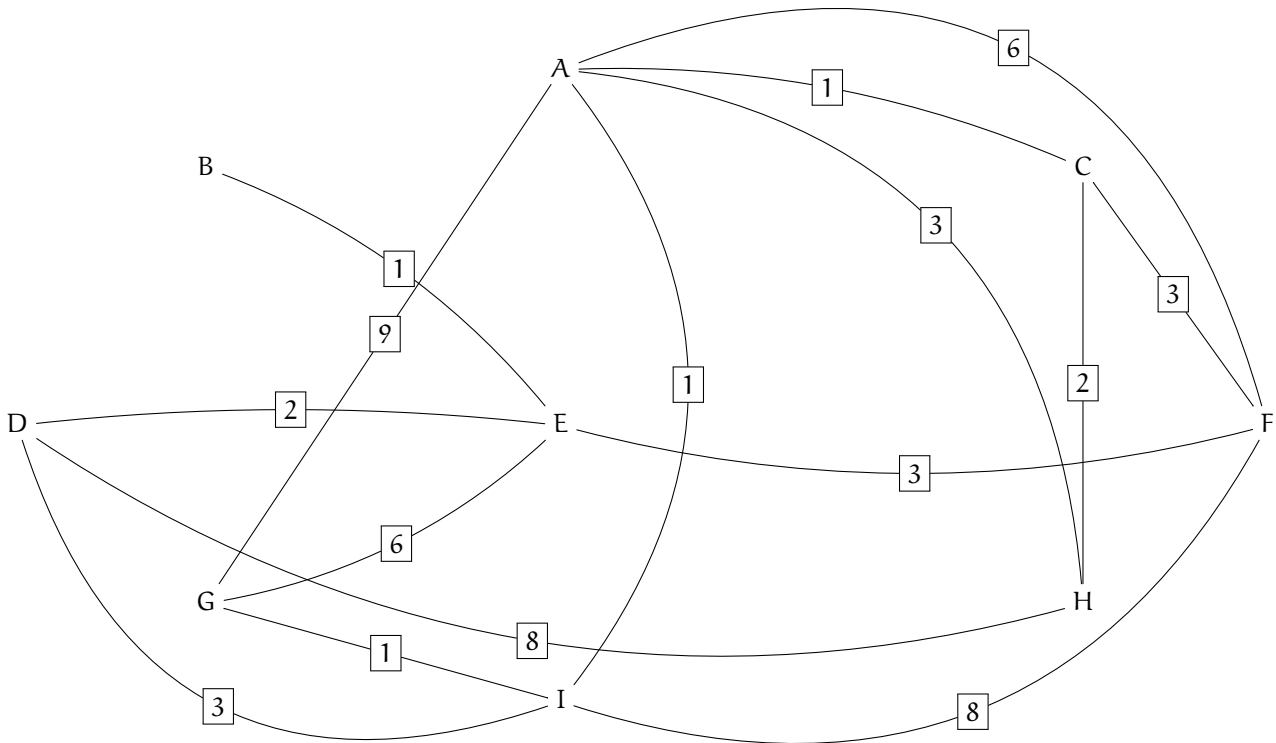
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

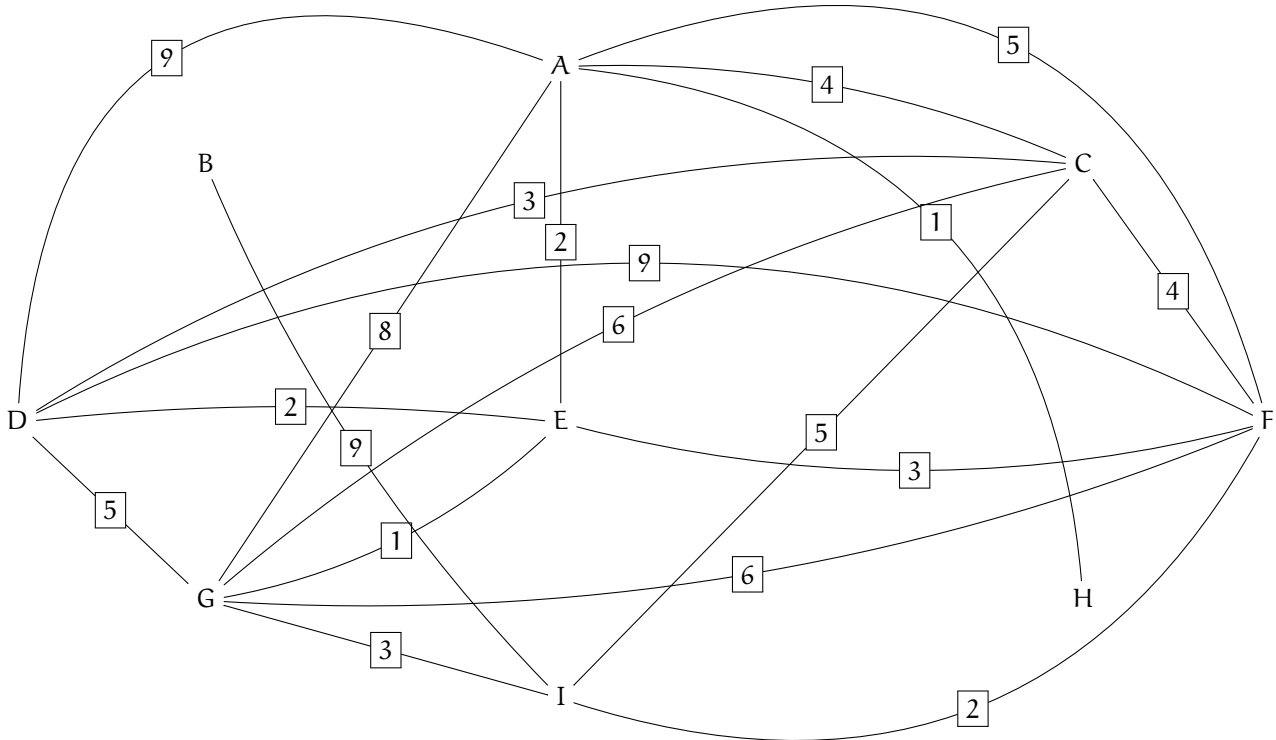
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

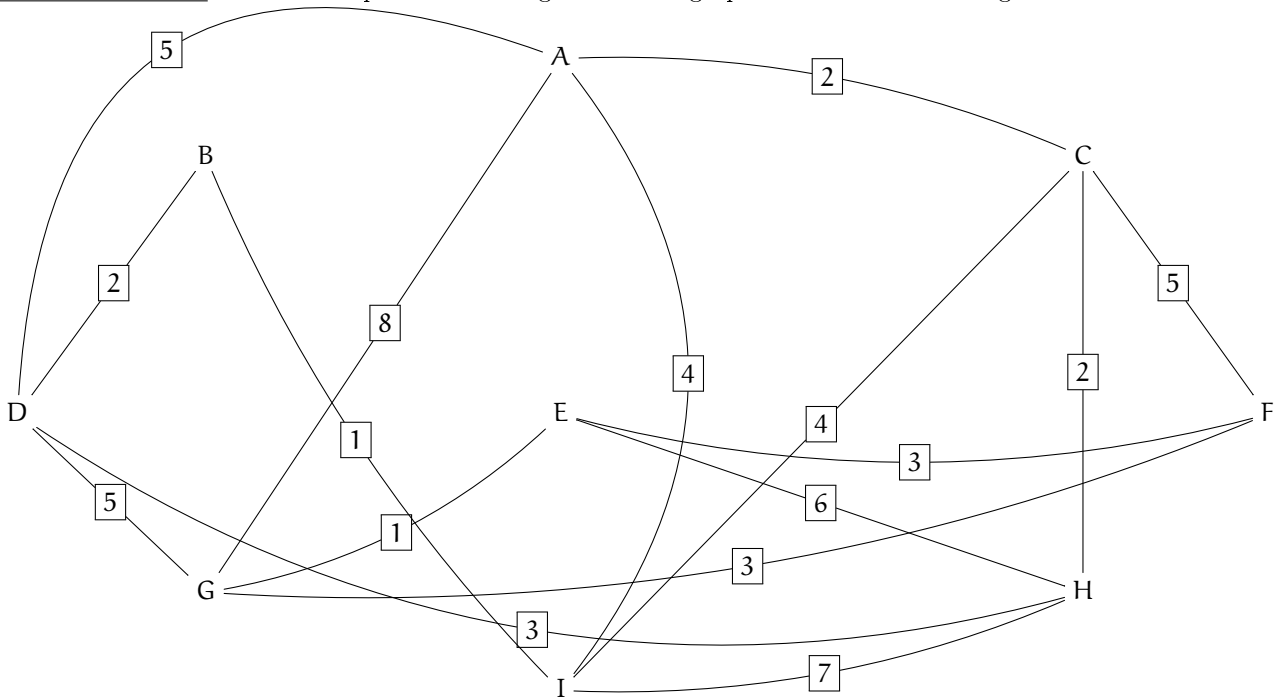
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

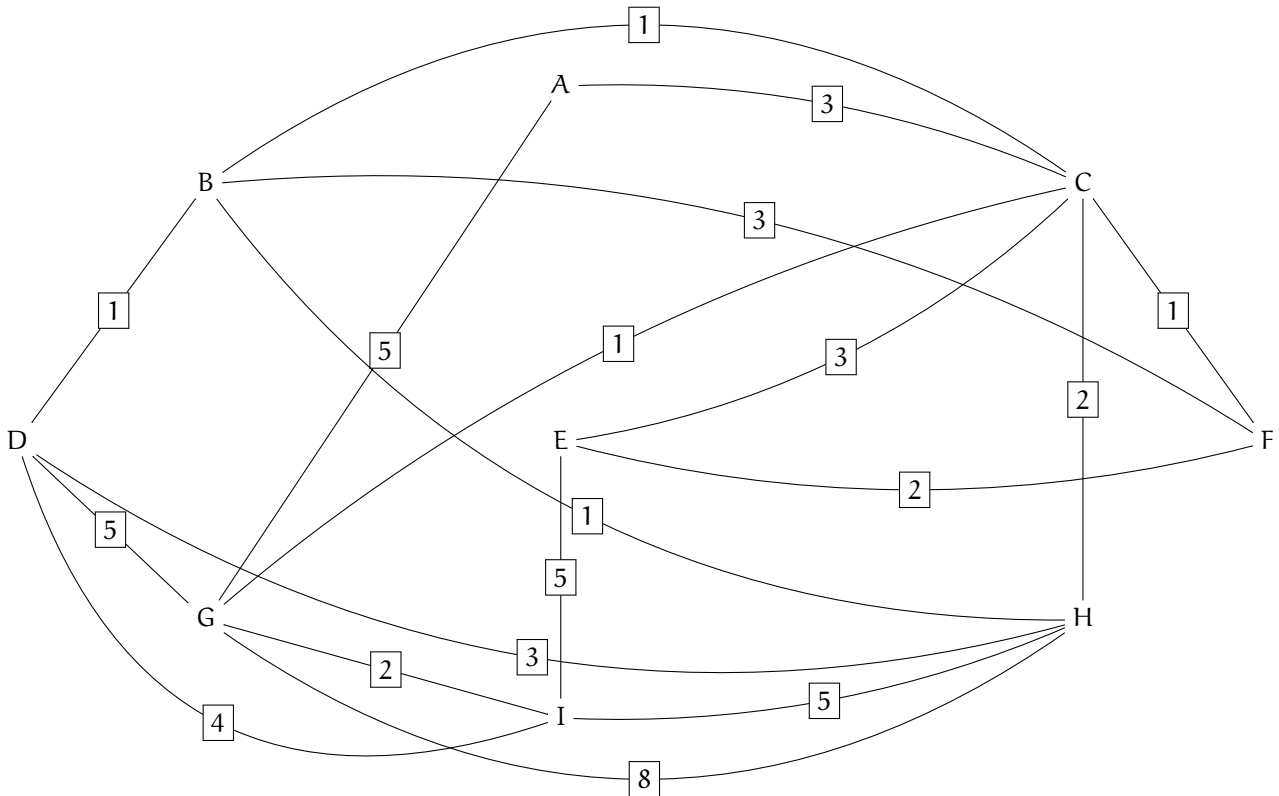
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en 0.5 cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or.
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

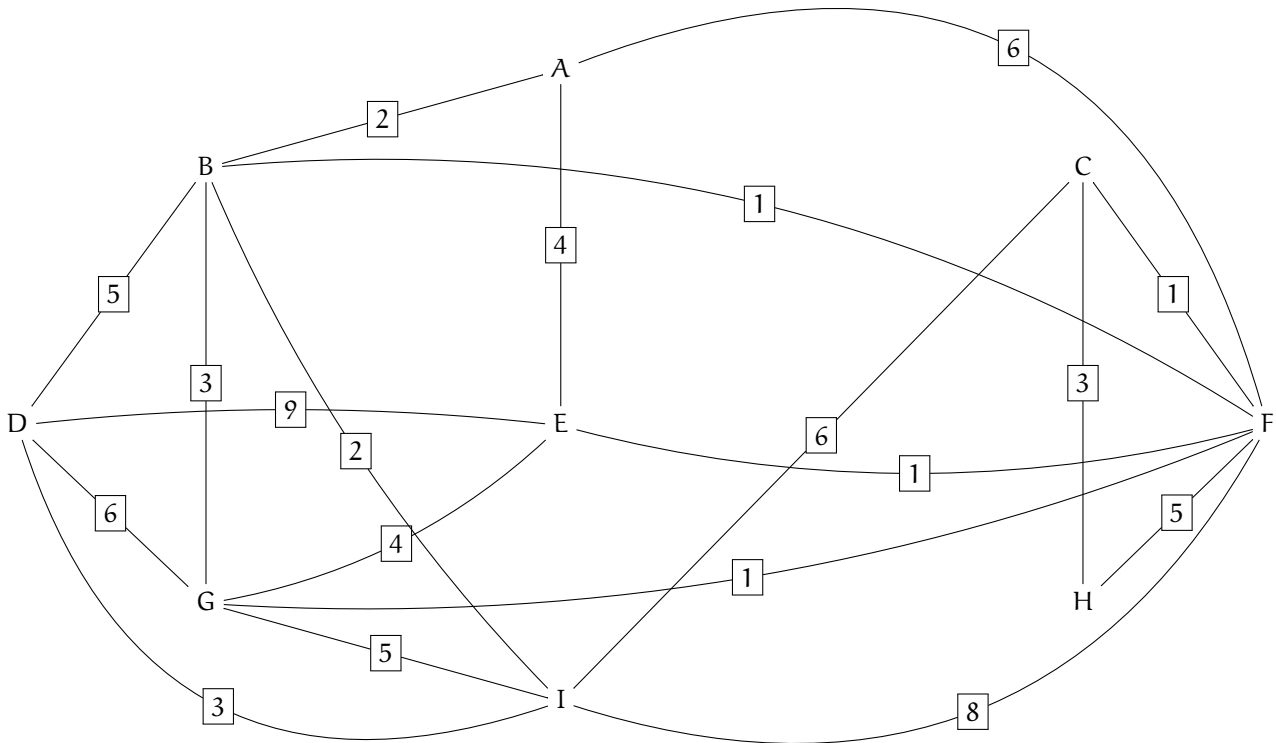
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

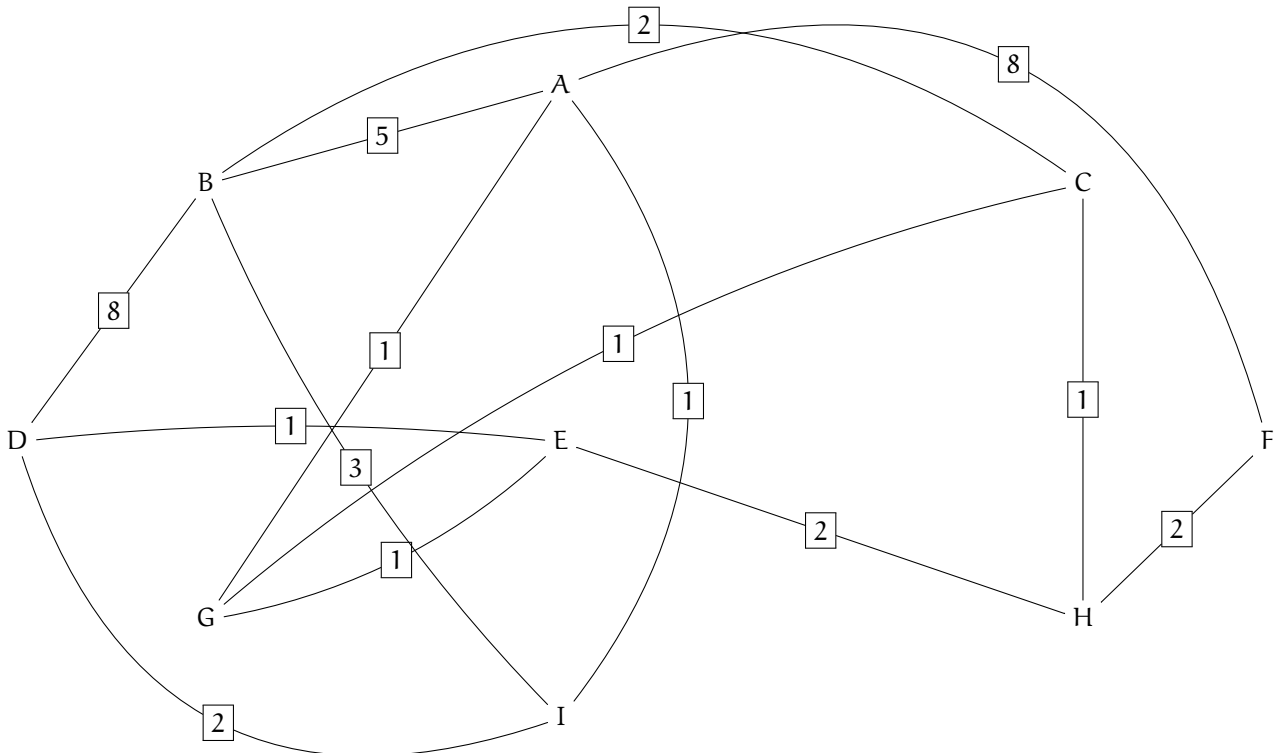
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

0.5

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

2

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

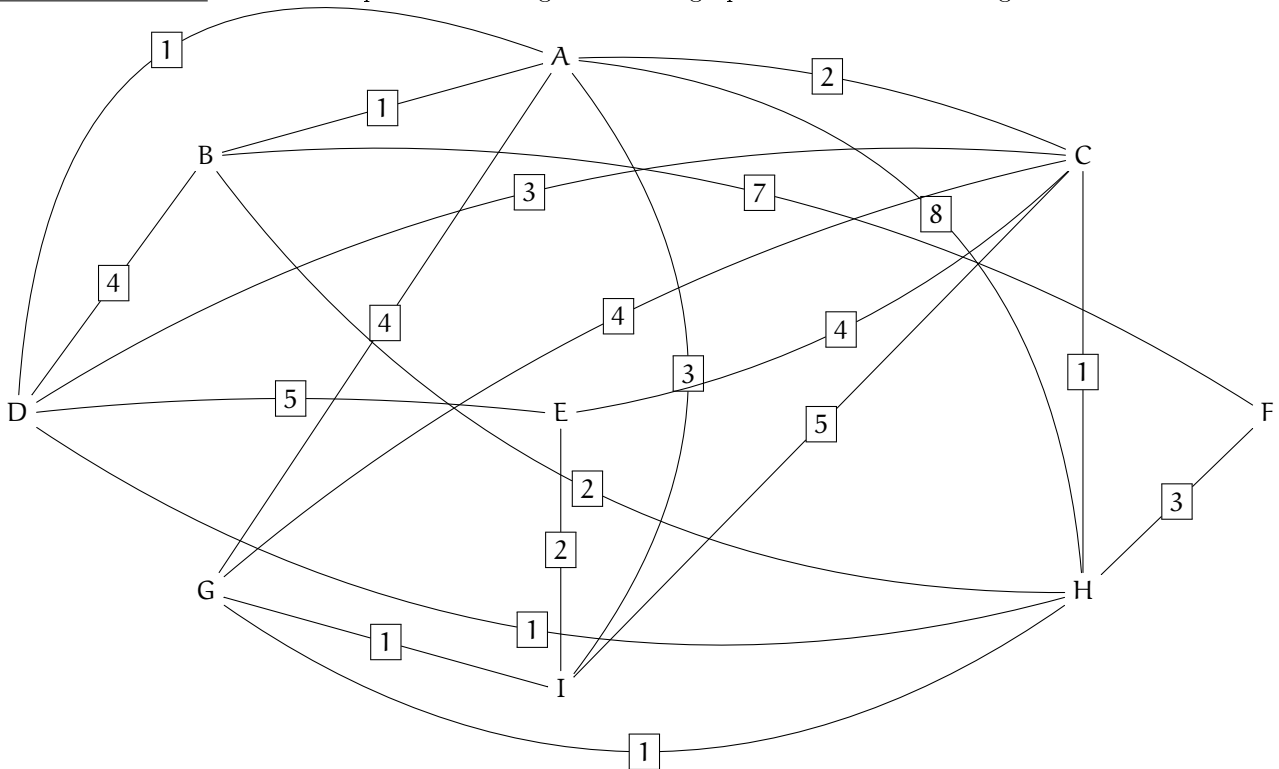
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

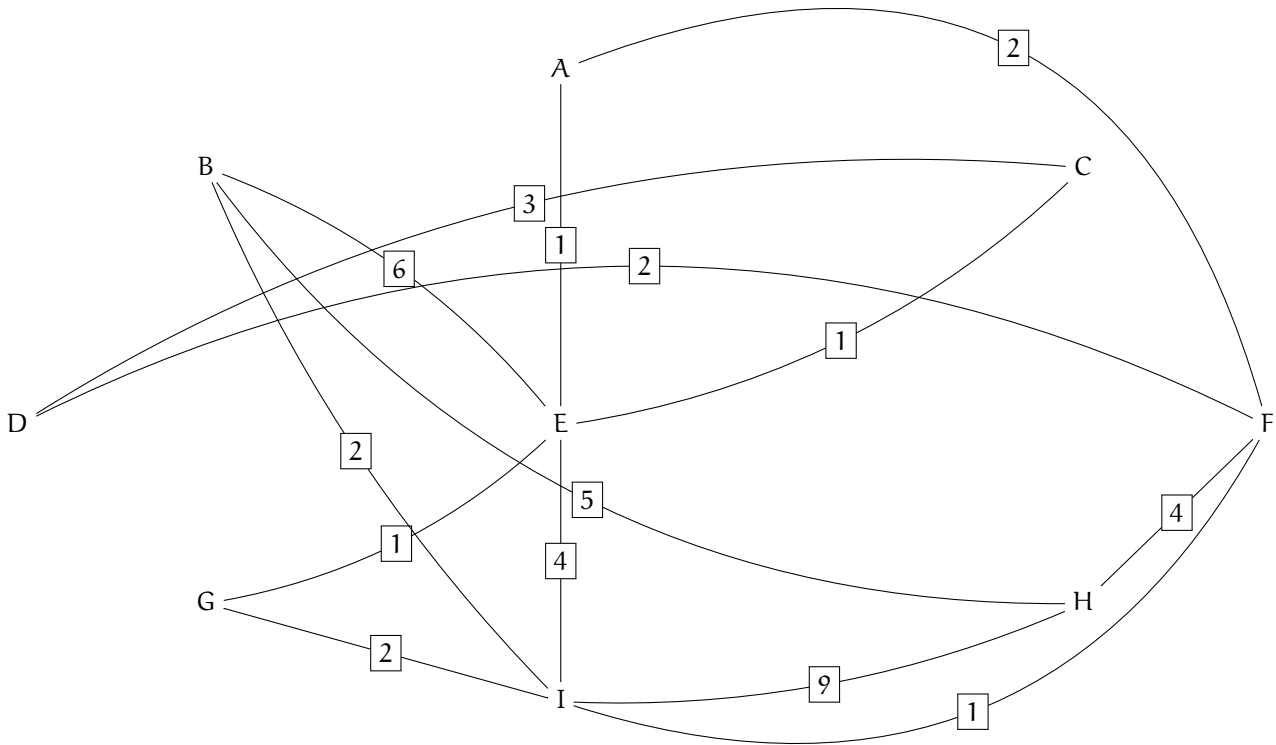
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

0.5

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

2

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

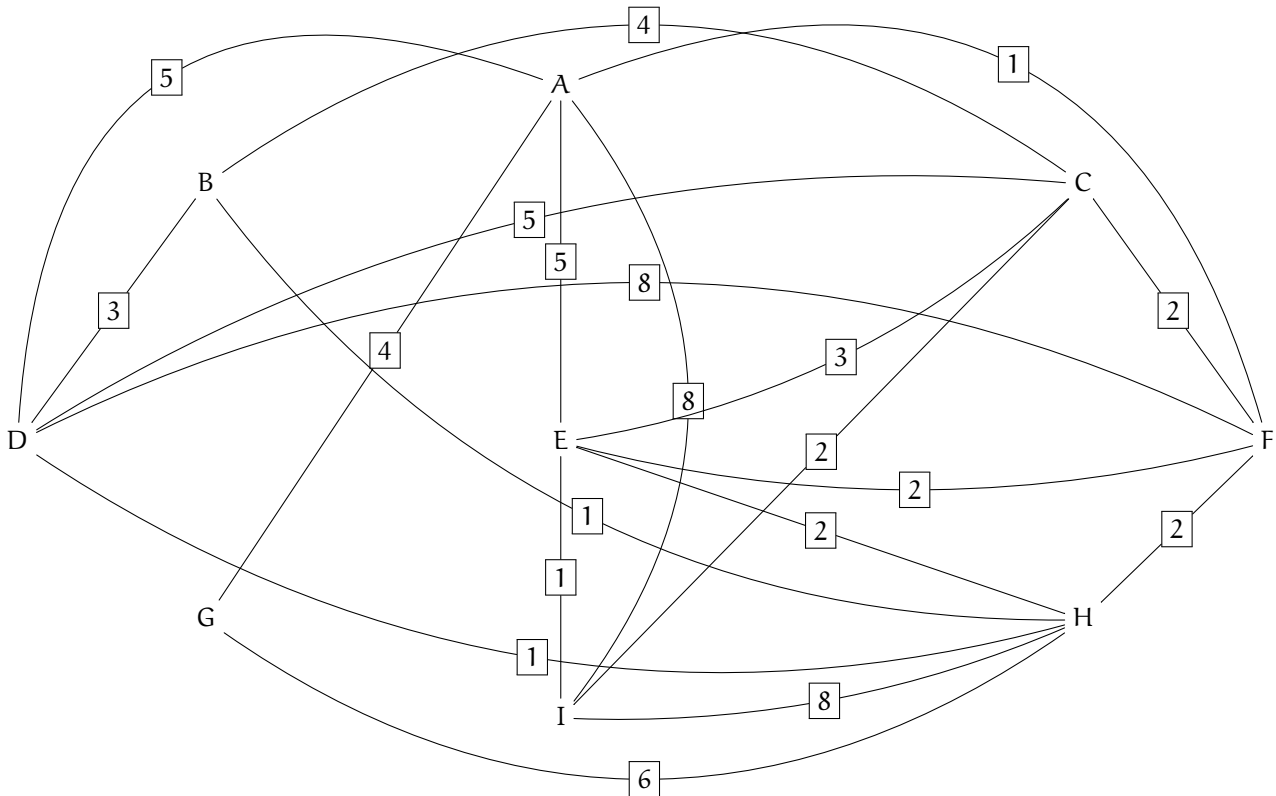
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or.
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

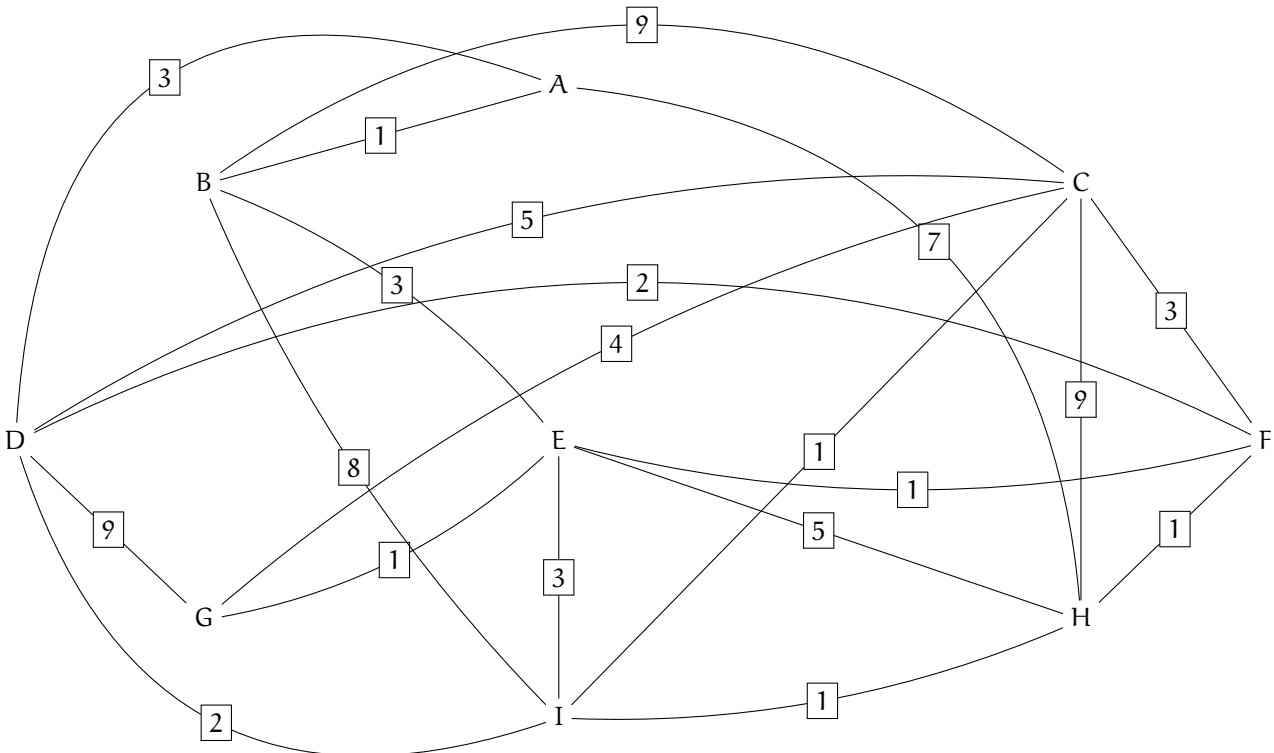
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or.
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or.
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

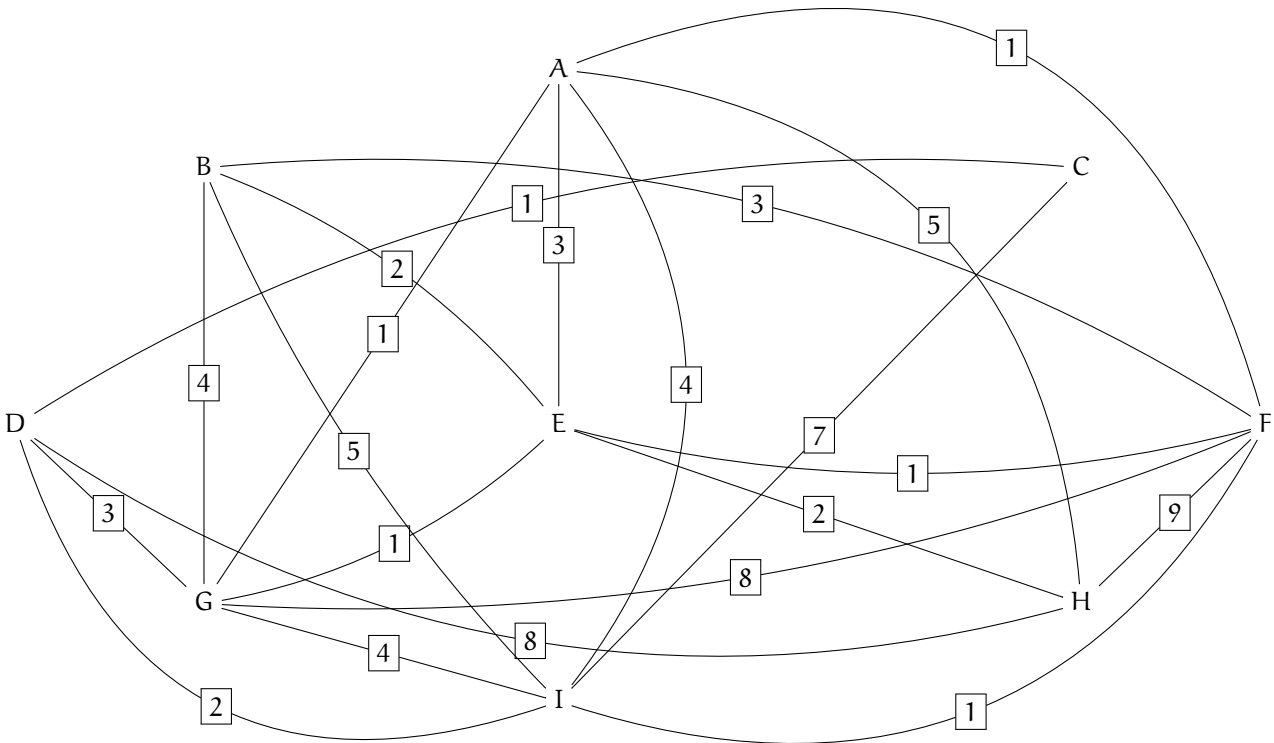
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

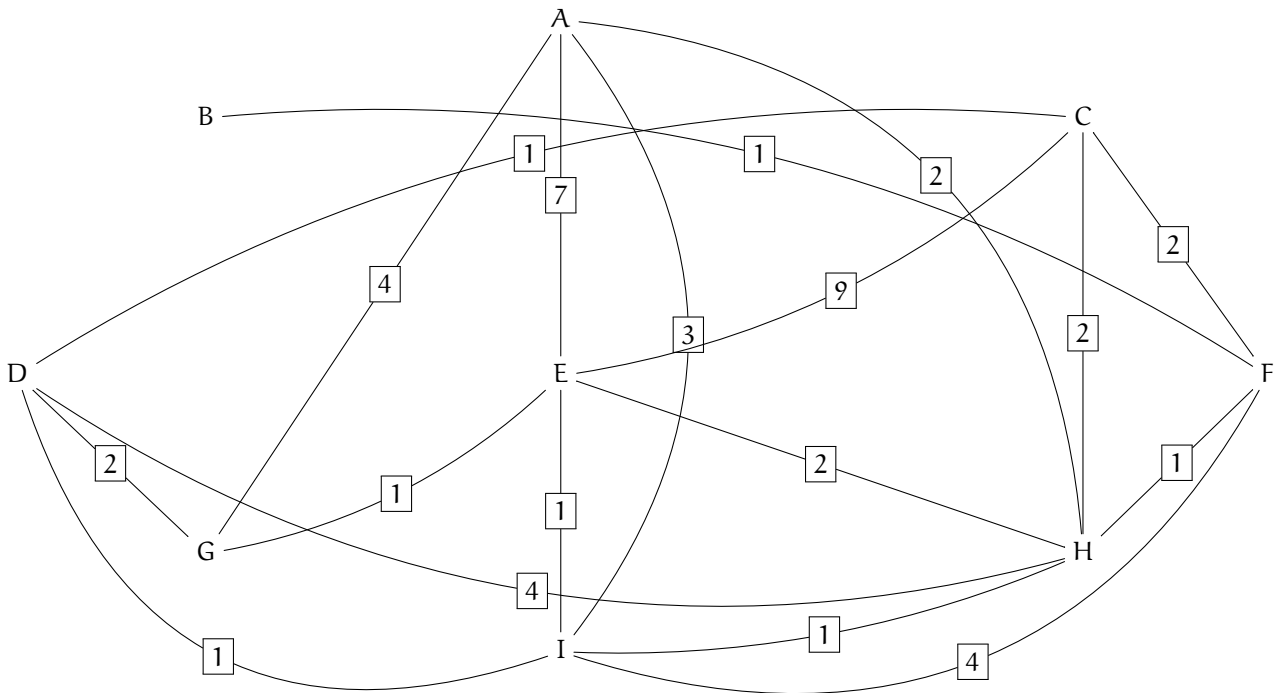
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

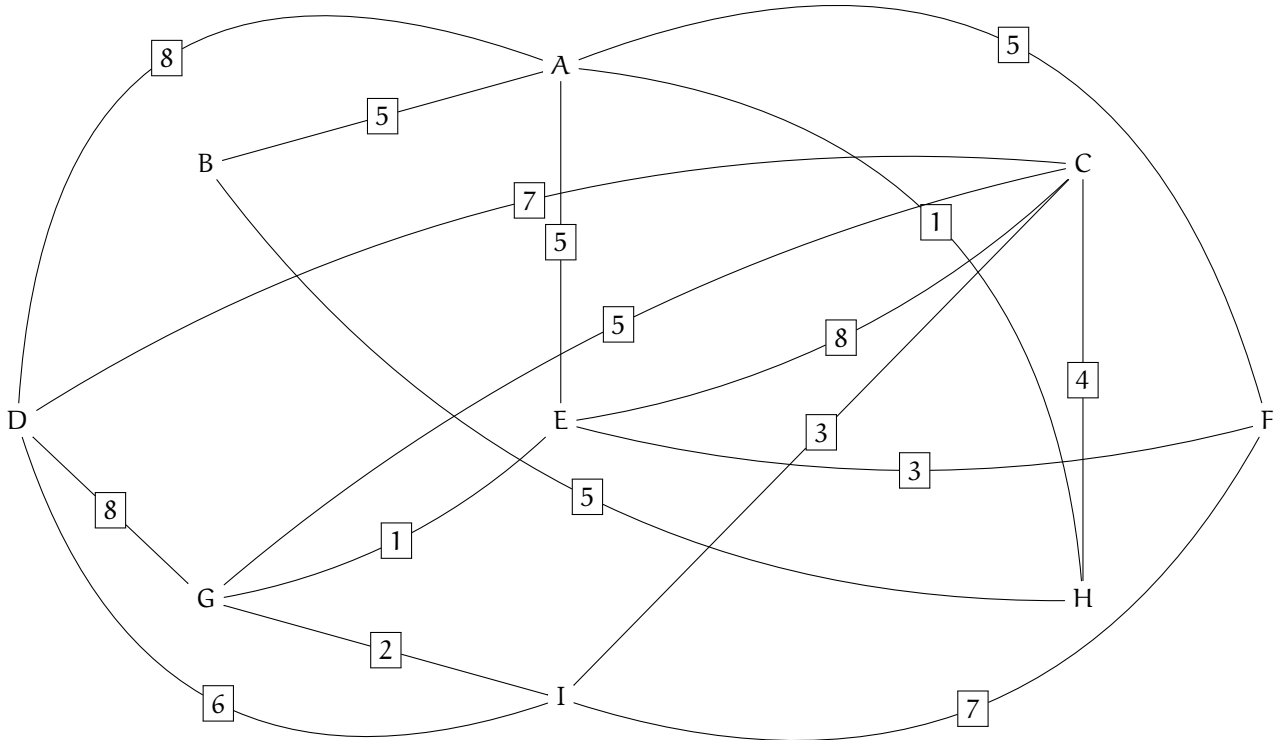
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

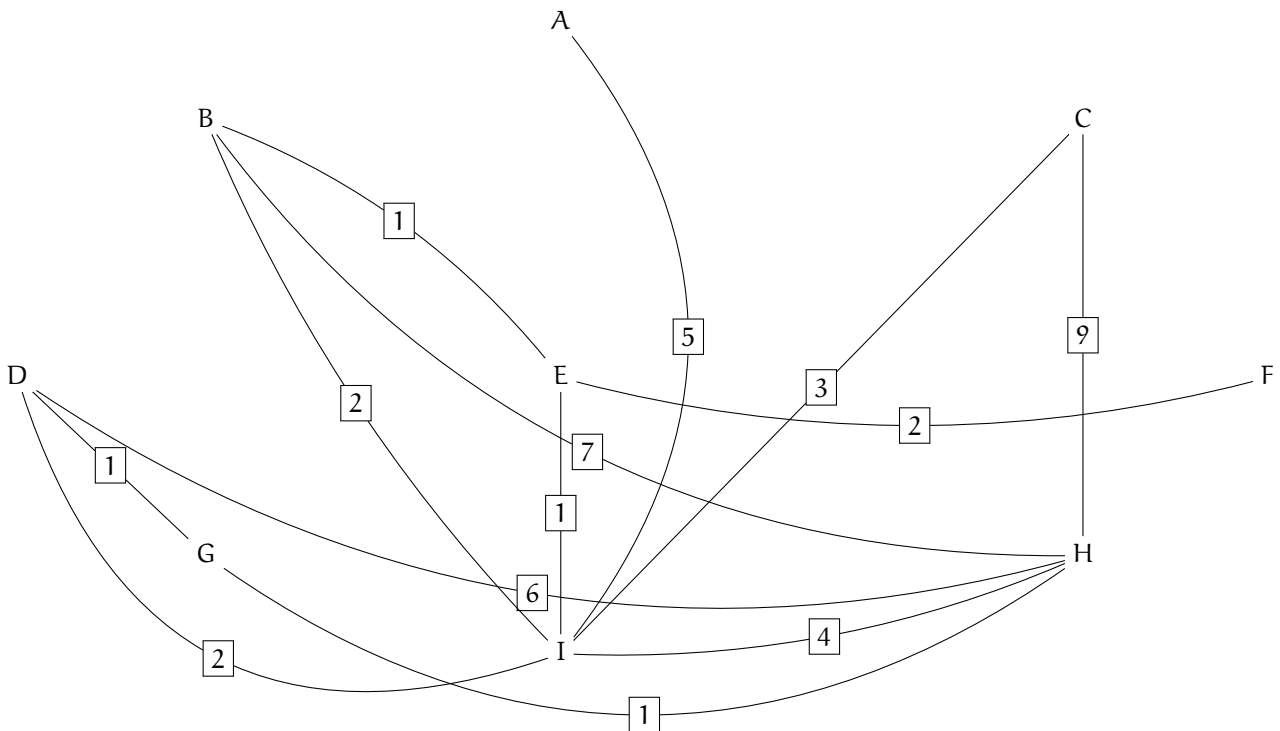
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

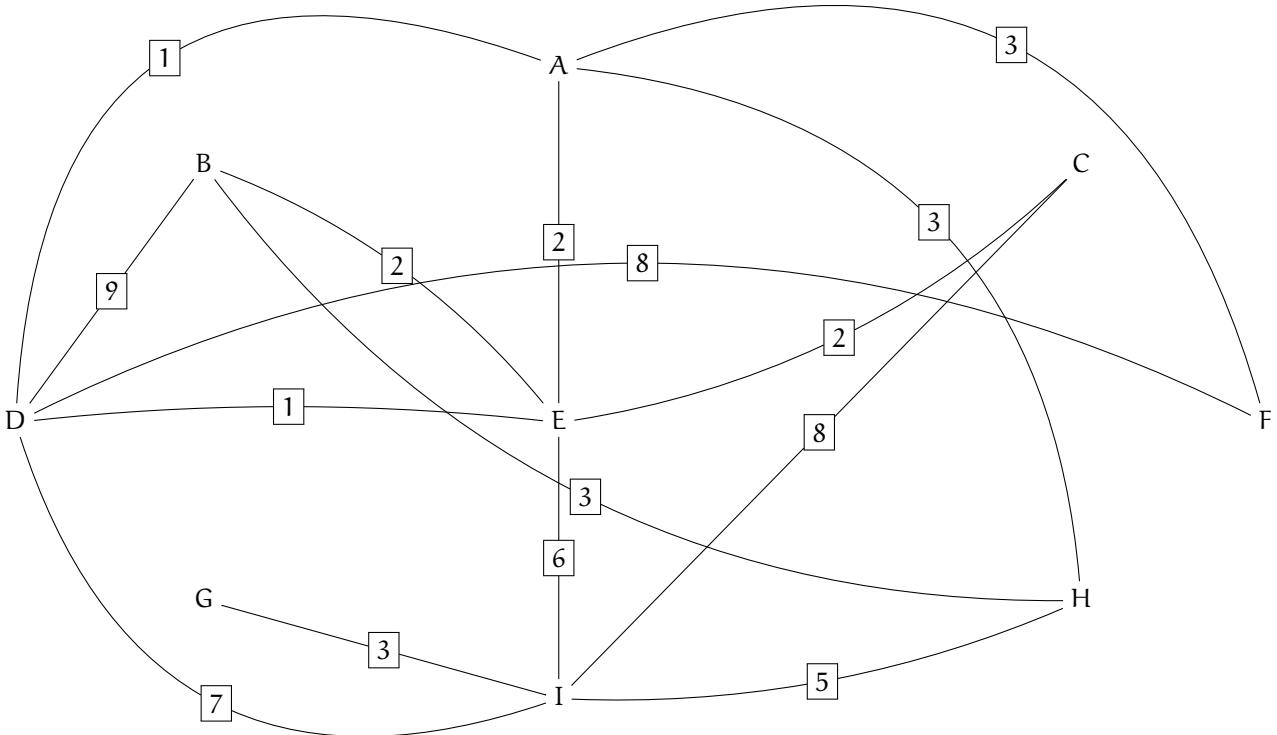
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliées par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or.
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

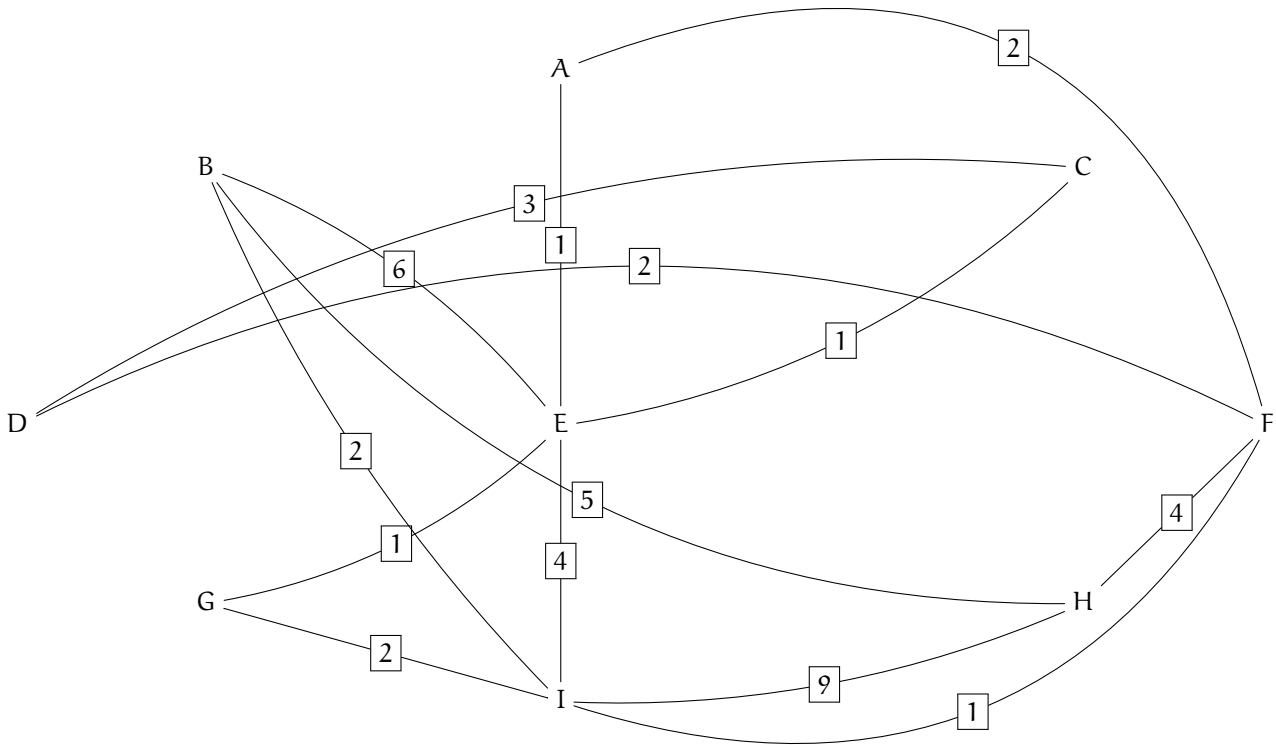
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

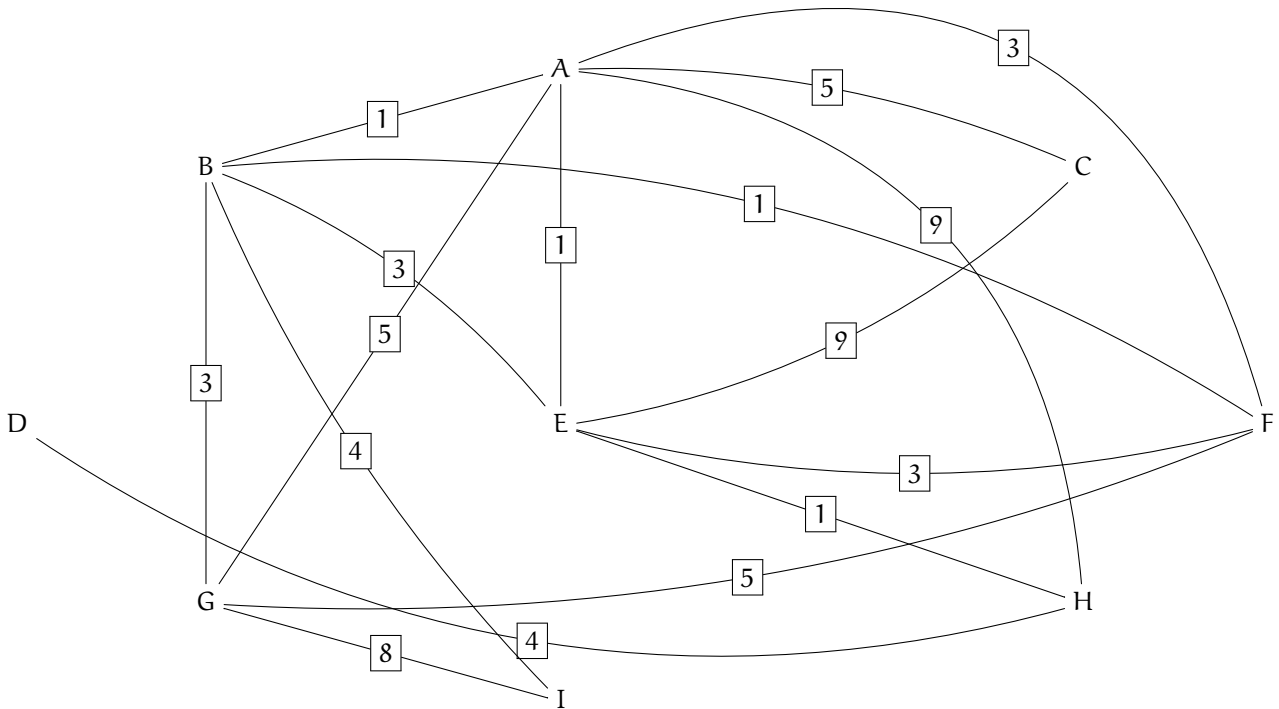
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

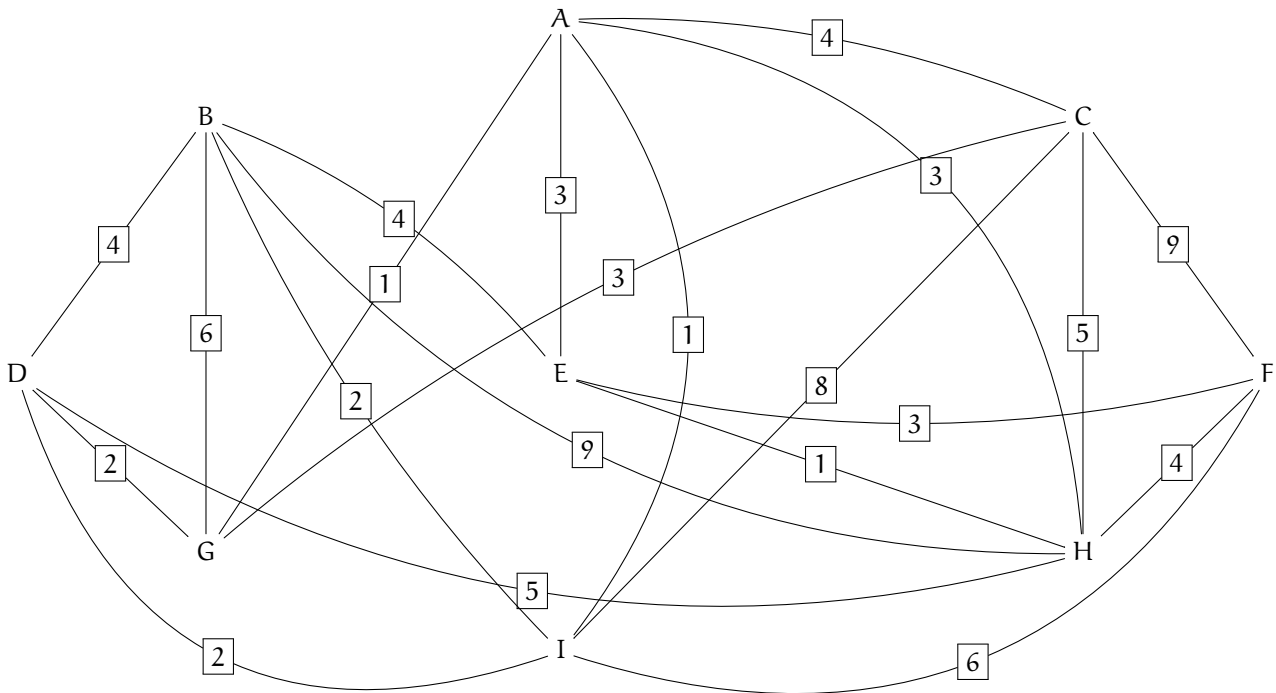
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or.
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

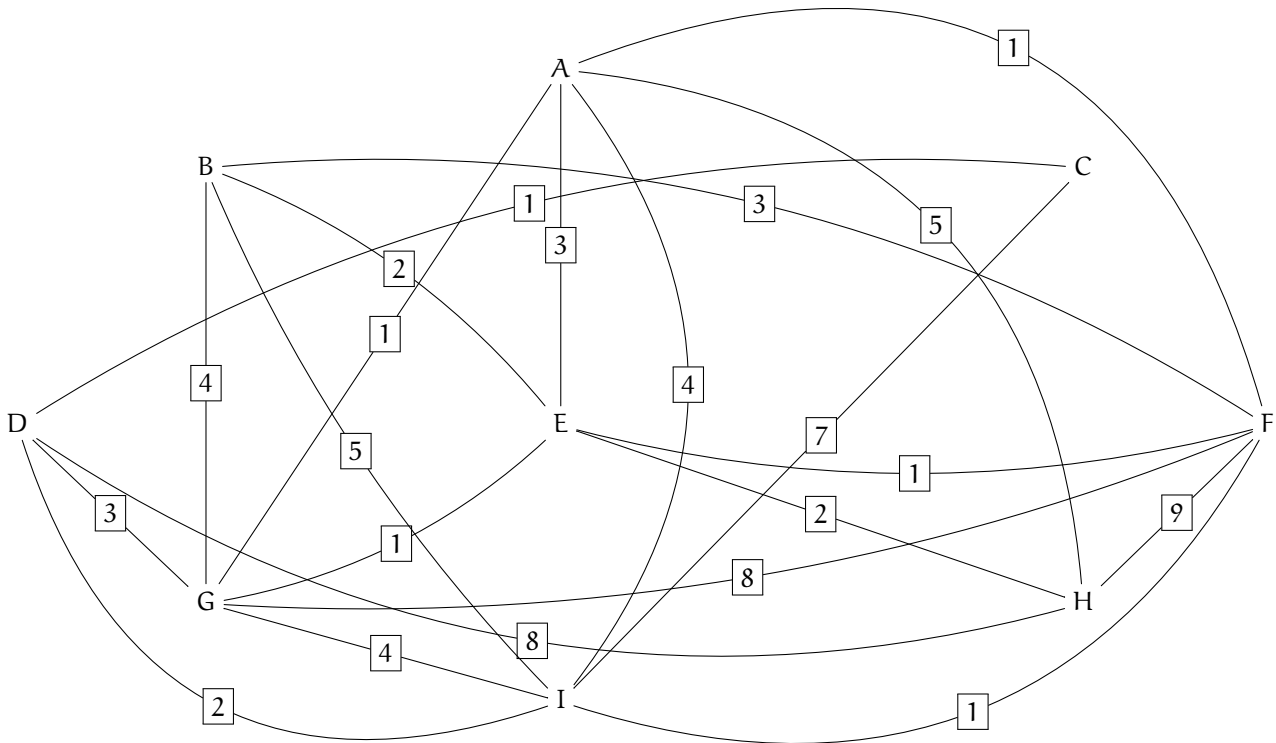
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

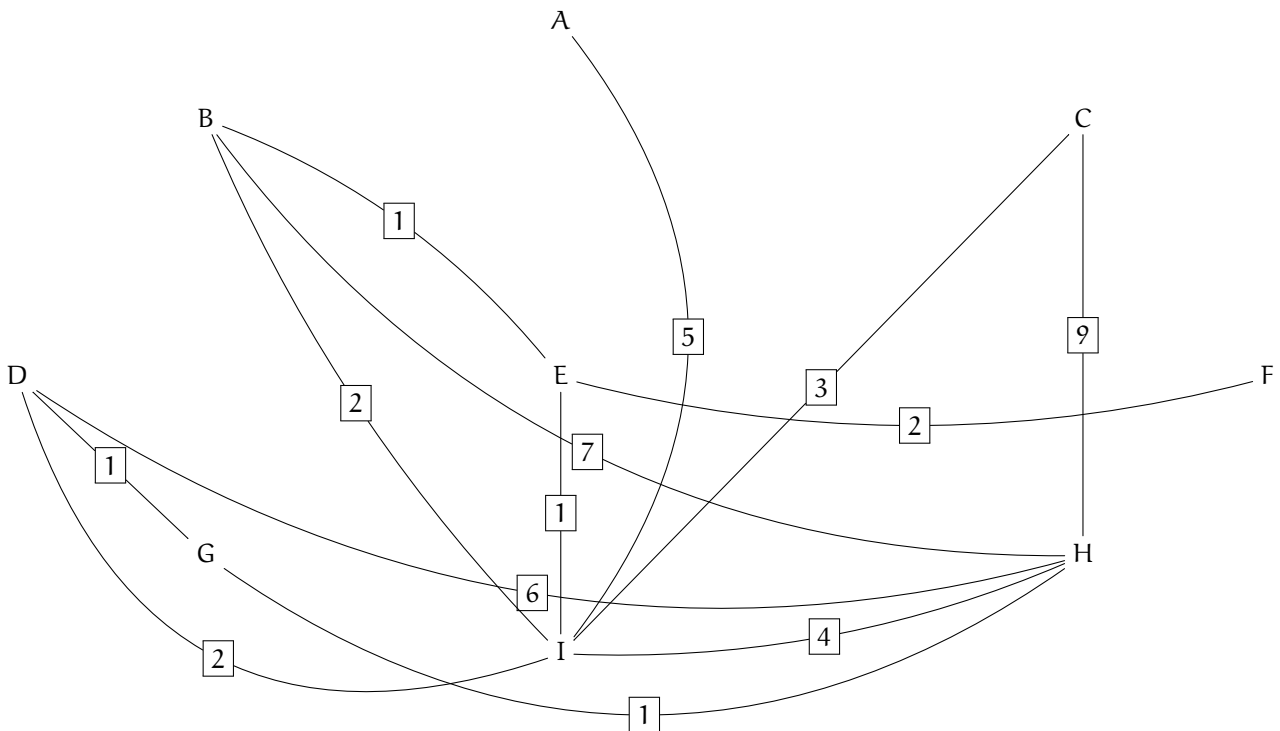
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or.
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

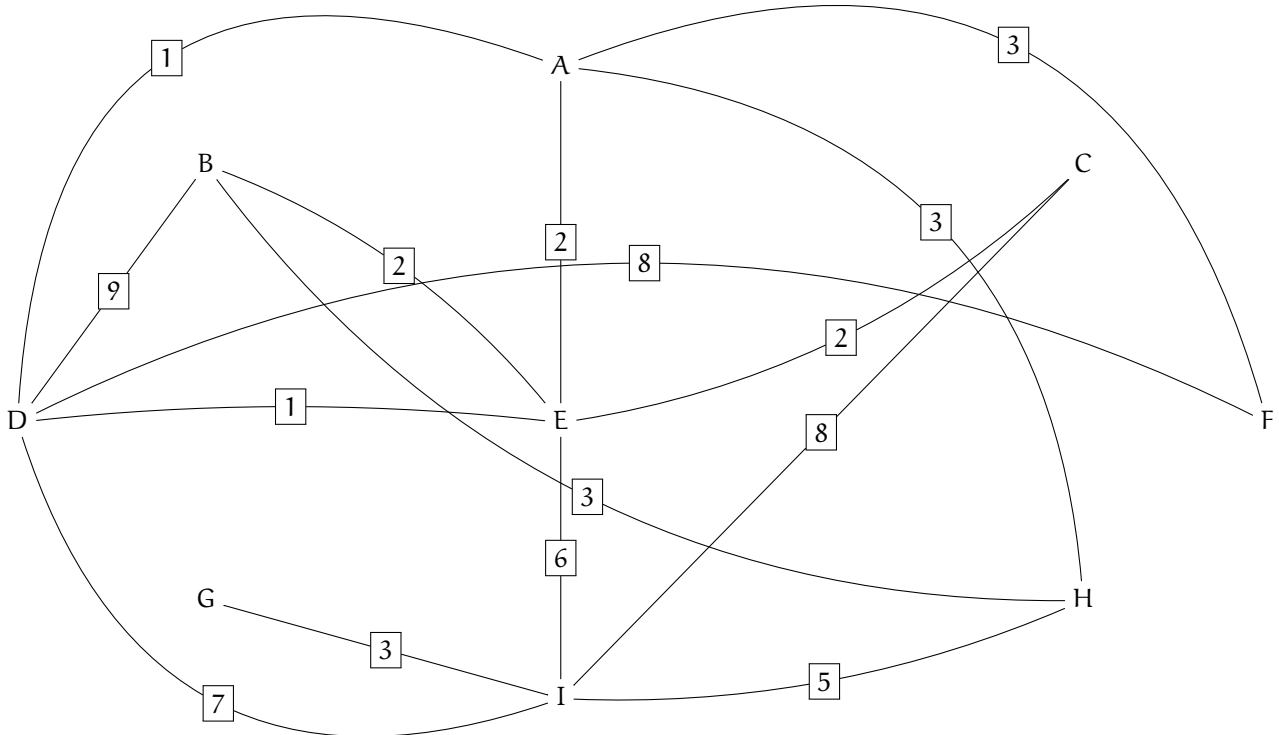
1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or.
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliées par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | | | | | | | | | |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| DSAT ₁ | | | | | | | | | |
| DSAT ₂ | | | | | | | | | |
| DSAT ₃ | | | | | | | | | |
| DSAT ₄ | | | | | | | | | |
| DSAT ₅ | | | | | | | | | |
| DSAT ₆ | | | | | | | | | |
| DSAT ₇ | | | | | | | | | |
| DSAT ₈ | | | | | | | | | |
| DSAT ₉ | | | | | | | | | |
| Coul | | | | | | | | | |

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

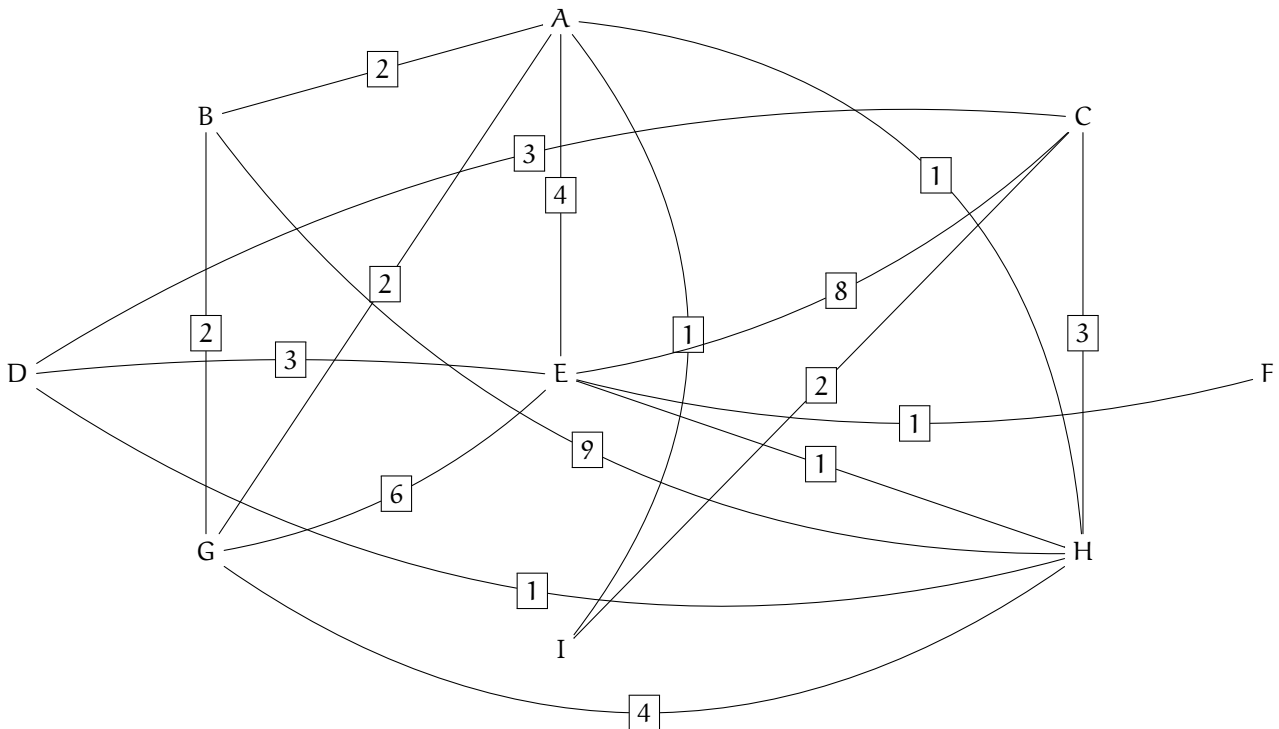
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 1

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| B | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 9 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 3 | 8 | 0 | 0 | 3 | 2 |
| D | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| E | 4 | 0 | 8 | 3 | 0 | 1 | 6 | 1 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 2 | 2 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| H | 1 | 9 | 3 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 0 |
| I | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 4 | | 8 | 3 | X | 1 | 6 | 1 | |
| F | 4 | | 8 | 3 | X | X | 6 | 1 | |
| H | 1 | 9 | 3 | 1 | X | X | 4 | X | |
| A | X | 2 | 3 | 1 | X | X | 2 | X | 1 |
| D | X | 2 | 3 | X | X | X | 2 | X | 1 |
| I | X | 2 | 2 | X | X | X | 2 | X | X |
| B | X | X | 2 | X | X | X | 2 | X | X |
| C | X | X | X | X | X | X | 2 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 3 | 4 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | H | A | C | G | B | D | I | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 2 | 4 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 1 | 4 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre BF. Par exemple :

AGBHCIADCEGHEDHABFEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AH\}, \{BA\}, \{CI\}, \{DH\}, \{FE\}, \{GA\}, \{HE\}, \{IA\}$$

. Son poids est de 11 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{11 \times 100}{50} = 2200$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 5 | 5 | 6 | 4 | 6 | 3 | 3 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | F | B | C | A | E | I | G | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BG. On ajoute une arête entre CH. Par exemple :

AGBECFHIFGDHCDEFBIACBDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AC\}, \{BE\}, \{CB\}, \{DE\}, \{FE\}, \{GD\}, \{HD\}, \{IA\}$

. Son poids est de 9 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{9 \times 100}{50} = 1800$ pièces d'or.

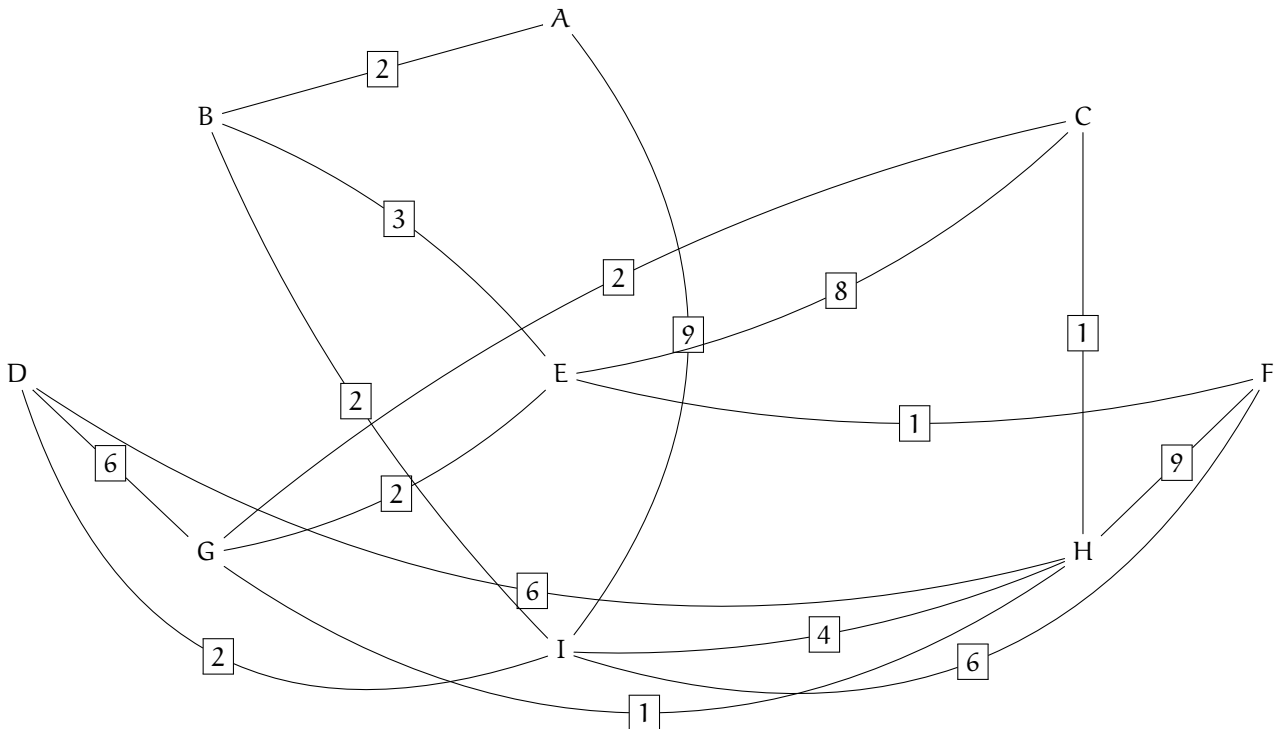
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 3

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 |
| B | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | 2 |
| E | 0 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 9 | 6 |
| G | 0 | 0 | 2 | 6 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| H | 0 | 0 | 1 | 6 | 0 | 9 | 1 | 0 | 4 |
| I | 9 | 2 | 0 | 2 | 0 | 6 | 0 | 4 | 0 |

0.5 2

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 3 | 8 | | X | 1 | 2 | | |
| F | | 3 | 8 | | X | X | 2 | 9 | 6 |
| G | | 3 | 2 | 6 | X | X | X | 1 | 6 |
| H | | 3 | 1 | 6 | X | X | X | X | 4 |
| C | | 3 | X | 6 | X | X | X | X | 4 |
| B | 2 | X | X | 6 | X | X | X | X | 2 |
| A | X | X | X | 6 | X | X | X | X | 2 |
| I | X | X | X | 2 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 4 | 5 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | I | E | G | B | C | D | F | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 1 | ■ | ■ | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 1 | ■ | ■ | 1 | ■ | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | 2 | ■ | ■ | 1 | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BC. On ajoute une arête entre DF. On ajoute une arête entre H et E ainsi qu'une arête entre E et I. Par exemple :

ABCGDHEIDFHIFEGHCEBIA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AB\}, \{BE\}, \{CH\}, \{DI\}, \{FE\}, \{GE\}, \{HG\}, \{IB\}$$

. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

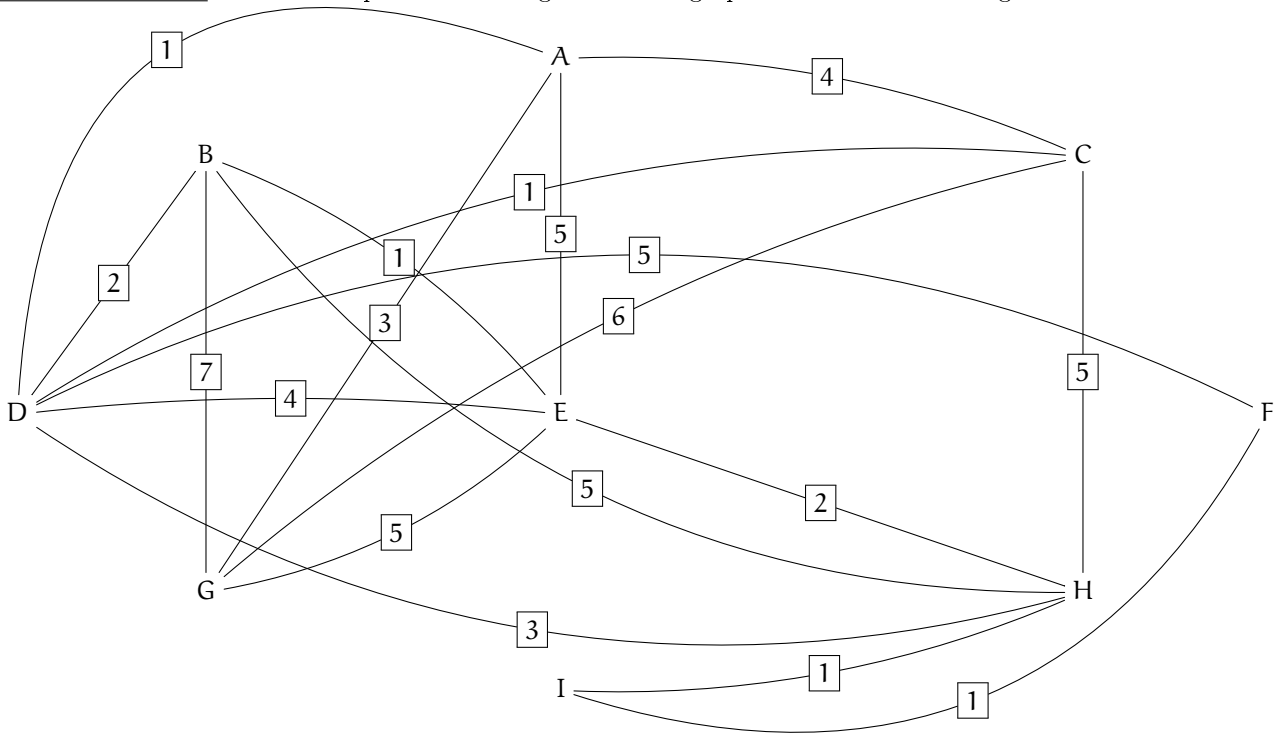
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 4

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 4 | 1 | 5 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 7 | 5 | 0 |
| C | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 | 5 | 0 |
| D | 1 | 2 | 1 | 0 | 4 | 5 | 0 | 3 | 0 |
| E | 5 | 1 | 0 | 4 | 0 | 0 | 5 | 2 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| G | 3 | 7 | 6 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 5 | 5 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| I | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 5 | 1 | | 4 | X | | 5 | 2 | |
| B | 5 | X | | 2 | X | | 5 | 2 | |
| D | 1 | X | 1 | X | X | 5 | 5 | 2 | |
| A | X | X | 1 | X | X | 5 | 3 | 2 | |
| C | X | X | X | X | X | 5 | 3 | 2 | |
| H | X | X | X | X | X | 5 | 3 | X | 1 |
| I | X | X | X | X | X | 1 | 3 | X | X |
| F | X | X | X | X | X | X | 3 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 4 | 4 | 6 | 5 | 2 | 4 | 5 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | E | H | A | B | C | G | F | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 3 | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | ■ | 3 | 3 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 3 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre E et F ainsi qu'une arête entre F et H. Par exemple :

AEBDEFHIFDHBGACGEHCDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AD\}, \{BE\}, \{CD\}, \{DB\}, \{FI\}, \{GA\}, \{HE\}, \{IH\}$

. Son poids est de 12 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{12 \times 100}{50} = 2400$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 1 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | E | F | I | C | D | G | H | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 4 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre CD. On ajoute une arête entre GH. Par exemple :

AGEFIAFCHABEDHGDCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AC\}, \{BE\}, \{CF\}, \{DE\}, \{FE\}, \{GI\}, \{HC\}, \{IA\}$$

. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^+(\bullet)$ | 3 | 5 | 3 | 5 | 3 | 5 | 2 | 3 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | D | F | I | A | C | E | H | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 3 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | 3 | 3 | 2 | ■ | 1 | ■ | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 2 | ■ | 3 | 3 | ■ | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | 3 | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 4 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre BC. On ajoute une arête entre EF. On ajoute une arête entre H et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

AHDIADBFCIBEFHIEDGFABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 4 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AC\}, \{BE\}, \{CF\}, \{DE\}, \{FB\}, \{GF\}, \{HI\}, \{IB\}$$

. Son poids est de 18 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{18 \times 100}{50} = 3600$ pièces d'or.

Contrôle Graphe & Langages

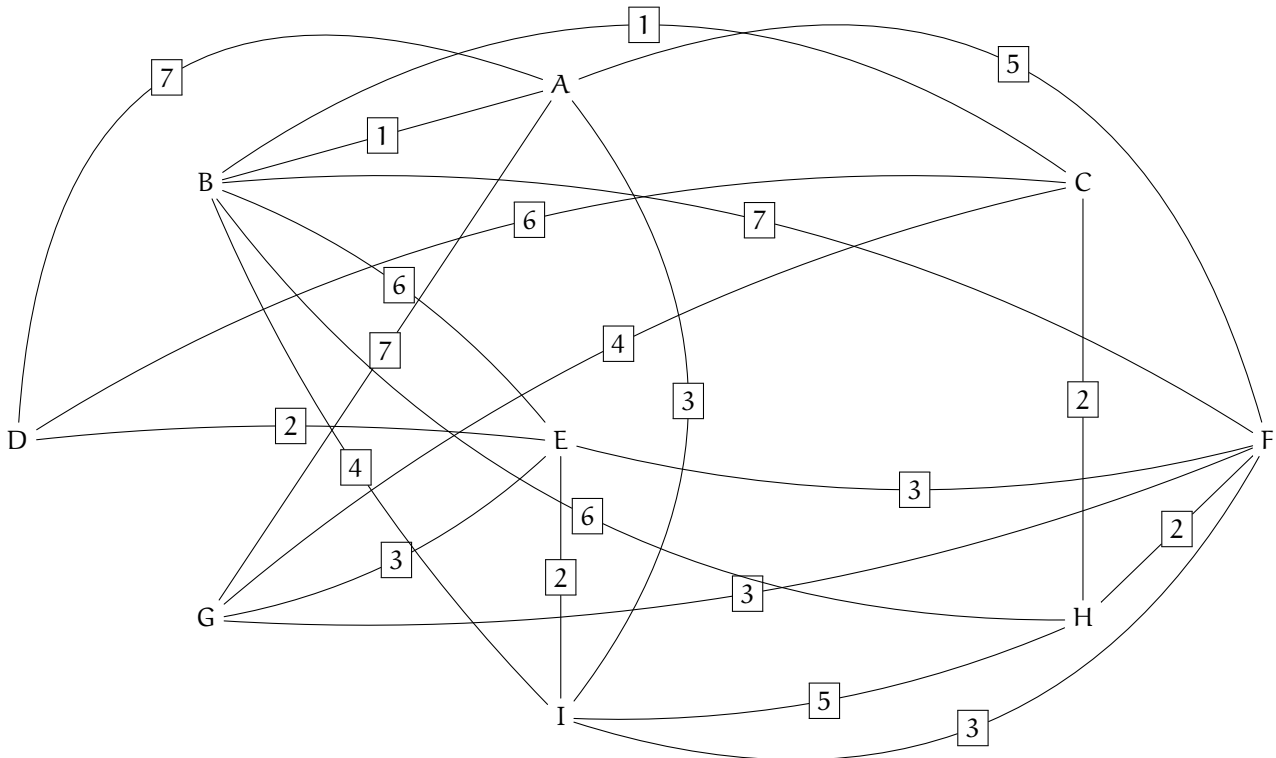
Correction du sujet 7

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 0 | 7 | 0 | 5 | 7 | 0 | 3 |
| B | 1 | 0 | 1 | 0 | 6 | 7 | 0 | 6 | 4 |
| C | 0 | 1 | 0 | 6 | 0 | 0 | 4 | 2 | 0 |
| D | 7 | 0 | 6 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 0 | 6 | 0 | 2 | 0 | 3 | 3 | 0 | 2 |
| F | 5 | 7 | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | 2 | 3 |
| G | 7 | 0 | 4 | 0 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 6 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 5 |
| I | 3 | 4 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | 5 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 6 | | 2 | X | 3 | 3 | | 2 |
| D | 9 | 6 | 8 | X | X | 3 | 3 | | 2 |
| I | 5 | 6 | 8 | X | X | 3 | 3 | 7 | X |
| F | 5 | 6 | 8 | X | X | X | 3 | 5 | X |
| G | 5 | 6 | 7 | X | X | X | X | 5 | X |
| A | X | 6 | 7 | X | X | X | X | 5 | X |
| H | X | 6 | 7 | X | X | X | X | X | X |
| B | X | X | 7 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 6 | 4 | 3 | 5 | 6 | 4 | 4 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | F | A | E | I | C | G | H | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 | 3 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | ■ | 1 | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 | 3 | ■ | 1 | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | ■ | 2 | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ | 2 | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 2 | 4 | 2 | 1 | 5 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AE. On ajoute une arête entre DI. Par exemple :

AGCHBIAEBFHIFABCDEFGEIDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliées par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EIA d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Conton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

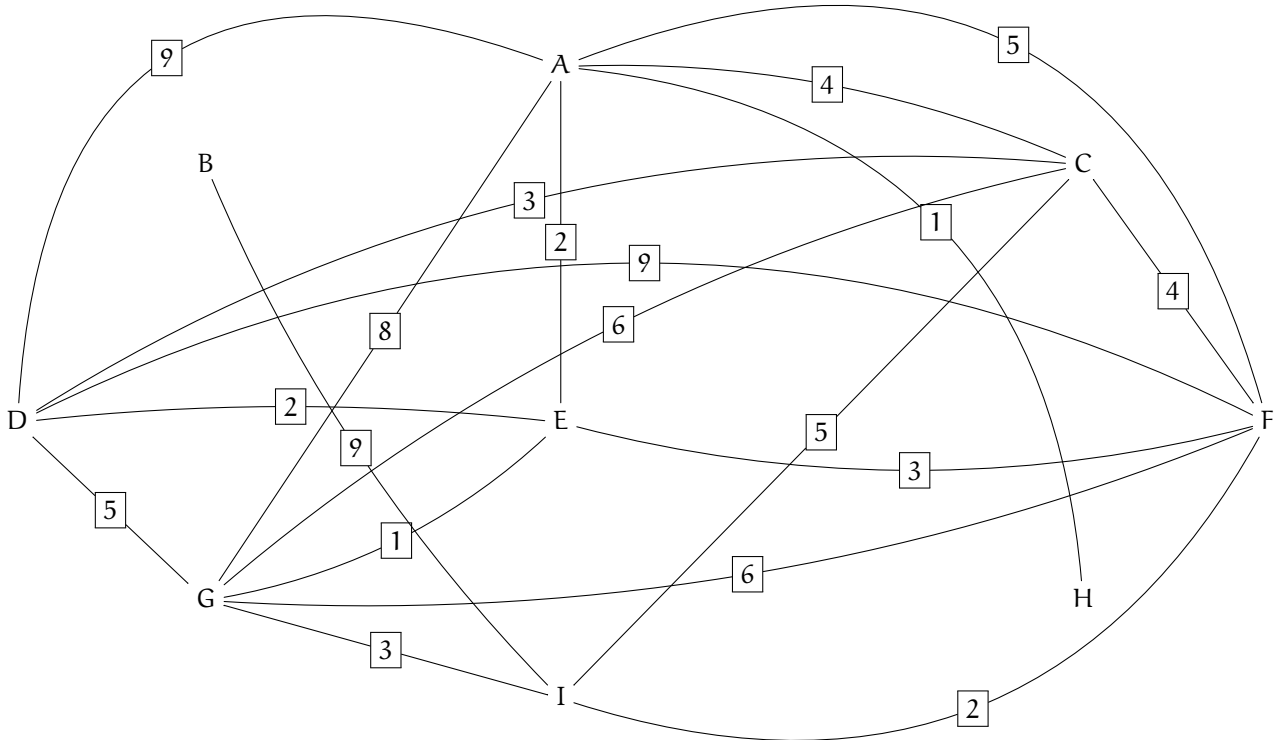
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 8

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 4 | 9 | 2 | 5 | 8 | 1 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 |
| C | 4 | 0 | 0 | 3 | 0 | 4 | 6 | 0 | 5 |
| D | 9 | 0 | 3 | 0 | 2 | 9 | 5 | 0 | 0 |
| E | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| F | 5 | 0 | 4 | 9 | 3 | 0 | 6 | 0 | 2 |
| G | 8 | 0 | 6 | 5 | 1 | 6 | 0 | 0 | 3 |
| H | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 9 | 5 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 2 | | | 2 | X | 3 | 1 | | |
| G | 2 | | 6 | 2 | X | 3 | X | | 3 |
| A | X | | 4 | 2 | X | 3 | X | 1 | 3 |
| H | X | | 4 | 2 | X | 3 | X | X | 3 |
| D | X | | 3 | X | X | 3 | X | X | 3 |
| C | X | | X | X | X | 3 | X | X | 3 |
| F | X | | X | X | X | X | X | X | 2 |
| I | X | 9 | X | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 1 | 5 | 5 | 4 | 6 | 6 | 1 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | F | G | C | D | E | I | B | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 1 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 1 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BC. On ajoute une arête entre DH. Par exemple :

AGCFGIFEGDHAEDFACBICDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AE\}, \{BI\}, \{CD\}, \{DE\}, \{FE\}, \{GE\}, \{HA\}, \{IF\}$$

. Son poids est de 23 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{23 \times 100}{50} = 4600$ pièces d'or.

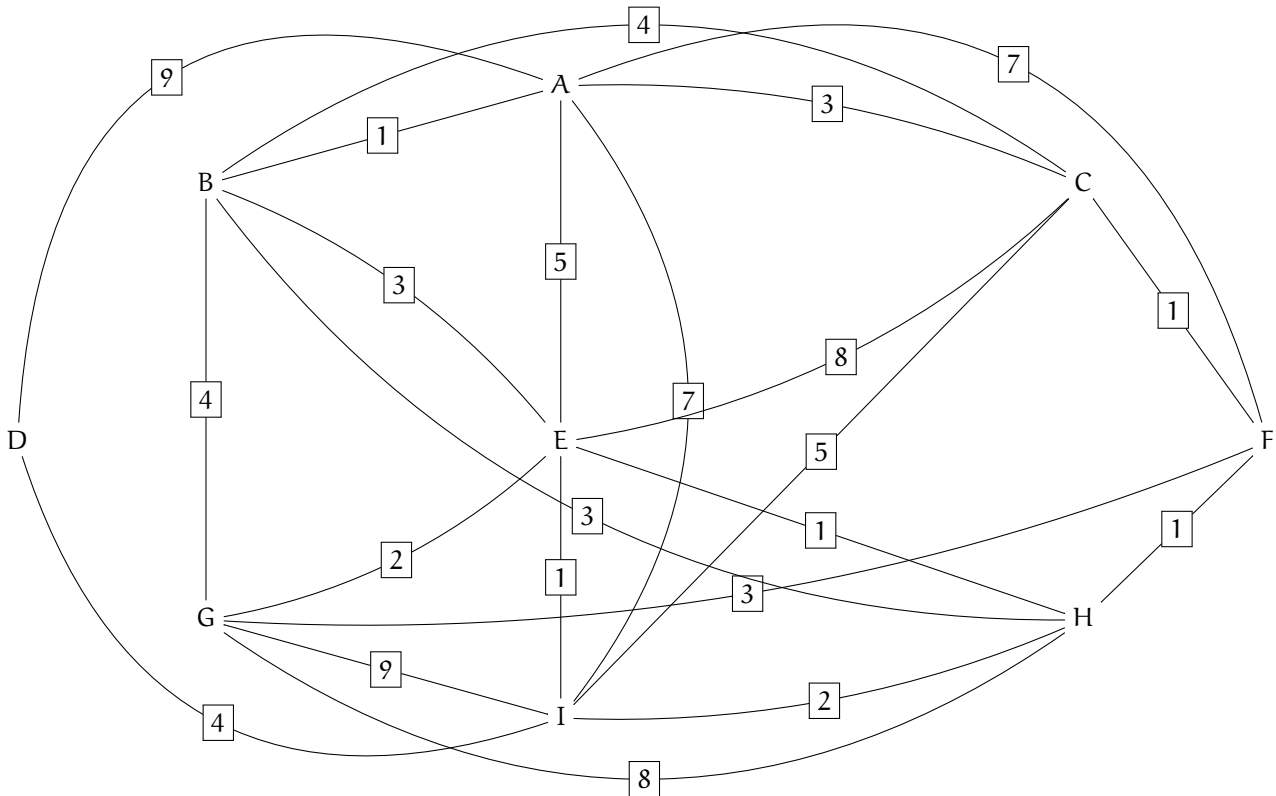
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 9

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 3 | 9 | 5 | 7 | 0 | 0 | 7 |
| B | 1 | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 | 4 | 3 | 0 |
| C | 3 | 4 | 0 | 0 | 8 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| D | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| E | 5 | 3 | 8 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| F | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 |
| G | 0 | 4 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | 8 | 9 |
| H | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 8 | 0 | 2 |
| I | 7 | 0 | 5 | 4 | 1 | 0 | 9 | 2 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 5 | 3 | 8 | | X | | 2 | 1 | 1 |
| H | 5 | 3 | 8 | | X | 2 | 2 | X | 1 |
| I | 5 | 3 | 6 | 5 | X | 2 | 2 | X | X |
| F | 5 | 3 | 3 | 5 | X | X | 2 | X | X |
| G | 5 | 3 | 3 | 5 | X | X | X | X | X |
| B | 4 | X | 3 | 5 | X | X | X | X | X |
| C | 4 | X | X | 5 | X | X | X | X | X |
| A | X | X | X | 5 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 5 | 5 | 2 | 6 | 4 | 5 | 5 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | E | I | B | C | G | H | F | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | ■ | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 4 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 1 | 4 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CG. On ajoute une arête entre B et D ainsi qu'une arête entre D et H. Par exemple :

AFCGHIGFHEICEGBHDIADBEABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et C ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EHFC d'une distance de 3×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{3 \times 100}{50} = 6$ heures.

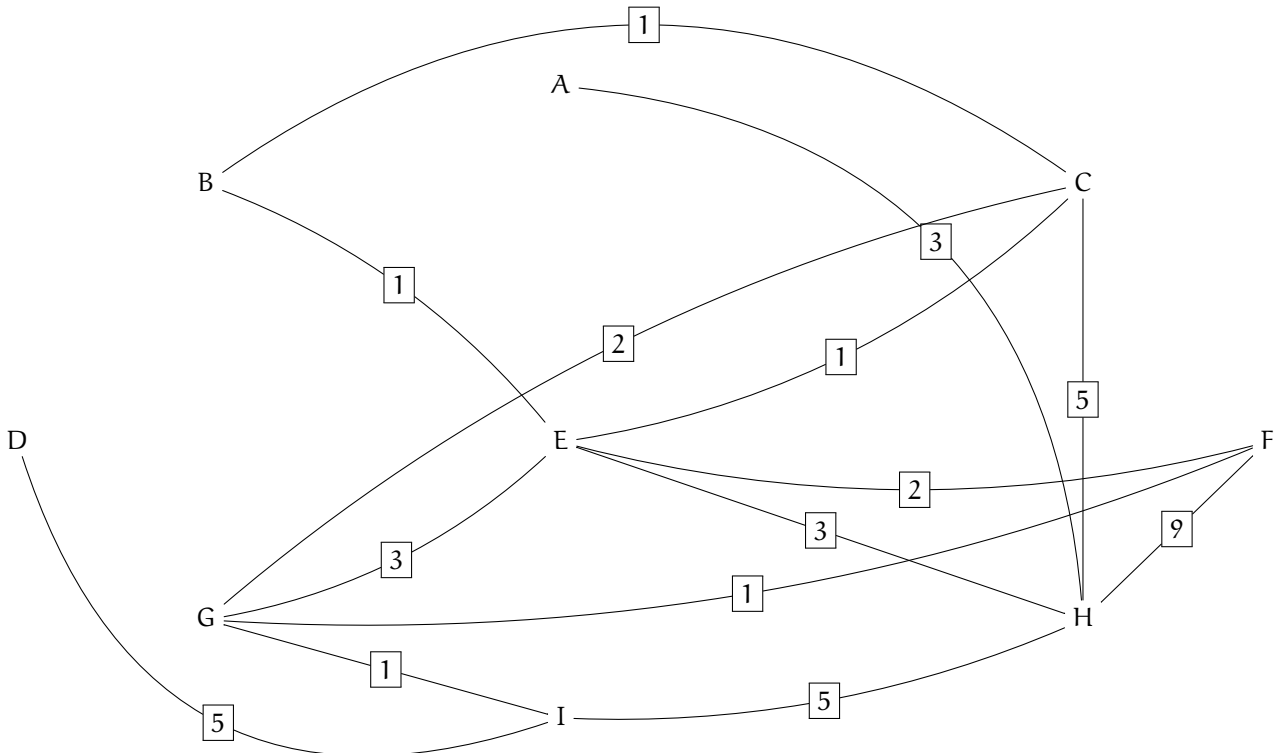
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 10

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| B | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 5 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| E | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 3 | 3 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 9 | 0 |
| G | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| H | 3 | 0 | 5 | 0 | 3 | 9 | 0 | 0 | 5 |
| I | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 1 | 1 | | X | 2 | 3 | 3 | |
| B | | X | 1 | | X | 2 | 3 | 3 | |
| C | | X | X | | X | 2 | 3 | 3 | |
| F | | X | X | | X | X | 3 | 3 | |
| G | | X | X | | X | X | X | 3 | 4 |
| H | 6 | X | X | | X | X | X | X | 4 |
| I | 6 | X | X | 9 | X | X | X | X | X |
| A | X | X | X | 9 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 1 | 2 | 4 | 1 | 5 | 3 | 4 | 5 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | H | C | G | F | I | B | A | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre EI. On ajoute une arête entre F et B ainsi qu'une arête entre B et H. Par exemple :

ADIEBCGEHCEFGIHFHBA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

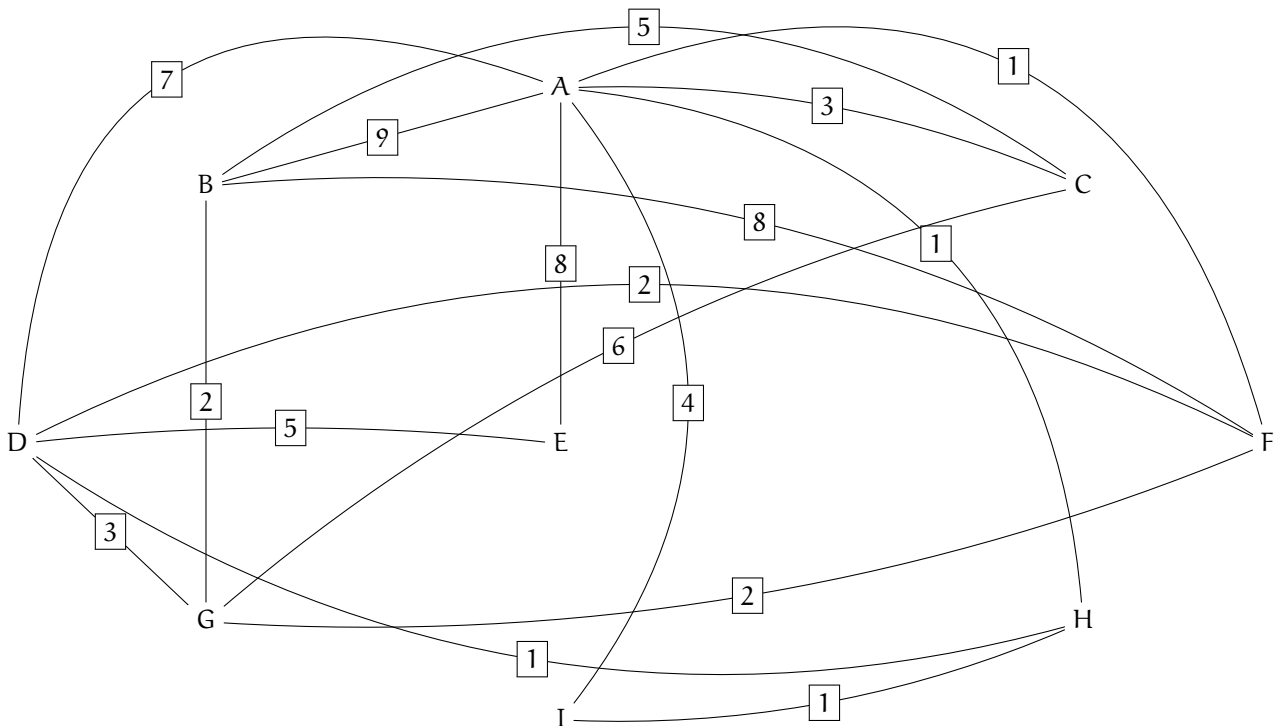
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et D ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EGID d'une distance de 9×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{9 \times 100}{50} = 18$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 9 | 3 | 7 | 8 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| B | 9 | 0 | 5 | 0 | 0 | 8 | 2 | 0 | 0 |
| C | 3 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 |
| D | 7 | 0 | 0 | 0 | 5 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| E | 8 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| F | 1 | 8 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| G | 0 | 2 | 6 | 3 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| H | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| I | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 8 | | | 5 | X | | | | |
| D | 7 | | | X | X | 2 | 3 | 1 | |
| H | 1 | | | X | X | 2 | 3 | X | 1 |
| A | X | 9 | 3 | X | X | 1 | 3 | X | 1 |
| F | X | 8 | 3 | X | X | X | 2 | X | 1 |
| I | X | 8 | 3 | X | X | X | 2 | X | X |
| G | X | 2 | 3 | X | X | X | X | X | X |
| B | X | X | 3 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 7 | 4 | 3 | 5 | 2 | 4 | 4 | 3 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | D | B | F | G | C | H | E | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CD. On ajoute une arête entre A et G ainsi qu'une arête entre G et H. Par exemple :

AHDGBFGHIAEDFADCGABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AH}, {BG}, {CA}, {DE}, {FA}, {GF}, {HD}, {IH}

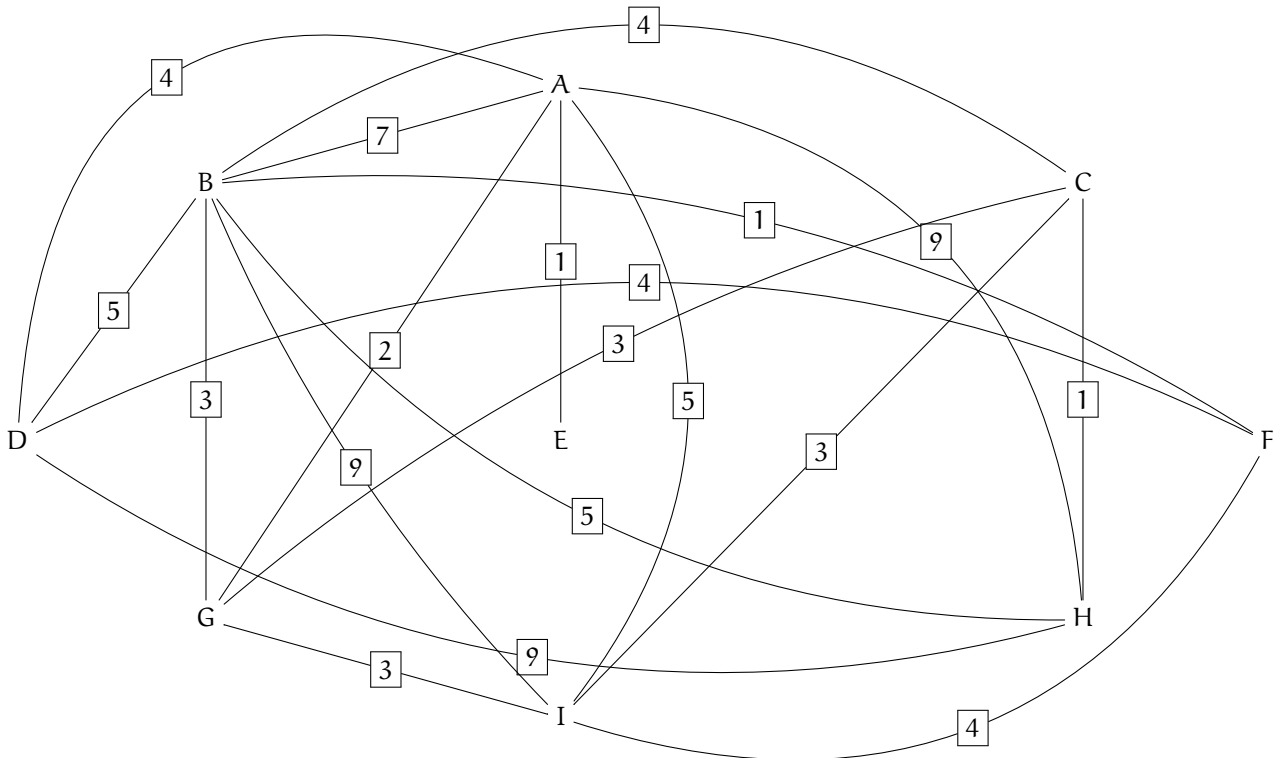
. Son poids est de 16 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{16 \times 100}{50} = 3200$ pièces d'or.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 7 | 0 | 4 | 1 | 0 | 2 | 9 | 5 |
| B | 7 | 0 | 4 | 5 | 0 | 1 | 3 | 5 | 9 |
| C | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 3 |
| D | 4 | 5 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 9 | 0 |
| E | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| F | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| G | 2 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| H | 9 | 5 | 1 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 5 | 9 | 3 | 0 | 0 | 4 | 3 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | | | | X | | | | |
| A | X | 7 | | 4 | X | | 2 | 9 | 5 |
| G | X | 3 | 3 | 4 | X | | X | 9 | 3 |
| B | X | X | 3 | 4 | X | 1 | X | 5 | 3 |
| F | X | X | 3 | 4 | X | X | X | 5 | 3 |
| C | X | X | X | 4 | X | X | X | 1 | 3 |
| H | X | X | X | 4 | X | X | X | X | 3 |
| I | X | X | X | 4 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 7 | 4 | 4 | 1 | 3 | 4 | 4 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | A | I | C | D | G | H | F | E |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BE. On ajoute une arête entre F et E ainsi qu'une arête entre E et I. Par exemple :

AHBGIBFDHICIADBEFIEABCGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :

- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
- Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
- Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
- Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AE\}, \{BG\}, \{CG\}, \{DA\}, \{FB\}, \{GA\}, \{HC\}, \{IG\}$

. Son poids est de 18 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{18 \times 100}{50} = 3600$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 6 | 4 | 4 | 3 | 8 | 4 | 5 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | B | H | A | C | D | G | I | E |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 8 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 2 | 3 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EH. Par exemple :

AHBEDFGHFBIABCGDIFEHCFA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 1 pirate dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EBHA d'une distance de 8×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{8 \times 100}{50} = 16$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 6 | 6 | 3 | 3 | 4 | 6 | 2 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | C | G | F | I | D | E | A | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | 3 | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre DE. Par exemple :

ABHCGDIBEDCFGIFEGBCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EGCA d'une distance de 7×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{7 \times 100}{50} = 14$ heures.

Contrôle Graphe & Langages

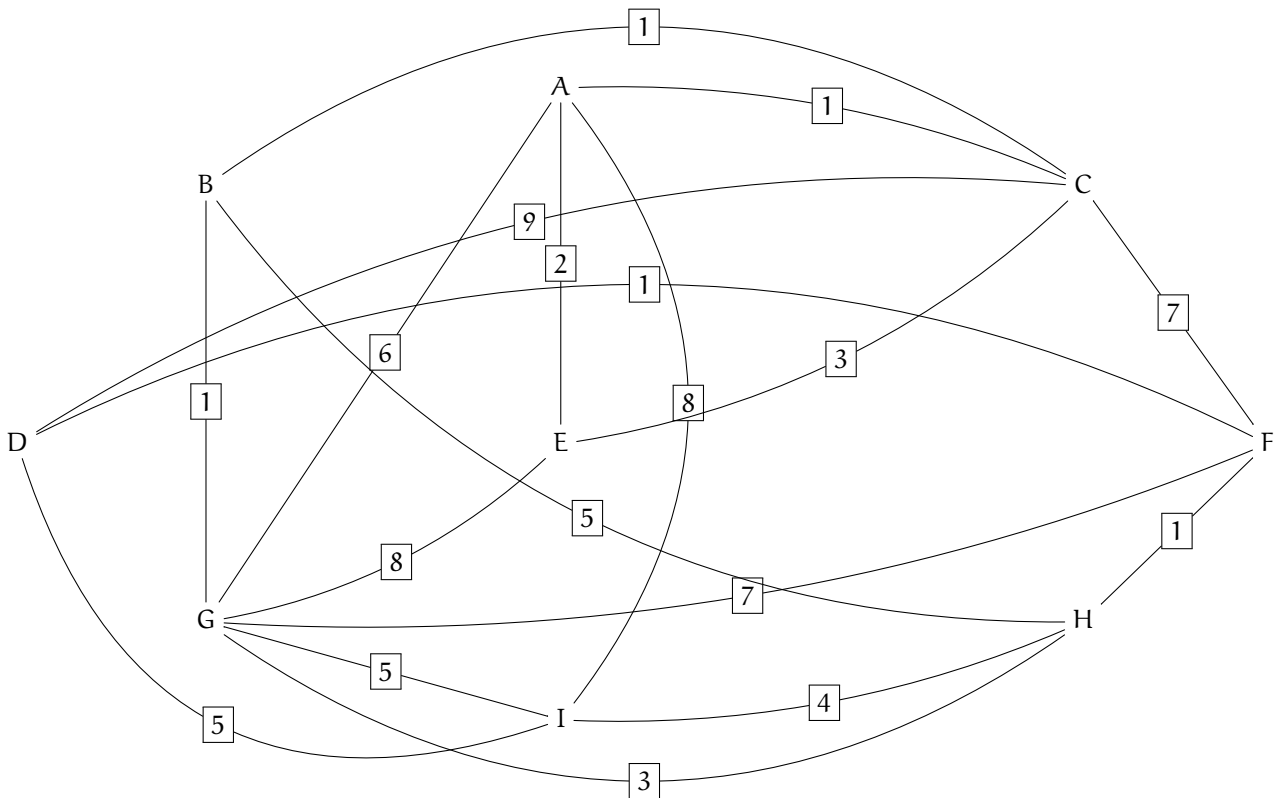
Correction du sujet 15

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 6 | 0 | 8 |
| B | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 |
| C | 1 | 1 | 0 | 9 | 3 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| D | 0 | 0 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| E | 2 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 7 | 1 | 0 | 0 | 7 | 1 | 0 |
| G | 6 | 1 | 0 | 0 | 8 | 7 | 0 | 3 | 5 |
| H | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 4 |
| I | 8 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 4 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 2 | | 3 | | X | | 8 | | |
| A | X | | 1 | | X | | 6 | | 8 |
| C | X | 1 | X | 9 | X | 7 | 6 | | 8 |
| B | X | X | X | 9 | X | 7 | 1 | 5 | 8 |
| G | X | X | X | 9 | X | 7 | X | 3 | 5 |
| H | X | X | X | 9 | X | 1 | X | X | 4 |
| F | X | X | X | 1 | X | X | X | X | 4 |
| D | X | X | X | X | X | X | X | X | 4 |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 3 | 5 | 3 | 3 | 4 | 6 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | G | C | A | F | H | I | B | D | E |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BD. On ajoute une arête entre C et H ainsi qu'une arête entre H et E. Par exemple :

AGHIGBHCDFDIACBDCEGFHEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :

- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
- Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
- Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
- Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AE\}, \{BC\}, \{CA\}, \{DF\}, \{FH\}, \{GB\}, \{HG\}, \{IH\}$

. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

Contrôle Graphe & Langages

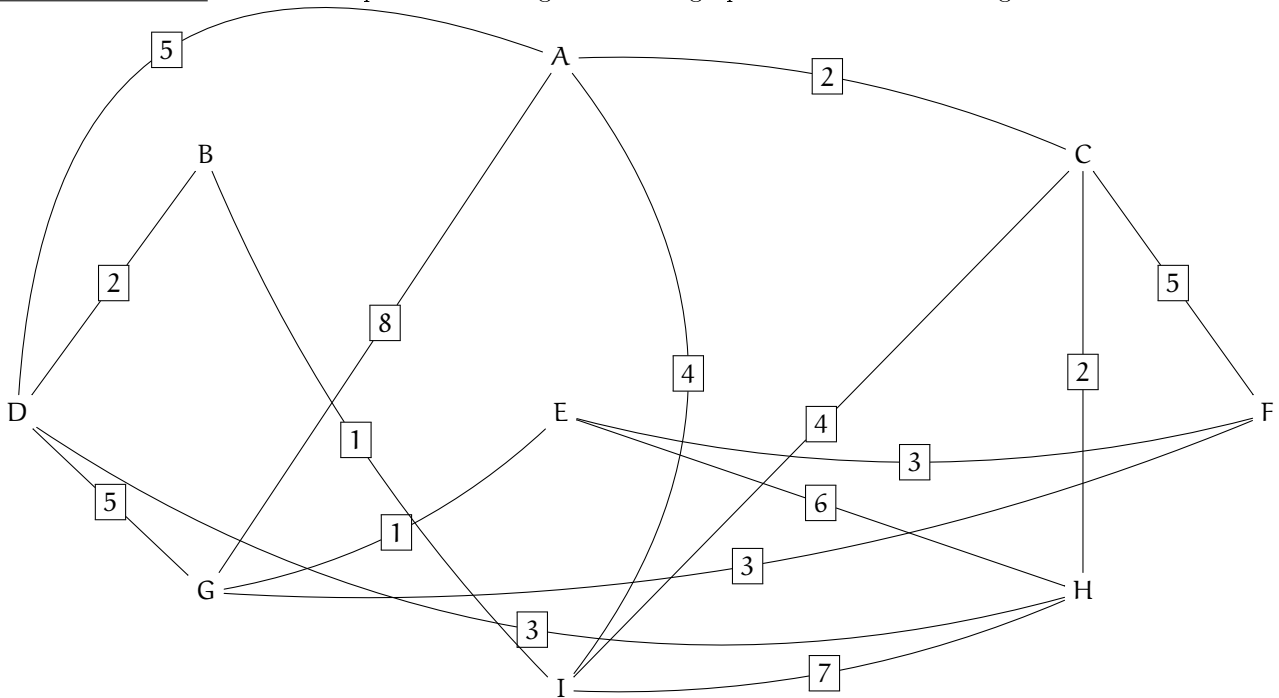
Correction du sujet 16

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 | 8 | 0 | 4 |
| B | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| C | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 2 | 4 |
| D | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 3 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 6 | 0 |
| F | 0 | 0 | 5 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| G | 8 | 0 | 0 | 5 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 0 | 2 | 3 | 6 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| I | 4 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | | | X | 3 | 1 | 6 | |
| G | 8 | | | 5 | X | 3 | X | 6 | |
| F | 8 | | 5 | 5 | X | X | X | 6 | |
| C | 2 | | X | 5 | X | X | X | 2 | 4 |
| A | X | | X | 5 | X | X | X | 2 | 4 |
| H | X | | X | 3 | X | X | X | X | 4 |
| D | X | 2 | X | X | X | X | X | X | 4 |
| B | X | X | X | X | X | X | X | X | 1 |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 2 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | C | D | G | H | I | E | F | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 1 | ■ | 2 | 1 | 3 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 3 | 2 | ■ | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre E et A ainsi qu'une arête entre A et F. Par exemple :

AEFGADBIACHDGEHICFA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 4 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AC\}, \{BD\}, \{CF\}, \{DH\}, \{FE\}, \{GE\}, \{HC\}, \{IB\}$$

. Son poids est de 19 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{19 \times 100}{50} = 3800$ pièces d'or.

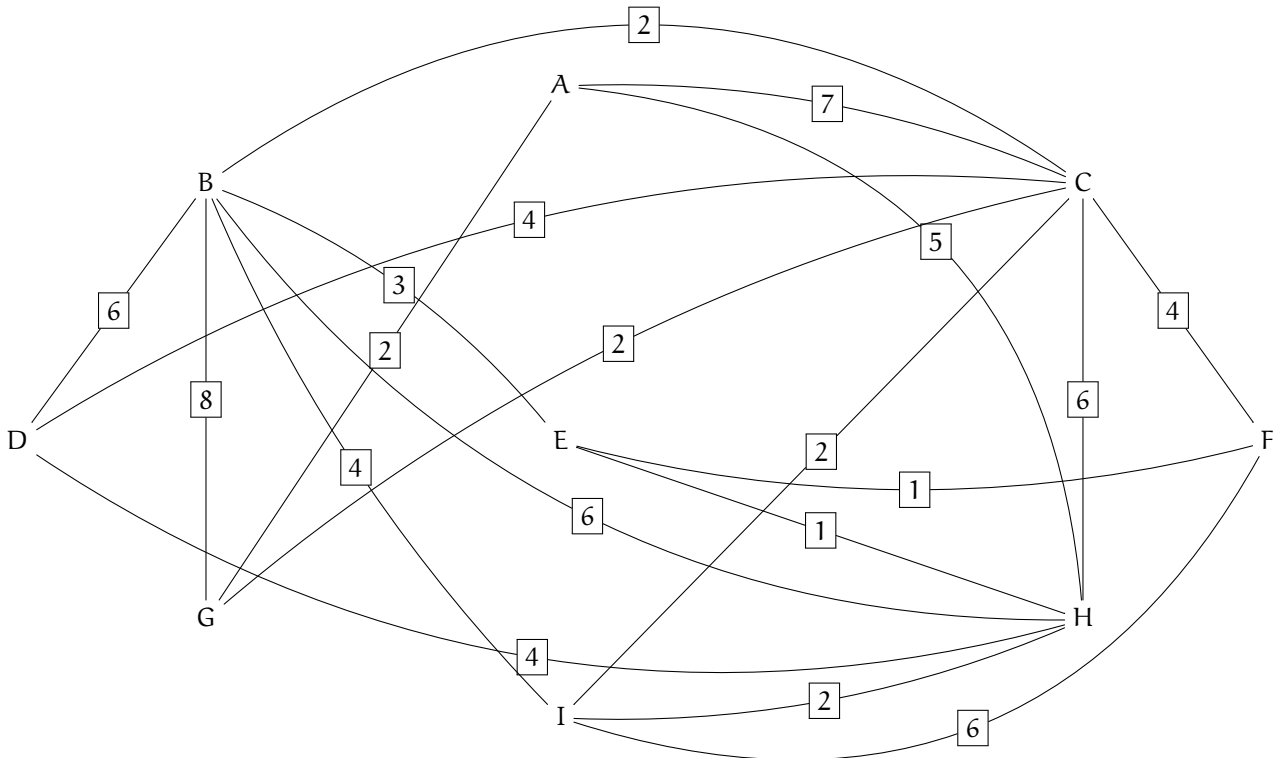
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 17

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 2 | 5 | 0 |
| B | 0 | 0 | 2 | 6 | 3 | 0 | 8 | 6 | 4 |
| C | 7 | 2 | 0 | 4 | 0 | 4 | 2 | 6 | 2 |
| D | 0 | 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| E | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| F | 0 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| G | 2 | 8 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 5 | 6 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| I | 0 | 4 | 2 | 0 | 0 | 6 | 0 | 2 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 3 | | | X | 1 | | 1 | |
| F | | 3 | 4 | | X | X | | 1 | 6 |
| H | 5 | 3 | 4 | 4 | X | X | | X | 2 |
| I | 5 | 3 | 2 | 4 | X | X | | X | X |
| C | 5 | 2 | X | 4 | X | X | 2 | X | X |
| B | 5 | X | X | 4 | X | X | 2 | X | X |
| G | 2 | X | X | 4 | X | X | X | X | X |
| A | X | X | X | 4 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 6 | 7 | 3 | 3 | 3 | 3 | 6 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | C | B | H | I | A | D | E | F | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 3 | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | ■ | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 4 | 1 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

AGBHCGFICFEHIBECDHACBDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AG\}, \{BC\}, \{CI\}, \{DH\}, \{FE\}, \{GC\}, \{HE\}, \{IH\}$

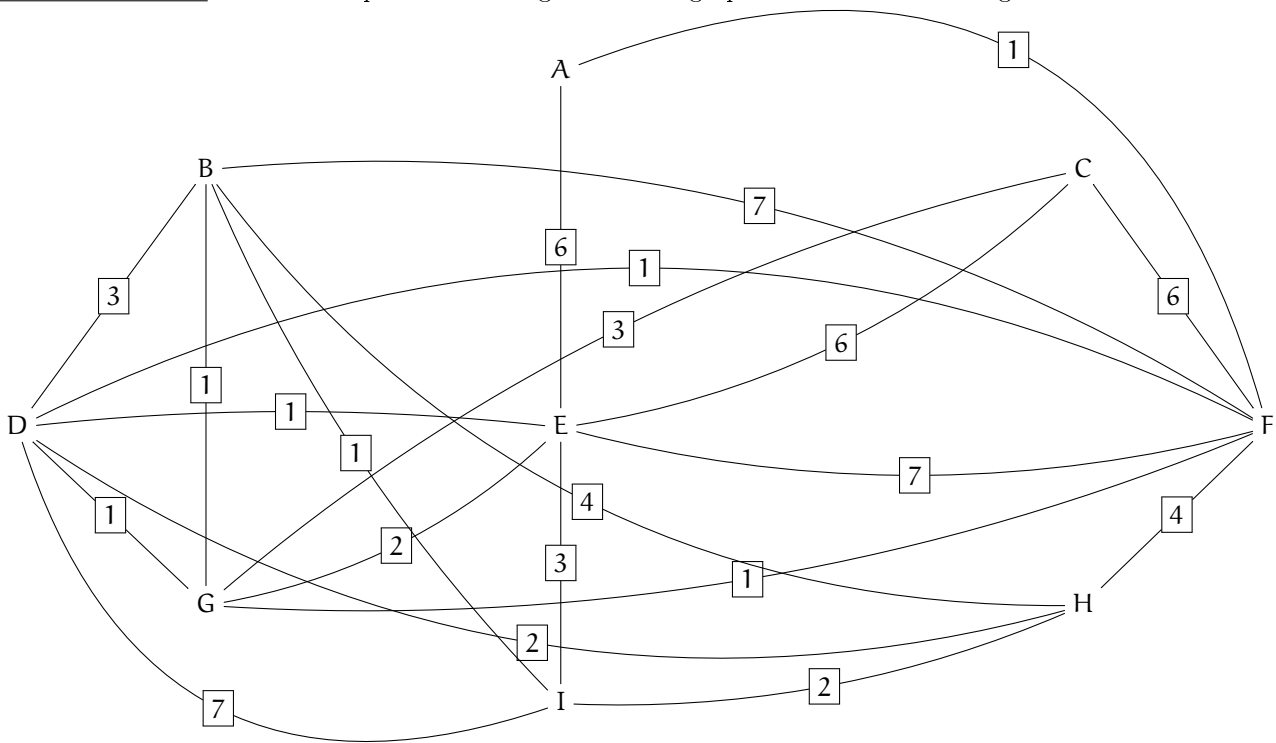
. Son poids est de 16 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{16 \times 100}{50} = 3200$ pièces d'or.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 7 | 1 | 4 | 1 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | 3 | 0 | 0 |
| D | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 7 |
| E | 6 | 0 | 6 | 1 | 0 | 7 | 2 | 0 | 3 |
| F | 1 | 7 | 6 | 1 | 7 | 0 | 1 | 4 | 0 |
| G | 0 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 4 | 0 | 2 | 0 | 4 | 0 | 0 | 2 |
| I | 0 | 1 | 0 | 7 | 3 | 0 | 0 | 2 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 6 | | 6 | 1 | X | 7 | 2 | | 3 |
| D | 6 | 3 | 6 | X | X | 1 | 1 | 2 | 3 |
| F | 1 | 3 | 6 | X | X | X | 1 | 2 | 3 |
| A | X | 3 | 6 | X | X | X | 1 | 2 | 3 |
| G | X | 1 | 3 | X | X | X | X | 2 | 3 |
| B | X | X | 3 | X | X | X | X | 2 | 1 |
| I | X | X | 3 | X | X | X | X | 2 | X |
| H | X | X | 3 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 5 | 3 | 6 | 6 | 7 | 5 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | D | E | B | G | H | I | C | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 4 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 1 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BC. On ajoute une arête entre F et I ainsi qu'une arête entre I et G. Par exemple :

AEGIECBHDFHIFGDIBFCGBDEFA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AF\}, \{BG\}, \{CG\}, \{DE\}, \{FD\}, \{GD\}, \{HD\}, \{IB\}$

. Son poids est de 11 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{11 \times 100}{50} = 2200$ pièces d'or.

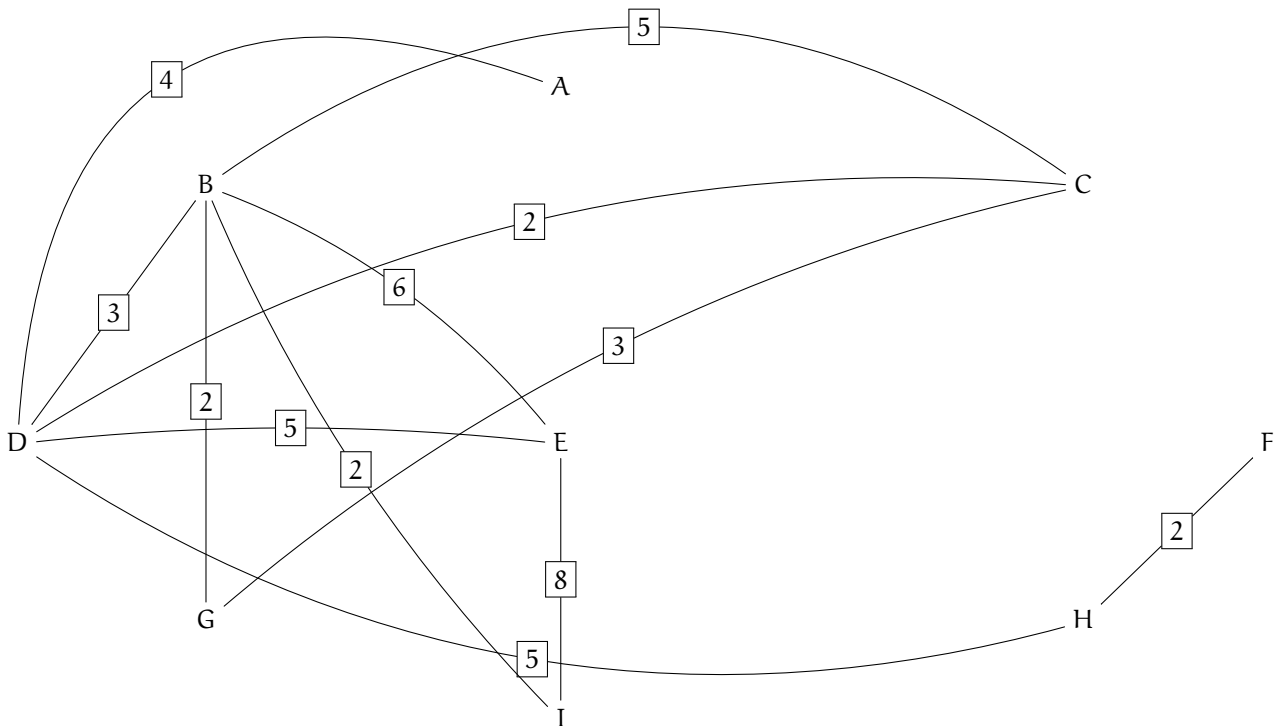
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 19

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en 0.5 cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 5 | 3 | 6 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| C | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| D | 4 | 3 | 2 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| E | 0 | 6 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| G | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 2 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|----|---|----|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 6 | | 5 | X | | | | 8 |
| D | 9 | 6 | 7 | X | X | | | 10 | 8 |
| B | 9 | X | 7 | X | X | | 8 | 10 | 8 |
| C | 9 | X | X | X | X | | 8 | 10 | 8 |
| G | 9 | X | X | X | X | | X | 10 | 8 |
| I | 9 | X | X | X | X | | X | 10 | X |
| A | X | X | X | X | X | | X | 10 | X |
| H | X | X | X | X | X | 12 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 1 | 5 | 3 | 5 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | D | C | E | G | H | I | A | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre DF. Par exemple :

ABGCEIBDFHDEBCDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDHF d'une distance de 12×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{12 \times 100}{50} = 24$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 4 | 6 | 4 | 3 | 3 | 5 | 5 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | C | G | H | B | D | I | E | F | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 4 | 2 | 3 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EG. On ajoute une arête entre FH. Par exemple :

ACGHIGEIDHCBFCEFHBDGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et D ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est ECBD d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Conton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

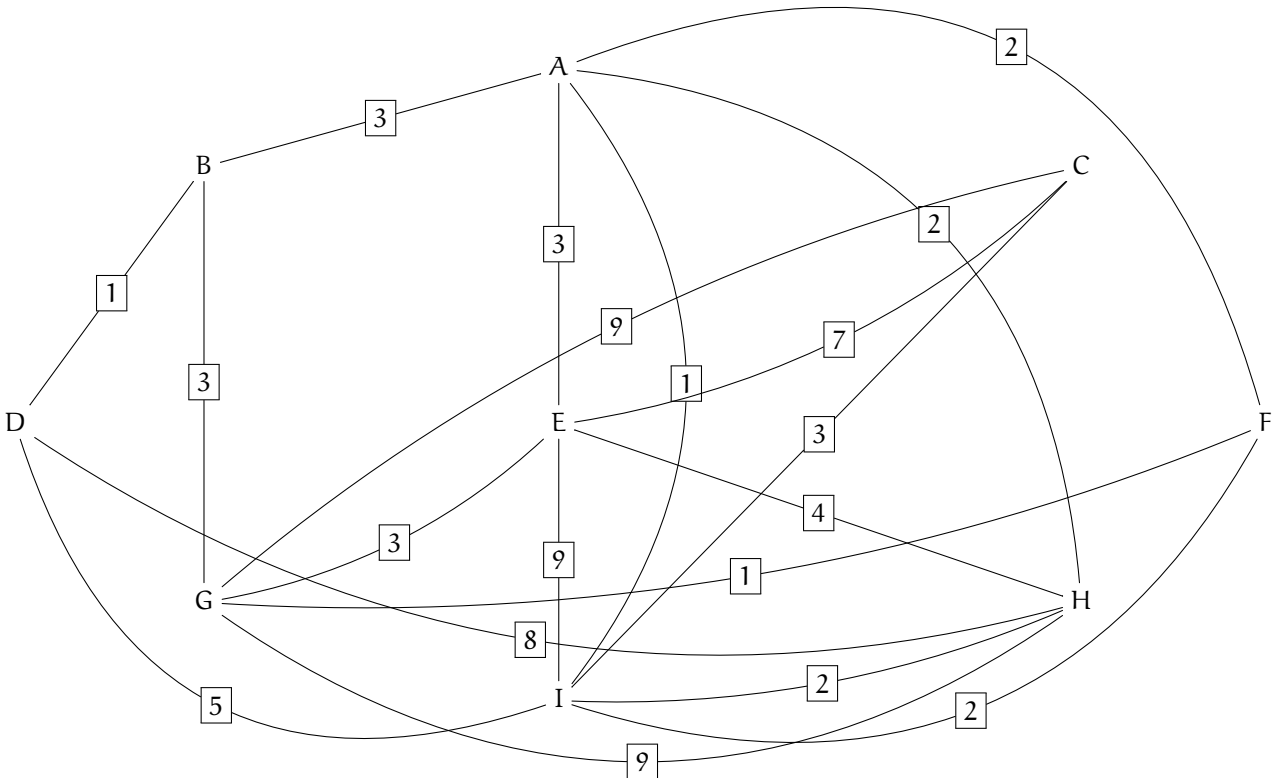
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 21

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| B | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 9 | 0 | 3 |
| D | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 5 |
| E | 3 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 3 | 4 | 9 |
| F | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| G | 0 | 3 | 9 | 0 | 3 | 1 | 0 | 9 | 0 |
| H | 2 | 0 | 0 | 8 | 4 | 0 | 9 | 0 | 2 |
| I | 1 | 0 | 3 | 5 | 9 | 2 | 0 | 2 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | | 7 | | X | | 3 | 4 | 9 |
| A | X | 3 | 7 | | X | 2 | 3 | 2 | 1 |
| I | X | 3 | 3 | 5 | X | 2 | 3 | 2 | X |
| F | X | 3 | 3 | 5 | X | X | 1 | 2 | X |
| G | X | 3 | 3 | 5 | X | X | X | 2 | X |
| H | X | 3 | 3 | 5 | X | X | X | X | X |
| B | X | X | 3 | 1 | X | X | X | X | X |
| D | X | X | 3 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 3 | 3 | 3 | 5 | 3 | 5 | 5 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | I | A | E | G | H | B | C | D | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 5 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | ■ | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | 1 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 3 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 3 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ |
| Coul | 1 | 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AC. On ajoute une arête entre BE. On ajoute une arête entre DF. On ajoute une arête entre DI. On ajoute une arête entre DH. On ajoute une arête entre FI. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre AG. On ajoute une arête entre D et C ainsi qu'une arête entre C et H. Par exemple :

AHCEGCIAEBGACDHEIDFGHIFABDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AE\}, \{BA\}, \{CI\}, \{DB\}, \{FA\}, \{GF\}, \{HA\}, \{IA\}$$

. Son poids est de 16 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{16 \times 100}{50} = 3200$ pièces d'or.

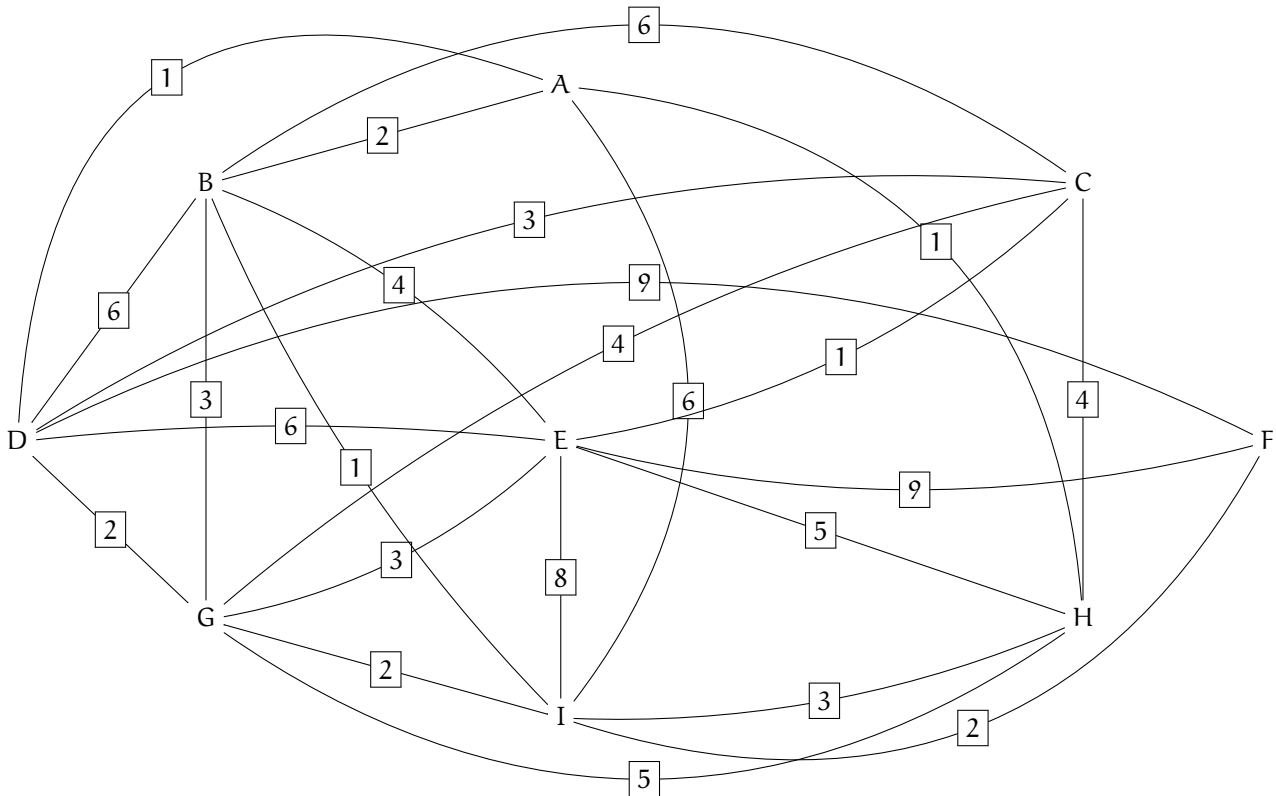
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 22

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 |
| B | 2 | 0 | 6 | 6 | 4 | 0 | 3 | 0 | 1 |
| C | 0 | 6 | 0 | 3 | 1 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| D | 1 | 6 | 3 | 0 | 6 | 9 | 2 | 0 | 0 |
| E | 0 | 4 | 1 | 6 | 0 | 9 | 3 | 5 | 8 |
| F | 0 | 0 | 0 | 9 | 9 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| G | 0 | 3 | 4 | 2 | 3 | 0 | 0 | 5 | 2 |
| H | 1 | 0 | 4 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 3 |
| I | 6 | 1 | 0 | 0 | 8 | 2 | 2 | 3 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 4 | 1 | 6 | X | 9 | 3 | 5 | 8 |
| C | | 4 | X | 4 | X | 9 | 3 | 5 | 8 |
| G | | 4 | X | 4 | X | 9 | X | 5 | 5 |
| B | 6 | X | X | 4 | X | 9 | X | 5 | 5 |
| D | 5 | X | X | X | X | 9 | X | 5 | 5 |
| A | X | X | X | X | X | 9 | X | 5 | 5 |
| H | X | X | X | X | X | 9 | X | X | 5 |
| I | X | X | X | X | X | 7 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 6 | 5 | 6 | 7 | 3 | 6 | 5 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | B | D | G | I | C | H | A | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | 2 | ■ | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 4 | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 4 | ■ | 3 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 5 | ■ | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 5 | 2 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CF. On ajoute une arête entre CI. On ajoute une arête entre C et A ainsi qu'une arête entre A et E. On ajoute une arête entre H et D ainsi qu'une arête entre D et I. Par exemple :

AHCGHIGEFICDHEIDECFDGBIADBEABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est ECDA d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

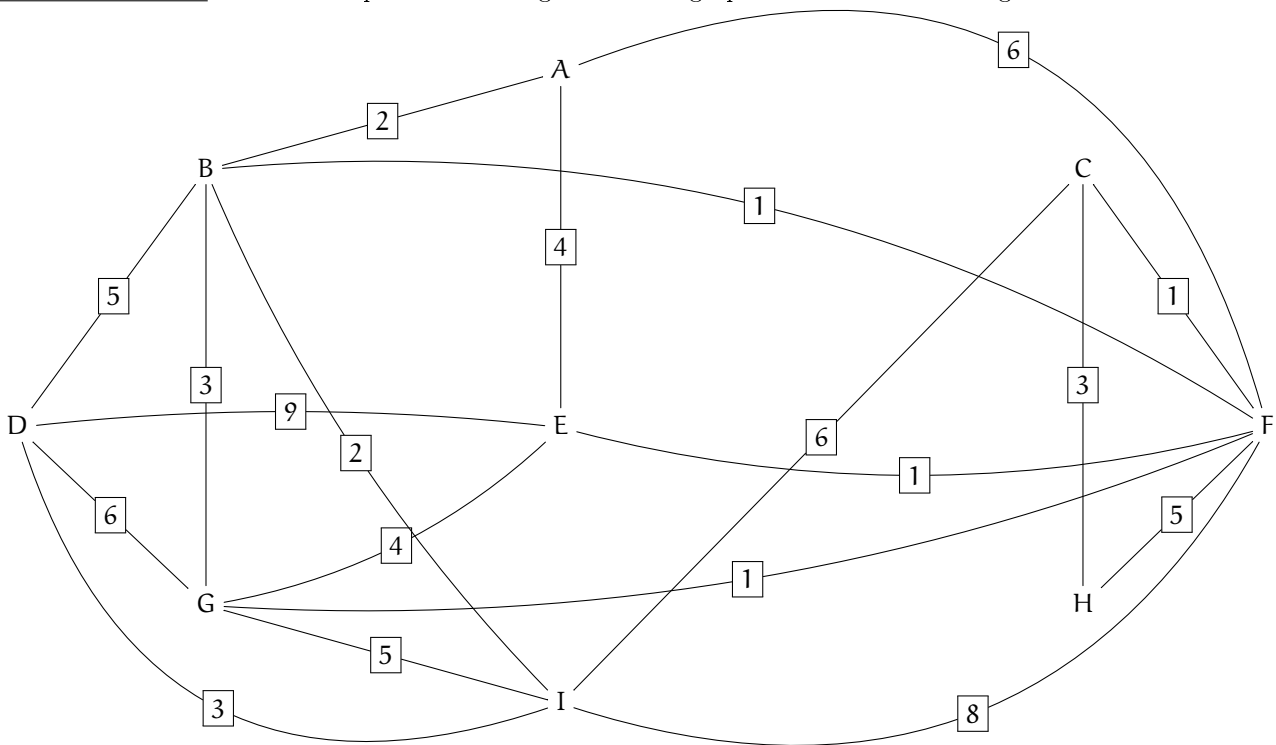
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 23

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| B | 2 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 3 | 0 | 2 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 6 |
| D | 0 | 5 | 0 | 0 | 9 | 0 | 6 | 0 | 3 |
| E | 4 | 0 | 0 | 9 | 0 | 1 | 4 | 0 | 0 |
| F | 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 8 |
| G | 0 | 3 | 0 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| H | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 2 | 6 | 3 | 0 | 8 | 5 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 4 | | | 9 | X | 1 | 4 | | |
| F | 4 | 1 | 1 | 9 | X | X | 1 | 5 | 8 |
| B | 2 | X | 1 | 5 | X | X | 1 | 5 | 2 |
| C | 2 | X | X | 5 | X | X | 1 | 3 | 2 |
| G | 2 | X | X | 5 | X | X | X | 3 | 2 |
| A | X | X | X | 5 | X | X | X | 3 | 2 |
| I | X | X | X | 3 | X | X | X | 3 | X |
| D | X | X | X | X | X | X | X | 3 | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 5 | 3 | 4 | 4 | 7 | 5 | 2 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | B | G | I | D | E | A | C | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AC. On ajoute une arête entre B et C ainsi qu'une arête entre C et G. On ajoute une arête entre GI. On ajoute une arête entre EH. On ajoute une arête entre EI. On ajoute une arête entre F et D ainsi qu'une arête entre D et H. Par exemple :

AEHFIEDBGCHDICFDGEFGIBFABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AB\}, \{BF\}, \{CF\}, \{DI\}, \{FE\}, \{GF\}, \{HC\}, \{IB\}$$

. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | C | E | G | I | D | H | B | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | 1 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 1 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre DH. Par exemple :

ADBGACHDFHICEGIEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 4 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AE\}, \{BG\}, \{CE\}, \{DB\}, \{FD\}, \{GA\}, \{HI\}, \{IG\}$

. Son poids est de 16 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{16 \times 100}{50} = 3200$ pièces d'or.

Contrôle Graphe & Langages

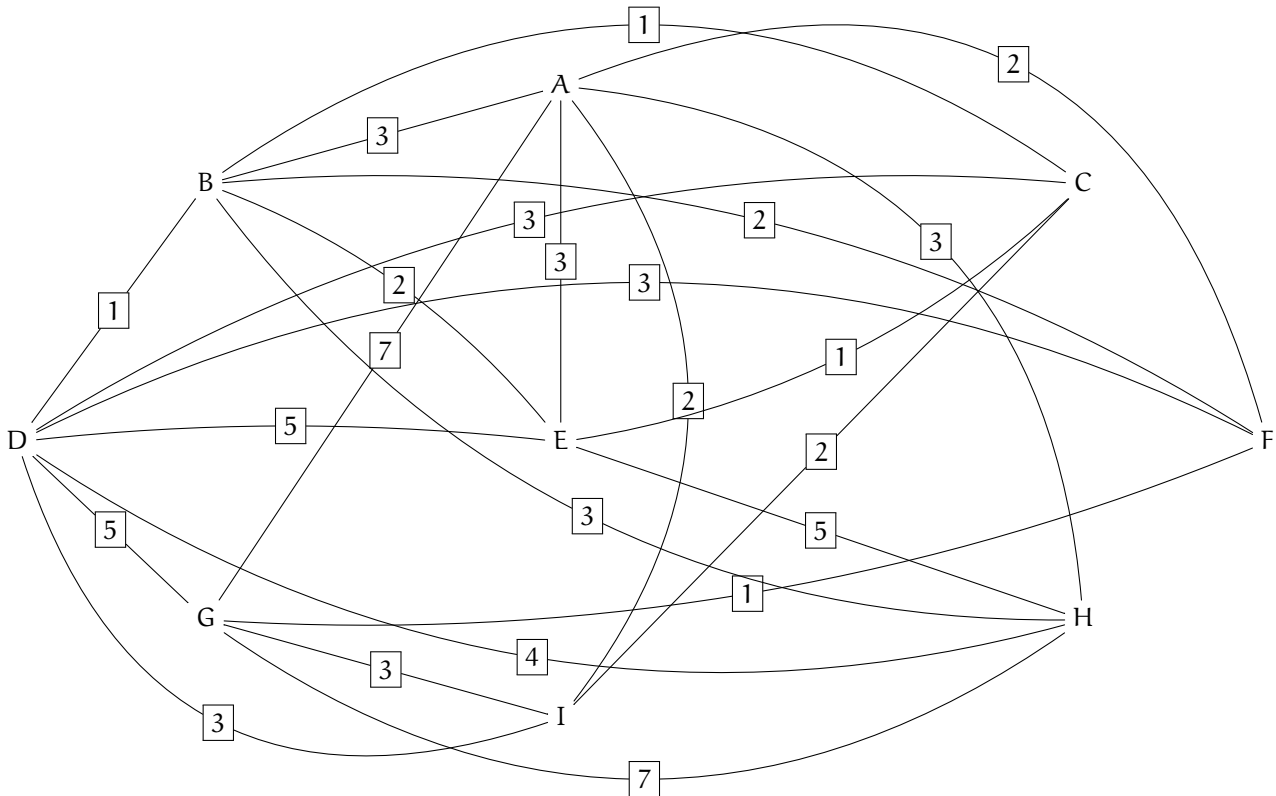
Correction du sujet 25

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 0 | 0 | 3 | 2 | 7 | 3 | 2 |
| B | 3 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| C | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| D | 0 | 1 | 3 | 0 | 5 | 3 | 5 | 4 | 3 |
| E | 3 | 2 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| F | 2 | 2 | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| G | 7 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 7 | 3 |
| H | 3 | 3 | 0 | 4 | 5 | 0 | 7 | 0 | 0 |
| I | 2 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | 2 | 1 | 5 | X | | | 5 | |
| C | 3 | 1 | X | 3 | X | | | 5 | 2 |
| B | 3 | X | X | 1 | X | 2 | | 3 | 2 |
| D | 3 | X | X | X | X | 2 | 5 | 3 | 2 |
| F | 2 | X | X | X | X | X | 1 | 3 | 2 |
| G | 2 | X | X | X | X | X | X | 3 | 2 |
| A | X | X | X | X | X | X | X | 3 | 2 |
| I | X | X | X | X | X | X | X | 3 | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 6 | 4 | 7 | 5 | 4 | 5 | 5 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | A | B | E | G | H | C | F | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 |
| DSAT ₂ | ■ | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | 3 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 | 4 | 3 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EG. On ajoute une arête entre FH. On ajoute une arête entre GI. On ajoute une arête entre HI. On ajoute une arête entre FI. On ajoute une arête entre AG. On ajoute une arête entre EF. On ajoute une arête entre F et C ainsi qu'une arête entre C et H. On ajoute une arête entre GH. On ajoute une arête entre DH. On ajoute une arête entre EI. On ajoute une arête entre CG. On ajoute une arête entre C et A ainsi qu'une arête entre A et D. On ajoute une arête entre G et B ainsi qu'une arête entre B et I. Par exemple :

AHBIAFBGHIGADBEHFIEFGEABCHDICFDGCDECA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AF\}, \{BC\}, \{CE\}, \{DB\}, \{FB\}, \{GF\}, \{HB\}, \{IC\}$$

. Son poids est de 13 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{13 \times 100}{50} = 2600$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 4 | 5 | 2 | 5 | 2 | 2 | 1 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | C | E | B | I | A | D | F | G | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CH. On ajoute une arête entre E et F ainsi qu'une arête entre F et I. Par exemple :

ACBFCEFIEDGCHIBEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50 km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EBF d'une distance de 5×100 km. A 50 km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

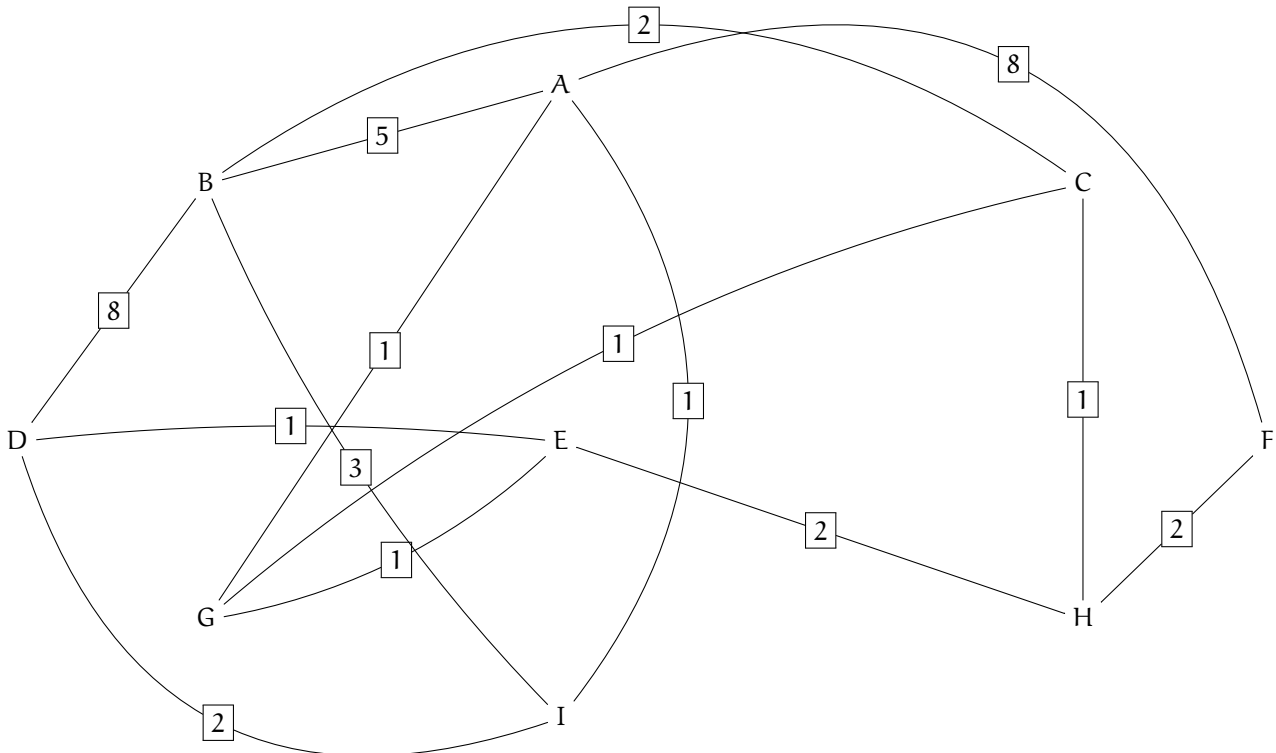
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 27

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8 | 1 | 0 | 1 |
| B | 5 | 0 | 2 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| C | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| D | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| E | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| F | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| G | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| I | 1 | 3 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|----|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | | 1 | X | | 1 | 2 | |
| D | | 9 | | X | X | | 1 | 2 | 3 |
| G | 2 | 9 | 2 | X | X | | X | 2 | 3 |
| A | X | 7 | 2 | X | X | 10 | X | 2 | 3 |
| C | X | 4 | X | X | X | 10 | X | 2 | 3 |
| H | X | 4 | X | X | X | 4 | X | X | 3 |
| I | X | 4 | X | X | X | 4 | X | X | X |
| B | X | X | X | X | X | 4 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | C | D | E | G | H | I | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | ■ | ■ | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 2 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CD. On ajoute une arête entre EI. On ajoute une arête entre GH. Par exemple :

AFHCGABCDEGHEIDBIA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliées par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et B ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EGCB d'une distance de 4×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{4 \times 100}{50} = 8$ heures.

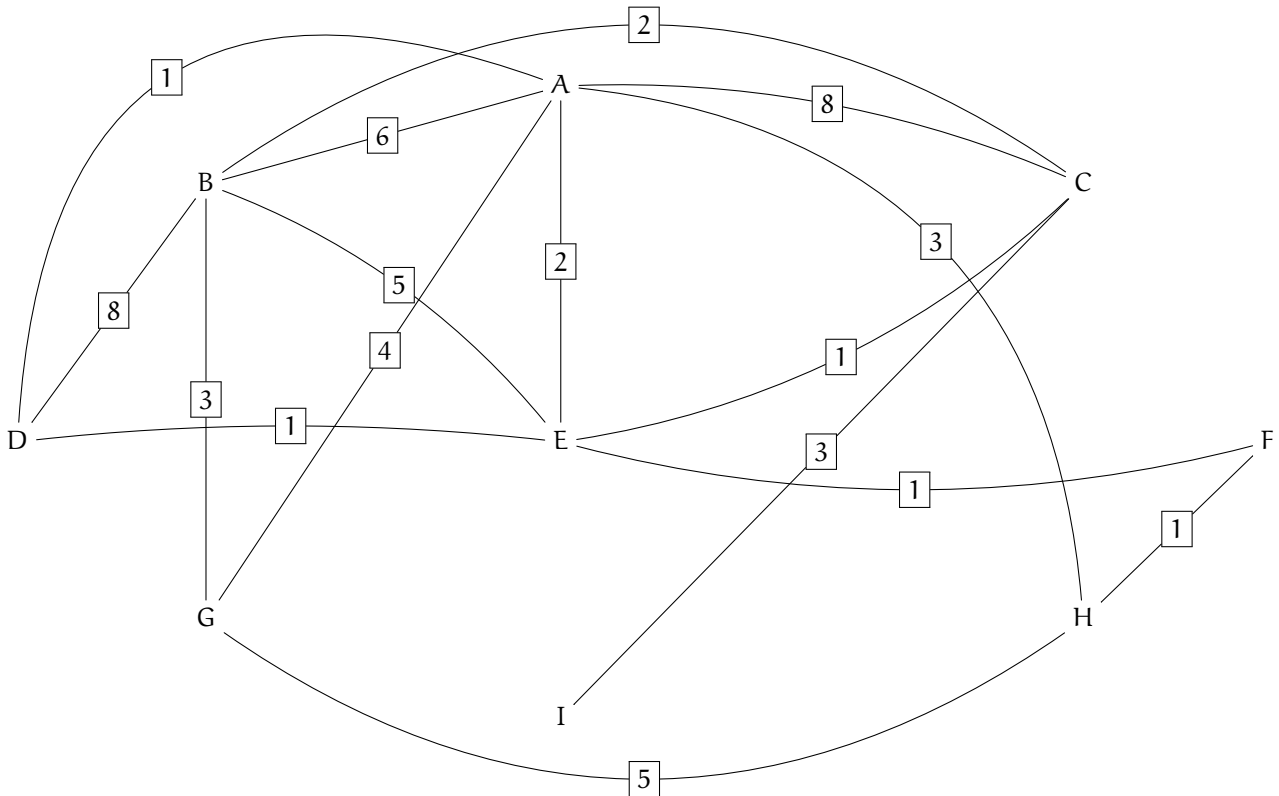
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 28

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 6 | 8 | 1 | 2 | 0 | 4 | 3 | 0 |
| B | 6 | 0 | 2 | 8 | 5 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| C | 8 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| D | 1 | 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 2 | 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| G | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| H | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 2 | 5 | 1 | 1 | X | 1 | | | |
| C | 2 | 3 | X | 1 | X | 1 | | | 4 |
| D | 2 | 3 | X | X | X | 1 | | | 4 |
| F | 2 | 3 | X | X | X | X | | 2 | 4 |
| A | X | 3 | X | X | X | X | 6 | 2 | 4 |
| H | X | 3 | X | X | X | X | 6 | X | 4 |
| B | X | X | X | X | X | X | 6 | X | 4 |
| I | X | X | X | X | X | X | 6 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 5 | 4 | 3 | 5 | 2 | 3 | 3 | 1 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | E | C | D | G | H | F | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 4 | 4 | 2 | 3 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BH. On ajoute une arête entre DG. On ajoute une arête entre EI. Par exemple :

AGBHADBEABCEDEGHFEICA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et B ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est ECB d'une distance de 3×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Conton, $\frac{3 \times 100}{50} = 6$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 7 | 6 | 3 | 4 | 2 | 3 | 5 | 5 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | G | H | D | C | F | I | E |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 3 | 4 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AH. On ajoute une arête entre CG. On ajoute une arête entre FI. Par exemple :

AHBIAEBGACGDHCFHGIFABDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et H ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EAGH d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

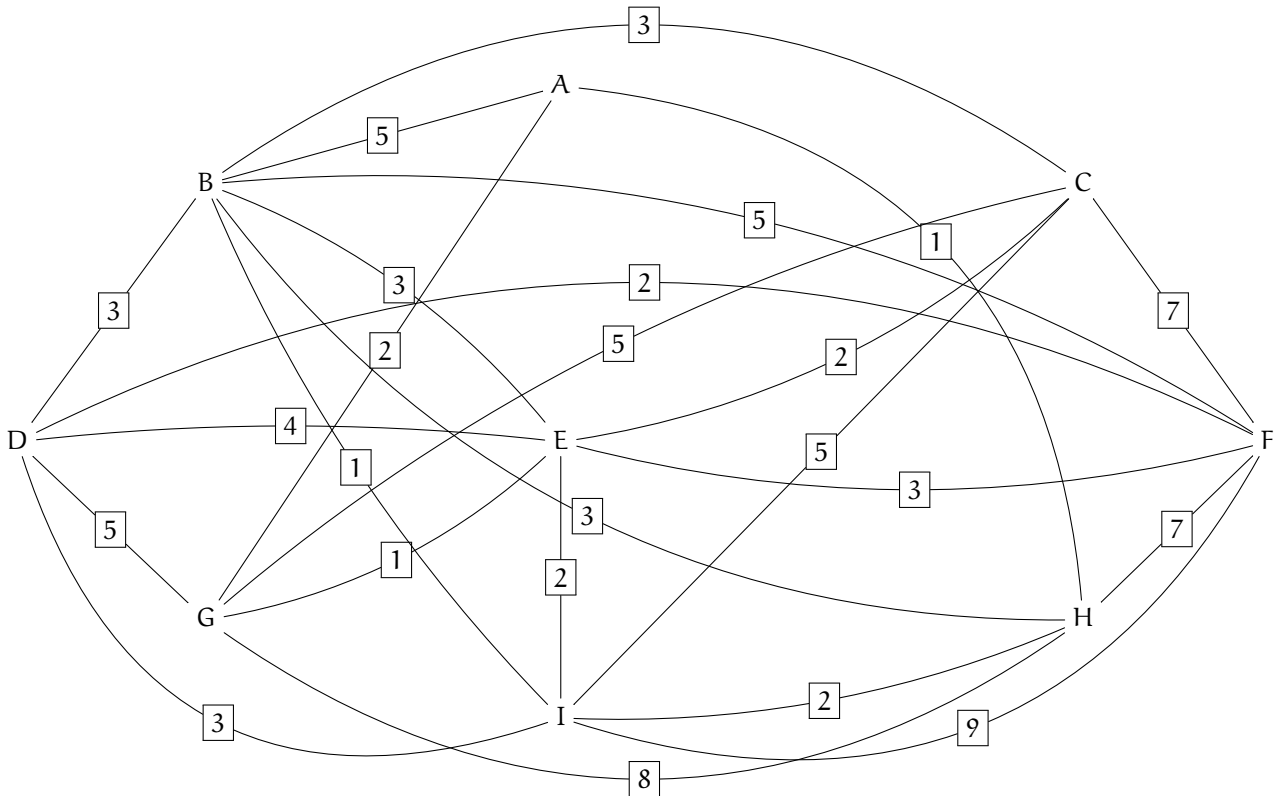
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 30

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| B | 5 | 0 | 3 | 3 | 3 | 5 | 0 | 3 | 1 |
| C | 0 | 3 | 0 | 0 | 2 | 7 | 5 | 0 | 5 |
| D | 0 | 3 | 0 | 0 | 4 | 2 | 5 | 0 | 3 |
| E | 0 | 3 | 2 | 4 | 0 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| F | 0 | 5 | 7 | 2 | 3 | 0 | 0 | 7 | 9 |
| G | 2 | 0 | 5 | 5 | 1 | 0 | 0 | 8 | 0 |
| H | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 7 | 8 | 0 | 2 |
| I | 0 | 1 | 5 | 3 | 2 | 9 | 0 | 2 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 3 | 2 | 4 | X | 3 | 1 | | 2 |
| G | 2 | 3 | 2 | 4 | X | 3 | X | 8 | 2 |
| A | X | 3 | 2 | 4 | X | 3 | X | 1 | 2 |
| H | X | 3 | 2 | 4 | X | 3 | X | X | 2 |
| C | X | 3 | X | 4 | X | 3 | X | X | 2 |
| I | X | 1 | X | 3 | X | 3 | X | X | X |
| B | X | X | X | 3 | X | 3 | X | X | X |
| D | X | X | X | X | X | 2 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 7 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | E | F | I | C | D | G | H | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 4 | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 5 | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AC. On ajoute une arête entre BG. On ajoute une arête entre DH. Par exemple :

AGBDHFIDEIGHIEBFCEFDGCIBHABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AG}, {BI}, {CE}, {DI}, {FD}, {GE}, {HA}, {IE}

. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 3 | 6 | 5 | 3 | 3 | 5 | 4 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | C | D | G | H | A | B | E | F | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 4 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre DE. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

ACHDICFGCEGHEDGBFABDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et B ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est ECFB d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Conton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 7 | 3 | 6 | 3 | 5 | 3 | 3 | 5 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | C | E | H | B | D | F | G | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 5 | 5 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | ■ | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | ■ | 3 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 1 | 4 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AG. On ajoute une arête entre BD. On ajoute une arête entre EF. On ajoute une arête entre H et B ainsi qu'une arête entre B et I. Par exemple :

AHBIAFCGEHIEFHCDGADBEABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et B ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EAB d'une distance de 2×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Conton, $\frac{2 \times 100}{50} = 4$ heures.

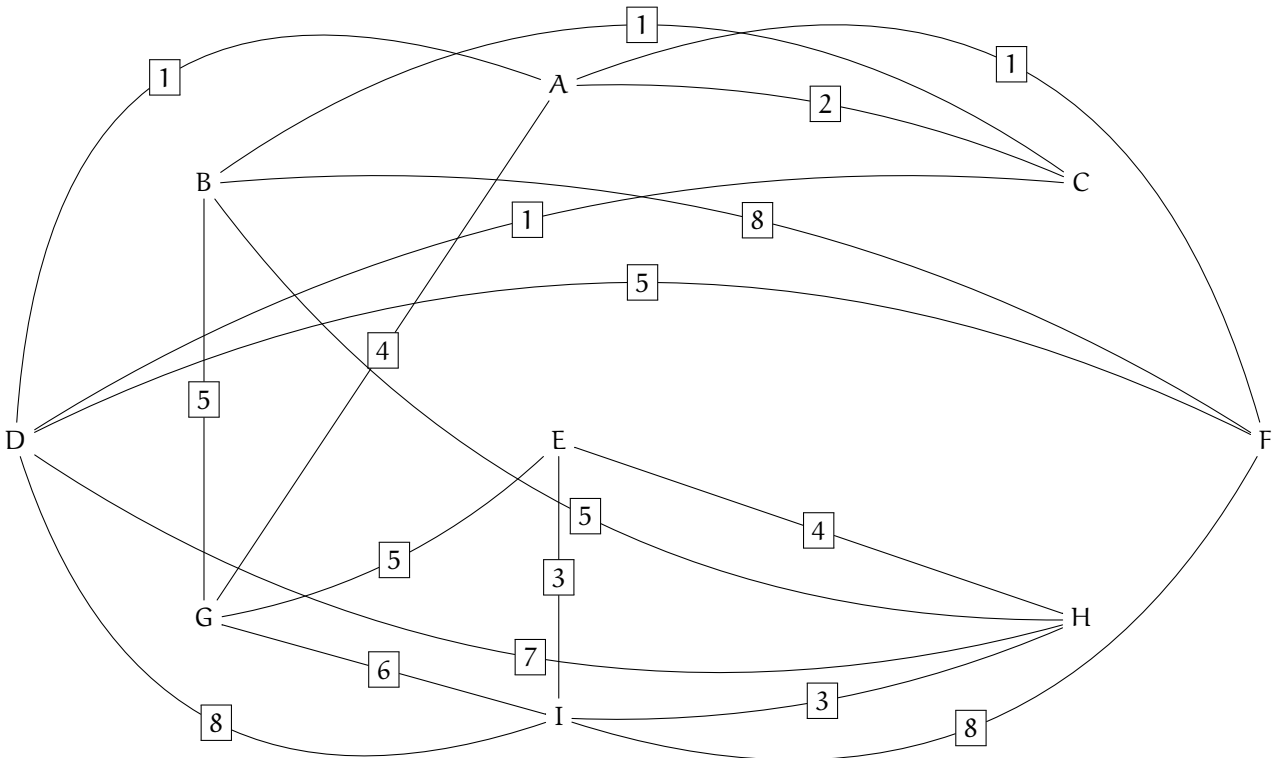
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 33

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 4 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 5 | 5 | 0 |
| C | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 | 7 | 8 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 4 | 3 |
| F | 1 | 8 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| G | 4 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| H | 0 | 5 | 0 | 7 | 4 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| I | 0 | 0 | 0 | 8 | 3 | 8 | 6 | 3 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|----|----|---|----|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | | | X | | 5 | 4 | 3 |
| I | | | | 11 | X | 11 | 5 | 4 | X |
| H | | 9 | | 11 | X | 11 | 5 | X | X |
| G | 9 | 9 | | 11 | X | 11 | X | X | X |
| A | X | 9 | 11 | 10 | X | 10 | X | X | X |
| B | X | X | 10 | 10 | X | 10 | X | X | X |
| C | X | X | X | 10 | X | 10 | X | X | X |
| D | X | X | X | X | X | 10 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 4 | 3 | 5 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | I | A | B | F | G | H | C | E |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 1 | 3 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 1 | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | 1 | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | 3 | 1 | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 1 | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ |
| Coul | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre D et B ainsi qu'une arête entre B et I. Par exemple :

AFB HDFIDCEHIEGIBGACBDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et C ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EHBC d'une distance de 10×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{10 \times 100}{50} = 20$ heures.

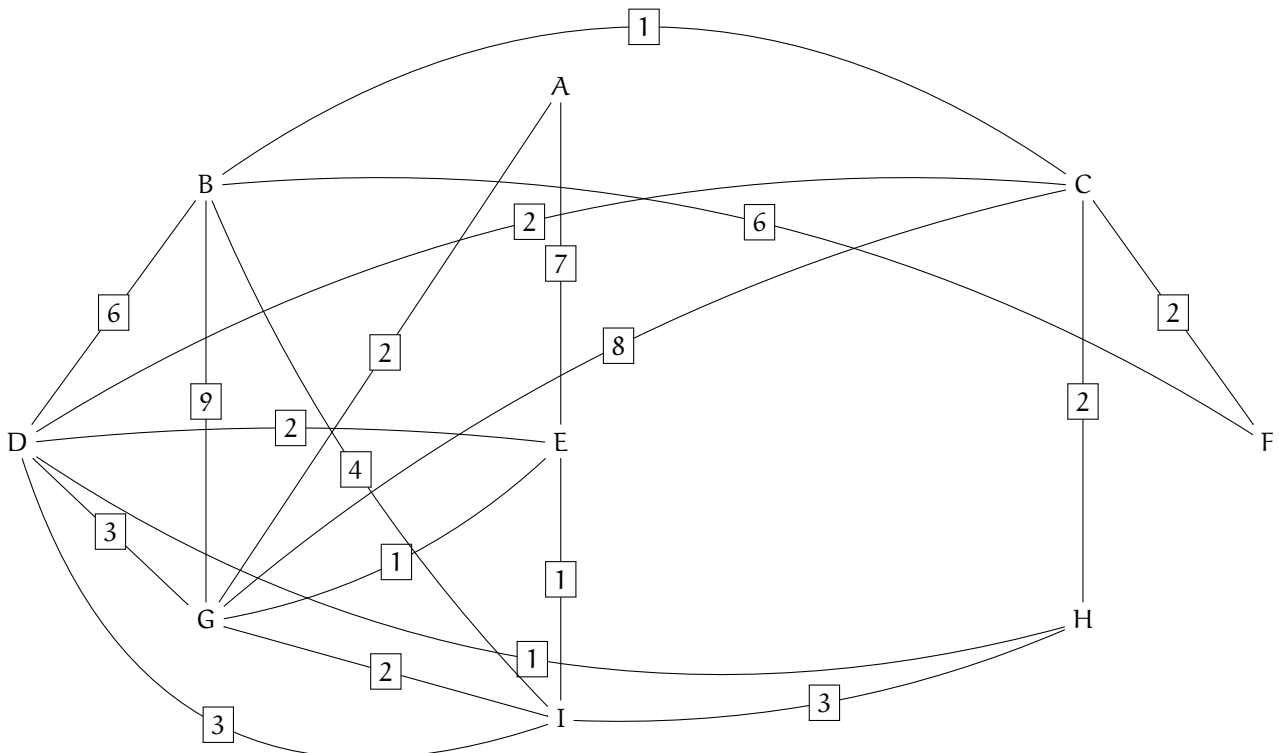
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 34

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 1 | 6 | 0 | 6 | 9 | 0 | 4 |
| C | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 8 | 2 | 0 |
| D | 0 | 6 | 2 | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 3 |
| E | 7 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| F | 0 | 6 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 2 | 9 | 8 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| H | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| I | 0 | 4 | 0 | 3 | 1 | 0 | 2 | 3 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|----|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 7 | | | 2 | X | | 1 | | 1 |
| G | 3 | 10 | 9 | 2 | X | | X | | 1 |
| I | 3 | 5 | 9 | 2 | X | | X | 4 | X |
| D | 3 | 5 | 4 | X | X | | X | 3 | X |
| A | X | 5 | 4 | X | X | | X | 3 | X |
| H | X | 5 | 4 | X | X | | X | X | X |
| C | X | 5 | X | X | X | 6 | X | X | X |
| B | X | X | X | X | X | 6 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 5 | 5 | 6 | 4 | 2 | 6 | 3 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | G | B | C | I | E | H | A | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | ■ | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | ■ | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | ■ | 1 | ■ | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BH. On ajoute une arête entre CI. Par exemple :

AEGIEDHIDBHCIBFCGBCDGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDCF d'une distance de 6×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{6 \times 100}{50} = 12$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 5 | 4 | 5 | 4 | 3 | 4 | 6 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | A | B | D | C | E | G | F | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AF. On ajoute une arête entre BD. Par exemple :

AFBGHDIAEFHECHBDGABCD

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EFHGA d'une distance de 4×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{4 \times 100}{50} = 8$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 1 | 5 | 3 | 4 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | D | E | G | C | I | F | H | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 4 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre C et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

ADBGDHBFEIGIECIABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliées par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

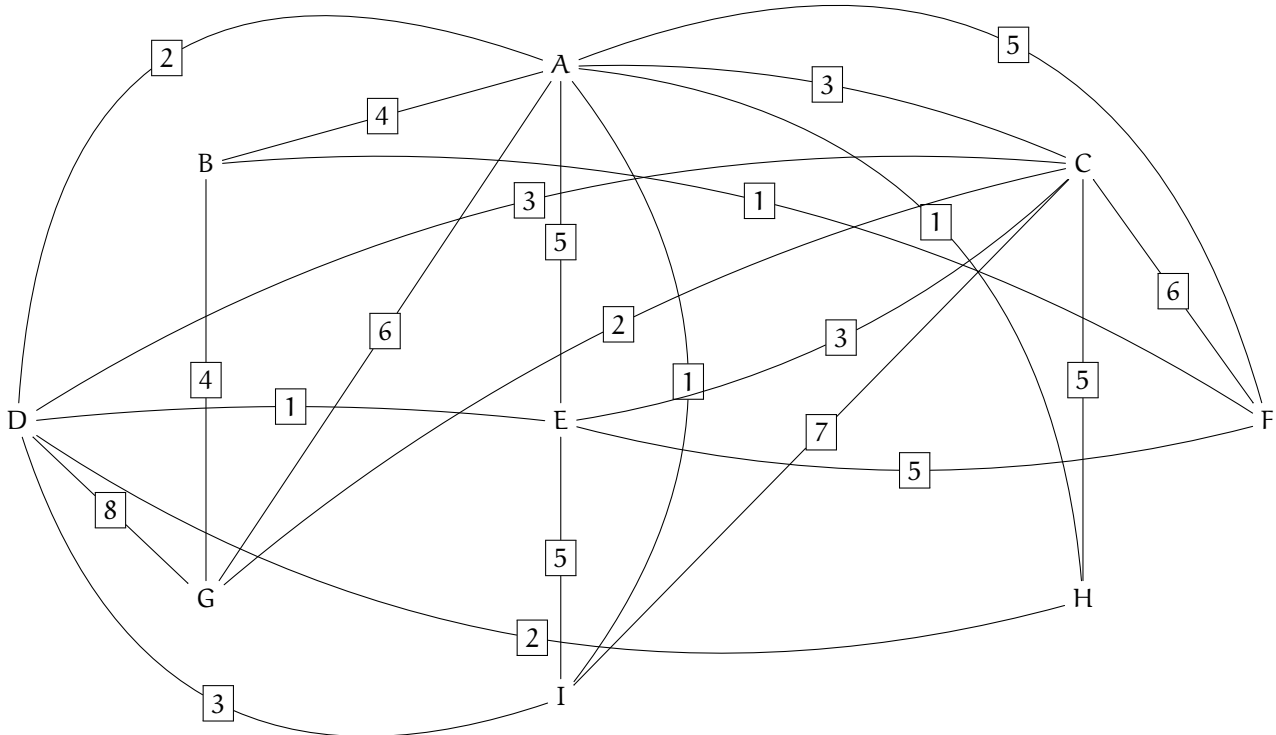
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EGDA d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 4 | 3 | 2 | 5 | 5 | 6 | 1 | 1 |
| B | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 0 | 0 |
| C | 3 | 0 | 0 | 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 7 |
| D | 2 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 8 | 2 | 3 |
| E | 5 | 0 | 3 | 1 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 |
| F | 5 | 1 | 6 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 6 | 4 | 2 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 1 | 0 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 1 | 0 | 7 | 3 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 5 | | 3 | 1 | X | 5 | | | 5 |
| D | 2 | | 3 | X | X | 5 | 8 | 2 | 3 |
| A | X | 4 | 3 | X | X | 5 | 6 | 1 | 1 |
| H | X | 4 | 3 | X | X | 5 | 6 | X | 1 |
| I | X | 4 | 3 | X | X | 5 | 6 | X | X |
| C | X | 4 | X | X | X | 5 | 2 | X | X |
| G | X | 4 | X | X | X | 5 | X | X | X |
| B | X | X | X | X | X | 1 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 8 | 3 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | C | D | E | F | G | I | B | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 4 | 1 | 3 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 1 | 3 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BC. On ajoute une arête entre EH. Par exemple :

AHCFEDHEIDGCI AFBGADCEABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 1 pirate dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 4, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AD\}, \{BA\}, \{CE\}, \{DE\}, \{FB\}, \{GC\}, \{HA\}, \{IA\}$

. Son poids est de 15 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{15 \times 100}{50} = 3000$ pièces d'or.

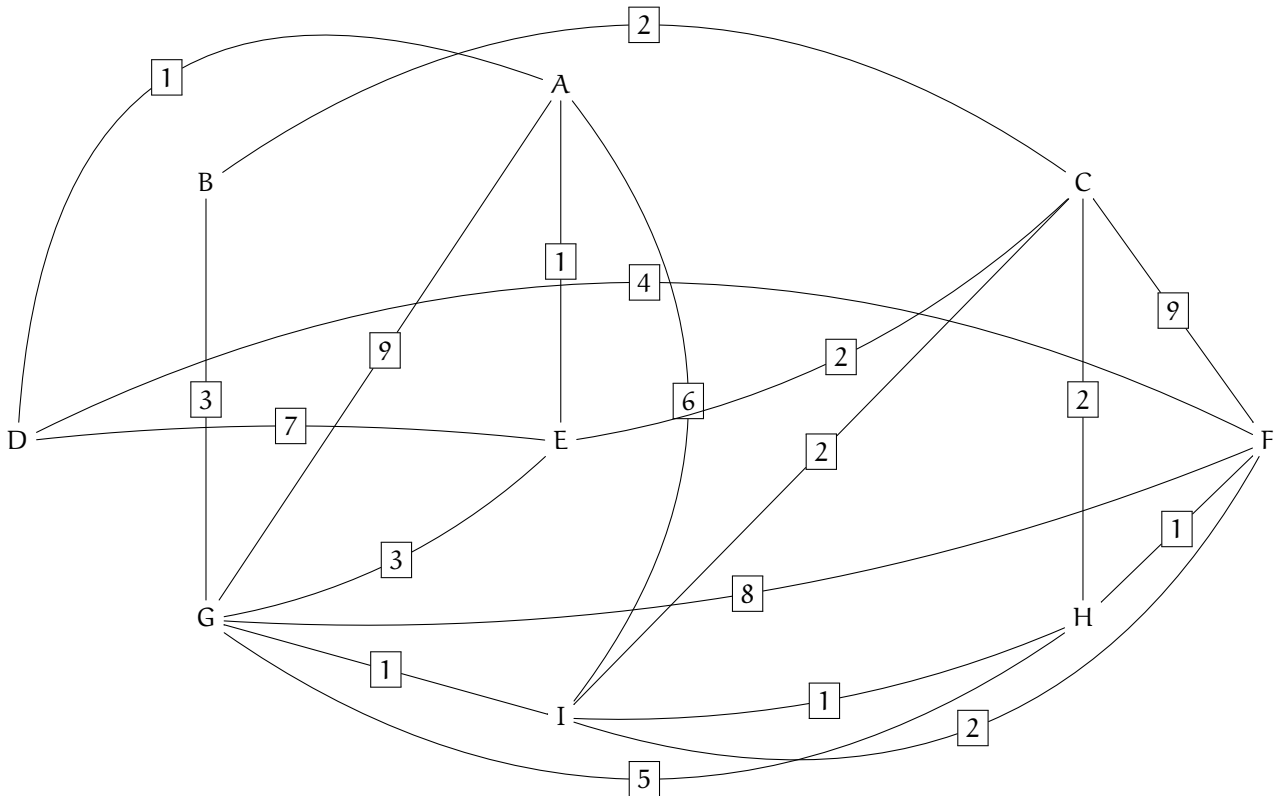
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 38

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 9 | 0 | 6 |
| B | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| C | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 9 | 0 | 2 | 2 |
| D | 1 | 0 | 0 | 0 | 7 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| E | 1 | 0 | 2 | 7 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 9 | 4 | 0 | 0 | 8 | 1 | 2 |
| G | 9 | 3 | 0 | 0 | 3 | 8 | 0 | 5 | 1 |
| H | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 1 |
| I | 6 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|----|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | | 2 | 7 | X | | 3 | | |
| A | X | | 2 | 2 | X | | 3 | | 7 |
| C | X | 4 | X | 2 | X | 11 | 3 | 4 | 4 |
| D | X | 4 | X | X | X | 6 | 3 | 4 | 4 |
| G | X | 4 | X | X | X | 6 | X | 4 | 4 |
| B | X | X | X | X | X | 6 | X | 4 | 4 |
| H | X | X | X | X | X | 5 | X | X | 4 |
| I | X | X | X | X | X | 5 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 2 | 5 | 3 | 4 | 5 | 6 | 4 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | G | C | F | I | A | E | H | D | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | ■ | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 4 | ■ | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | ■ | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CD. On ajoute une arête entre F et B ainsi qu'une arête entre B et I. Par exemple :

AGHIGBIADCHFDEGFICBFCEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est ECHF d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

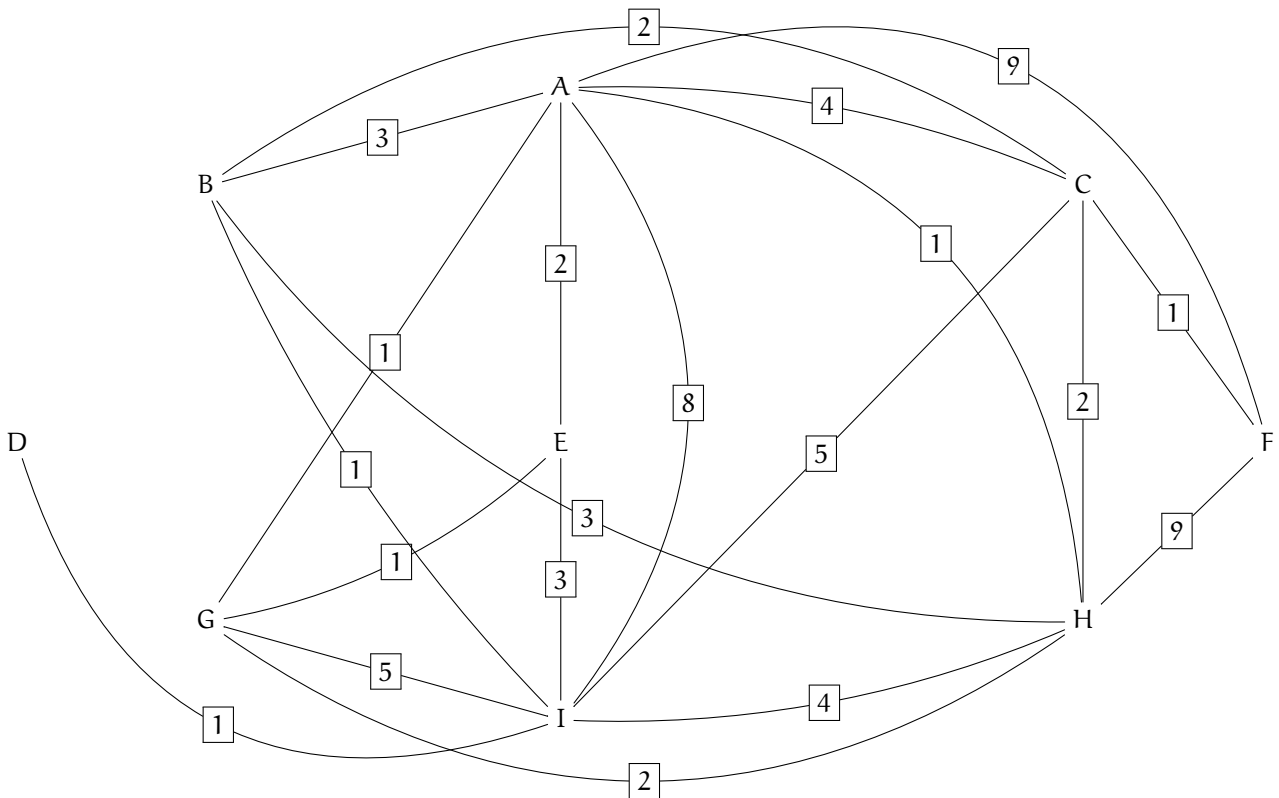
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 39

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 4 | 0 | 2 | 9 | 1 | 1 | 8 |
| B | 3 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| C | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 5 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| E | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| F | 9 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 0 |
| G | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 5 |
| H | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 9 | 2 | 0 | 4 |
| I | 8 | 1 | 5 | 1 | 3 | 0 | 5 | 4 | 0 |

0.5 2

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 2 | | | | X | | 1 | | 3 |
| G | 1 | | | | X | | X | 2 | 3 |
| A | X | 3 | 4 | | X | 9 | X | 1 | 3 |
| H | X | 3 | 2 | | X | 9 | X | X | 3 |
| C | X | 2 | X | | X | 1 | X | X | 3 |
| F | X | 2 | X | | X | X | X | X | 3 |
| B | X | X | X | | X | X | X | X | 1 |
| I | X | X | X | 1 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 7 | 4 | 5 | 1 | 3 | 3 | 4 | 6 | 7 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | I | H | C | B | G | E | F | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre FI. Par exemple :

AGHIGEIBHAECHFICFADIABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AG\}, \{BC\}, \{CH\}, \{DI\}, \{FC\}, \{GE\}, \{HA\}, \{IB\}$

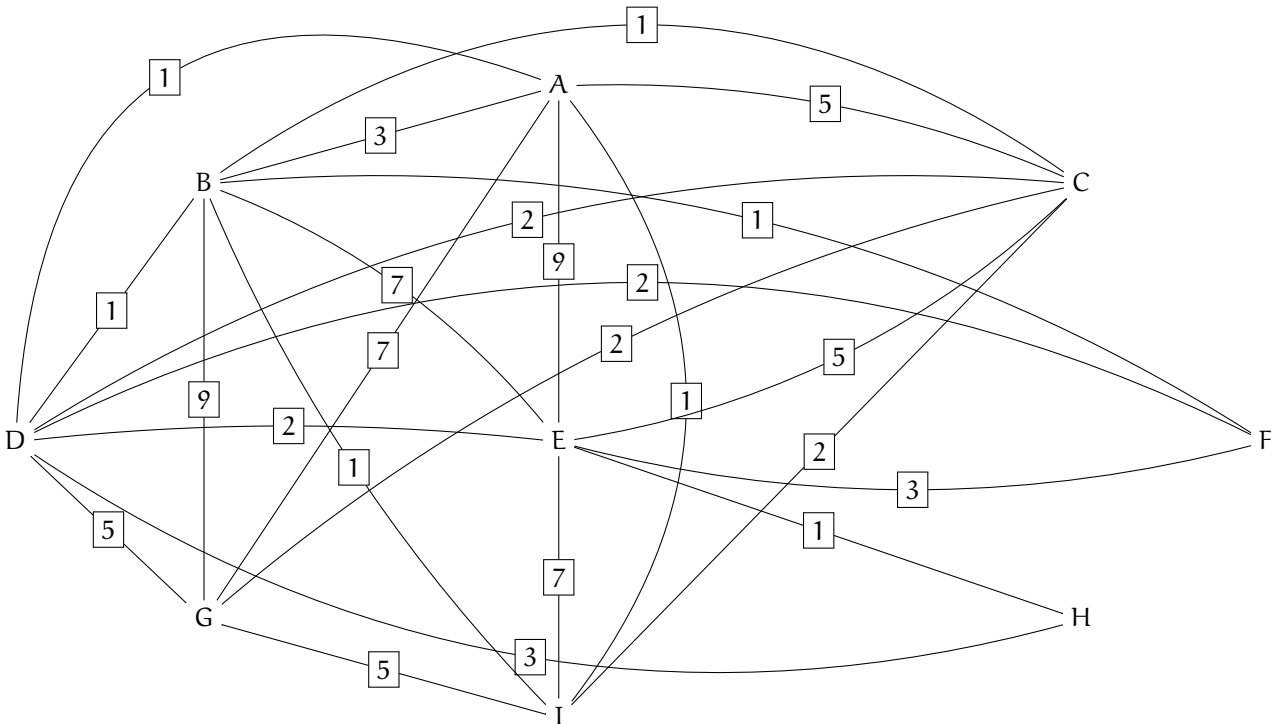
. Son poids est de 10 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{10 \times 100}{50} = 2000$ pièces d'or.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 5 | 1 | 9 | 0 | 7 | 0 | 1 |
| B | 3 | 0 | 1 | 1 | 7 | 1 | 9 | 0 | 1 |
| C | 5 | 1 | 0 | 2 | 5 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| D | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 5 | 3 | 0 |
| E | 9 | 7 | 5 | 2 | 0 | 3 | 0 | 1 | 7 |
| F | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 7 | 9 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| H | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 1 | 1 | 2 | 0 | 7 | 0 | 5 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 9 | 7 | 5 | 2 | X | 3 | | 1 | 7 |
| H | 9 | 7 | 5 | 2 | X | 3 | | X | 7 |
| D | 3 | 3 | 4 | X | X | 3 | 7 | X | 7 |
| A | X | 3 | 4 | X | X | 3 | 7 | X | 4 |
| B | X | X | 4 | X | X | 3 | 7 | X | 4 |
| F | X | X | 4 | X | X | X | 7 | X | 4 |
| C | X | X | X | X | X | X | 6 | X | 4 |
| I | X | X | X | X | X | X | 6 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 7 | 6 | 7 | 7 | 3 | 5 | 2 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | D | E | A | C | G | I | F | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 5 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ■ |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | 3 | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 4 | 3 | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 5 | 3 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 3 | 2 | 4 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre DI. On ajoute une arête entre EG. On ajoute une arête entre B et H ainsi qu'une arête entre H et F. Par exemple :

AGBHDIBFDCEGIEFHEDGCIADBEABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et G ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDCG d'une distance de 6×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{6 \times 100}{50} = 12$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 2 | 2 | 3 | 6 | 3 | 4 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | G | H | I | D | F | A | B | C |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 1 | ■ | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 1 | ■ | 2 | ■ | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | ■ | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre DF. Par exemple :

AGDFGIFEHDEBIECHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

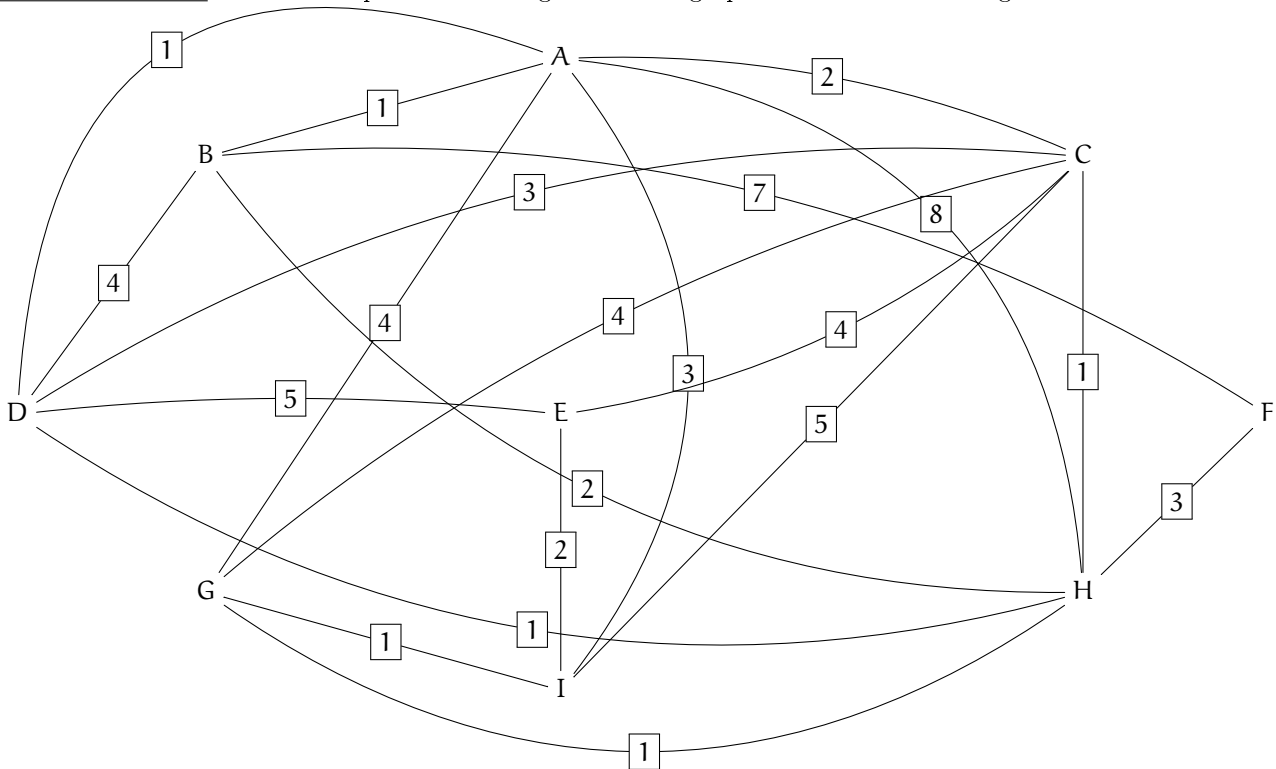
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDGA d'une distance de 8×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{8 \times 100}{50} = 16$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 | 8 | 3 |
| B | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | 7 | 0 | 2 | 0 |
| C | 2 | 0 | 0 | 3 | 4 | 0 | 4 | 1 | 5 |
| D | 1 | 4 | 3 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| E | 0 | 0 | 4 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| F | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| G | 4 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| H | 8 | 2 | 1 | 1 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| I | 3 | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | 4 | 5 | X | | | | 2 |
| I | 3 | | 4 | 5 | X | | 1 | | X |
| G | 3 | | 4 | 5 | X | | X | 1 | X |
| H | 3 | 2 | 1 | 1 | X | 3 | X | X | X |
| C | 2 | 2 | X | 1 | X | 3 | X | X | X |
| D | 1 | 2 | X | X | X | 3 | X | X | X |
| A | X | 1 | X | X | X | 3 | X | X | X |
| B | X | X | X | X | X | 3 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 4 | 6 | 5 | 3 | 2 | 4 | 6 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | C | H | D | B | G | I | E | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | ■ | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 | 3 | 4 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre D et F ainsi qu'une arête entre F et E. Par exemple :

AHBFDHCIACDEFHGIIECGABDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AD\}, \{BA\}, \{CH\}, \{DH\}, \{FH\}, \{GI\}, \{HG\}, \{IE\}$

. Son poids est de 11 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{11 \times 100}{50} = 2200$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 4 | 6 | 6 | 4 | 4 | 7 | 4 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | G | C | D | I | B | E | F | H | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 3 | 4 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir où il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre FI. On ajoute une arête entre BH. On ajoute une arête entre BI. On ajoute une arête entre DG. On ajoute une arête entre CG. On ajoute une arête entre AC. On ajoute une arête entre AF. On ajoute une arête entre DI. On ajoute une arête entre BE. On ajoute une arête entre BC. On ajoute une arête entre D et H ainsi qu'une arête entre H et E. Par exemple :

AFHGIFCDHEIDFGDEBHCCEGCIBGACBDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AD\}, \{BD\}, \{CD\}, \{DE\}, \{FD\}, \{GA\}, \{HF\}, \{IE\}$

. Son poids est de 21 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{21 \times 100}{50} = 4200$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 4 | 3 | 6 | 4 | 3 | 4 | 3 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | B | E | G | A | C | F | H | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 1 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AC. On ajoute une arête entre FH. Par exemple :

ADBEDGBHDIHFACFGCEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et H ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDIH d'une distance de 3×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{3 \times 100}{50} = 6$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 6 | 3 | 3 | 4 | 3 | 7 | 4 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | G | A | B | I | E | H | C | D | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 6 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | ■ |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 3 | 3 | 2 | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CD. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

AHBIAFBGABCGDEHGIIEGFICDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AG\}, \{BG\}, \{CG\}, \{DG\}, \{FA\}, \{GE\}, \{HE\}, \{IA\}$

. Son poids est de 9 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{9 \times 100}{50} = 1800$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 4 | 3 | 5 | 3 | 4 | 5 | 3 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | G | B | F | C | E | H | I | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CD. On ajoute une arête entre EG. On ajoute une arête entre HI. Par exemple :

ABGEIBCDHFGHIDECFDGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AB}, {BG}, {CE}, {DH}, {FC}, {GD}, {HF}, {ID}

. Son poids est de 13 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{13 \times 100}{50} = 2600$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 4 | 6 | 4 | 1 | 3 | 4 | 4 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | C | B | D | G | H | A | F | I | E |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 1 | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AE. On ajoute une arête entre FI. Par exemple :

AEHACBDGIFHDCFBICGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 5 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et I ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EHAGI d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 1 | 3 | 5 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | F | A | C | E | G | H | I | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | ■ | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre DH. On ajoute une arête entre G et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

AGDEHDFGIFCIADCEABHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et I ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDFGI d'une distance de 8×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{8 \times 100}{50} = 16$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 3 | 3 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | C | H | I | A | F | G | B | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 4 | 4 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AE. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

AGECHFGICFEDIAEBHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EBHA d'une distance de 7×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{7 \times 100}{50} = 14$ heures.

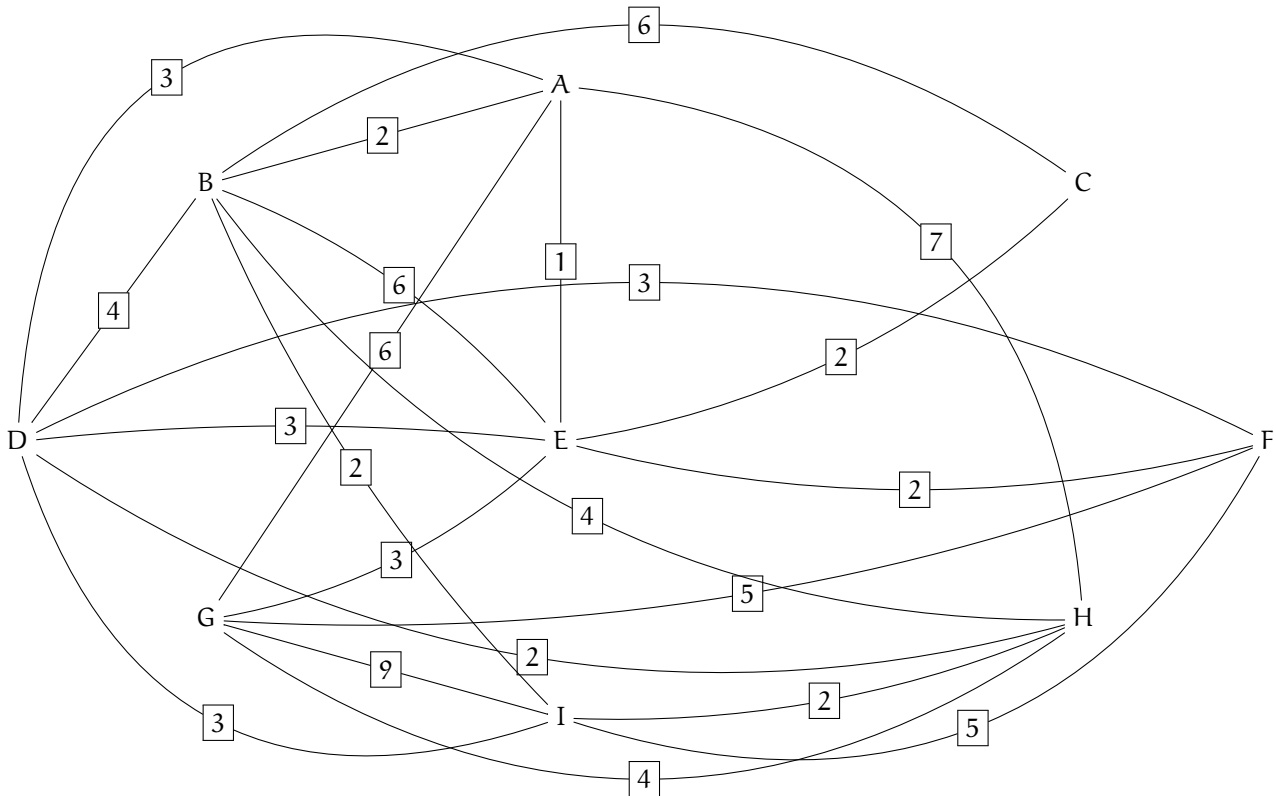
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 50

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 0 | 6 | 7 | 0 |
| B | 2 | 0 | 6 | 4 | 6 | 0 | 0 | 4 | 2 |
| C | 0 | 6 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 3 | 4 | 0 | 0 | 3 | 3 | 0 | 2 | 3 |
| E | 1 | 6 | 2 | 3 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 | 5 | 0 | 5 |
| G | 6 | 0 | 0 | 0 | 3 | 5 | 0 | 4 | 9 |
| H | 7 | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 |
| I | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 5 | 9 | 2 | 0 |

0.5 2

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | 6 | 2 | 3 | X | 2 | 3 | | |
| A | X | 2 | 2 | 3 | X | 2 | 3 | 7 | |
| B | X | X | 2 | 3 | X | 2 | 3 | 4 | 2 |
| C | X | X | X | 3 | X | 2 | 3 | 4 | 2 |
| F | X | X | X | 3 | X | X | 3 | 4 | 2 |
| I | X | X | X | 3 | X | X | 3 | 2 | X |
| H | X | X | X | 2 | X | X | 3 | X | X |
| D | X | X | X | X | X | X | 3 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 6 | 2 | 6 | 6 | 4 | 5 | 5 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | D | E | A | G | H | I | F | C |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 4 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 4 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 5 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre A et I. On ajoute une arête entre G et C ainsi qu'une arête entre C et H. Par exemple :

AHBIADBEDFEGHIGABCGFIDHCEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AE}, {BA}, {CE}, {DH}, {FE}, {GE}, {HI}, {IB}

. Son poids est de 16 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{16 \times 100}{50} = 3200$ pièces d'or.

Contrôle Graphe & Langages

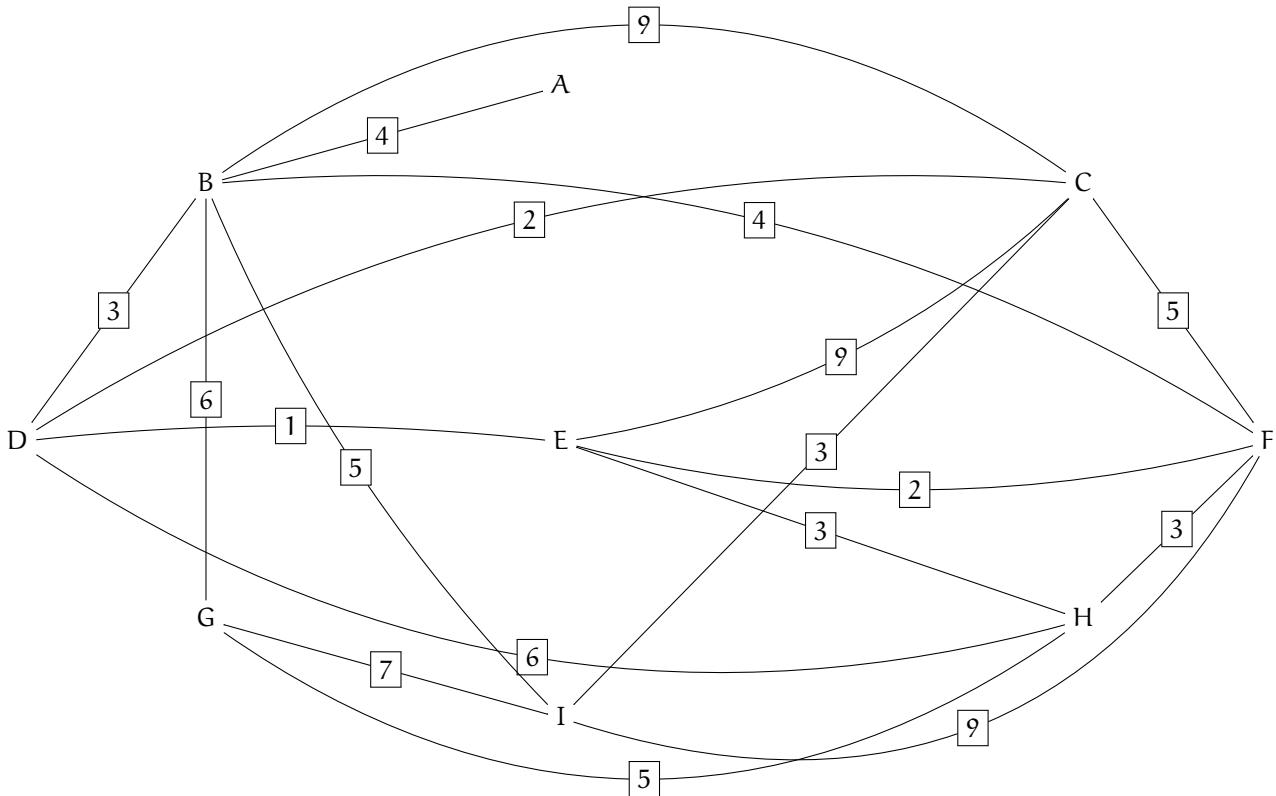
Correction du sujet 51

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | 4 | 0 | 9 | 3 | 0 | 4 | 6 | 0 | 5 |
| C | 0 | 9 | 0 | 2 | 9 | 5 | 0 | 0 | 3 |
| D | 0 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| E | 0 | 0 | 9 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| F | 0 | 4 | 5 | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 9 |
| G | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 7 |
| H | 0 | 0 | 0 | 6 | 3 | 3 | 5 | 0 | 0 |
| I | 0 | 5 | 3 | 0 | 0 | 9 | 7 | 0 | 0 |

0.5 2

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | 9 | 1 | X | 2 | | 3 | |
| D | | 3 | 2 | X | X | 2 | | 3 | |
| C | | 3 | X | X | X | 2 | | 3 | 3 |
| F | | 3 | X | X | X | X | | 3 | 3 |
| B | 4 | X | X | X | X | X | 6 | 3 | 3 |
| H | 4 | X | X | X | X | X | 5 | X | 3 |
| I | 4 | X | X | X | X | X | 5 | X | X |
| A | X | X | X | X | X | X | 5 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 1 | 6 | 5 | 4 | 4 | 5 | 3 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | C | F | D | E | H | I | G | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 1 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AC. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

ABGFHGFICIBDCEDHEFBCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AB\}, \{BD\}, \{CD\}, \{DE\}, \{FE\}, \{GH\}, \{HE\}, \{IC\}$

. Son poids est de 23 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{23 \times 100}{50} = 4600$ pièces d'or.

Contrôle Graphe & Langages

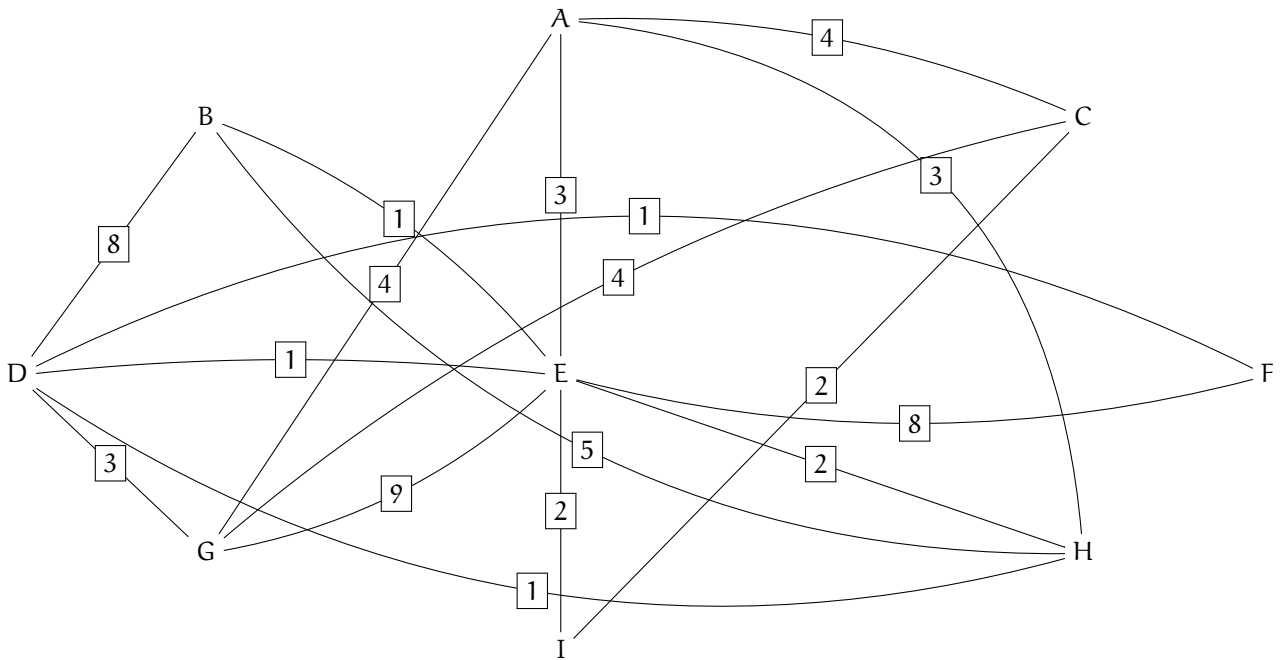
Correction du sujet 52

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 | 4 | 3 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 8 | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| C | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 |
| D | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| E | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 8 | 9 | 2 | 2 |
| F | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 4 | 0 | 4 | 3 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 3 | 5 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | 1 | | 1 | X | 8 | 9 | 2 | 2 |
| B | 3 | X | | 1 | X | 8 | 9 | 2 | 2 |
| D | 3 | X | | X | X | 1 | 3 | 1 | 2 |
| F | 3 | X | | X | X | X | 3 | 1 | 2 |
| H | 3 | X | | X | X | X | 3 | X | 2 |
| I | 3 | X | 2 | X | X | X | 3 | X | X |
| C | 3 | X | X | X | X | X | 3 | X | X |
| A | X | X | X | X | X | X | 3 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 3 | 3 | 5 | 7 | 2 | 4 | 4 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | D | A | G | H | B | C | F | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 1 | ■ | 3 | 2 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 2 | ■ | ■ | 2 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BC. On ajoute une arête entre D et C ainsi qu'une arête entre C et E. Par exemple :

AGCIEBHACBDGHEHDEFDCEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AE\}, \{BE\}, \{CI\}, \{DE\}, \{FD\}, \{GD\}, \{HD\}, \{IE\}$$

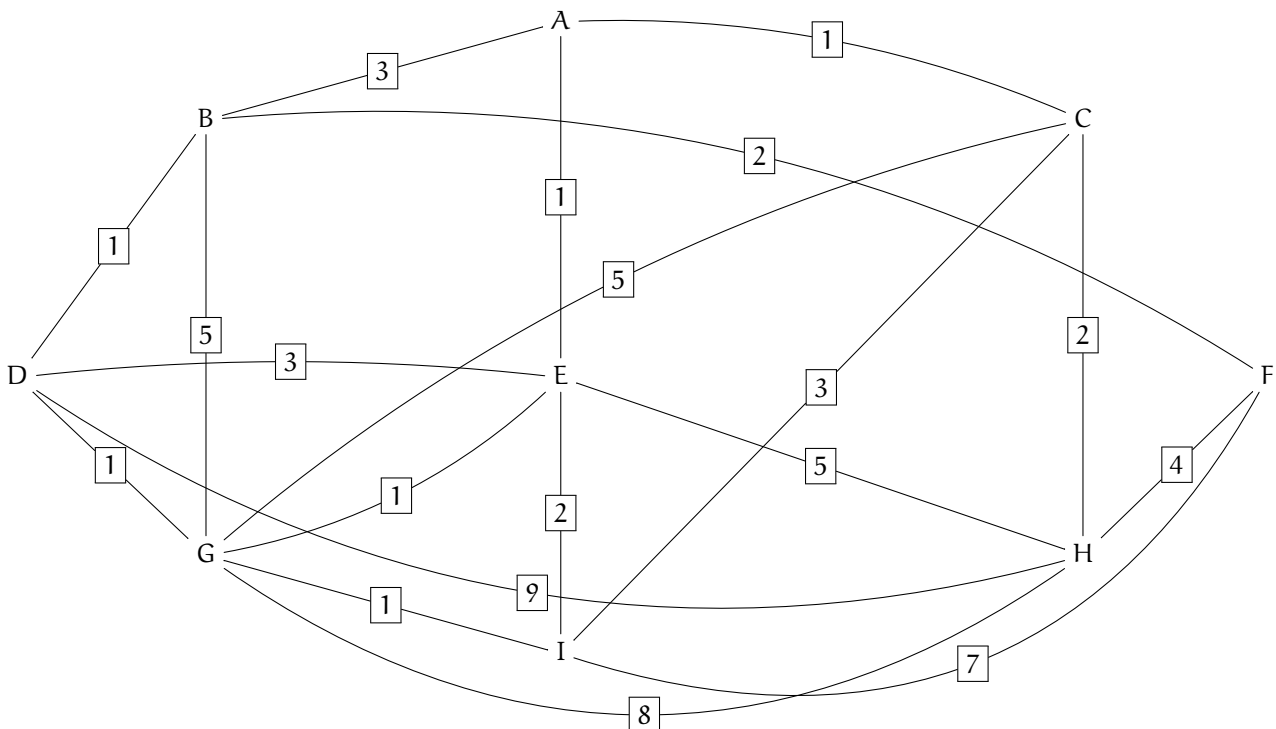
. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maëlstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 |
| C | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 2 | 3 |
| D | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 9 | 0 |
| E | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | 5 | 2 |
| F | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 7 |
| G | 0 | 5 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 8 | 1 |
| H | 0 | 0 | 2 | 9 | 5 | 4 | 8 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 7 | 1 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | | | 3 | X | | 1 | 5 | 2 |
| A | X | 4 | 2 | 3 | X | | 1 | 5 | 2 |
| G | X | 4 | 2 | 2 | X | | X | 5 | 2 |
| C | X | 4 | X | 2 | X | | X | 4 | 2 |
| D | X | 3 | X | X | X | | X | 4 | 2 |
| I | X | 3 | X | X | X | 9 | X | 4 | X |
| B | X | X | X | X | X | 5 | X | 4 | X |
| H | X | X | X | X | X | 5 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 3 | 6 | 5 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | G | E | H | B | C | D | I | A | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | ■ | 3 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | ■ | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 | 3 | ■ | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | 3 | ■ | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | ■ | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AF. On ajoute une arête entre E et B ainsi qu'une arête entre B et H. Par exemple :

ACHEICGBEGDHBFBHGIFABDEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EGDBF d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 3 | 2 | 2 | 5 | 4 | 2 | 3 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | I | F | B | H | A | C | D | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 2 | 2 | 3 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EH. On ajoute une arête entre B et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

AFHIFDCEGIABHEIBEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et B ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EGIB d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Conton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 5 | 2 | 1 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | E | F | G | H | C | I | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BD. On ajoute une arête entre E et G ainsi qu'une arête entre G et H. Par exemple :

AFBGEHGIBEFGACEABDHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

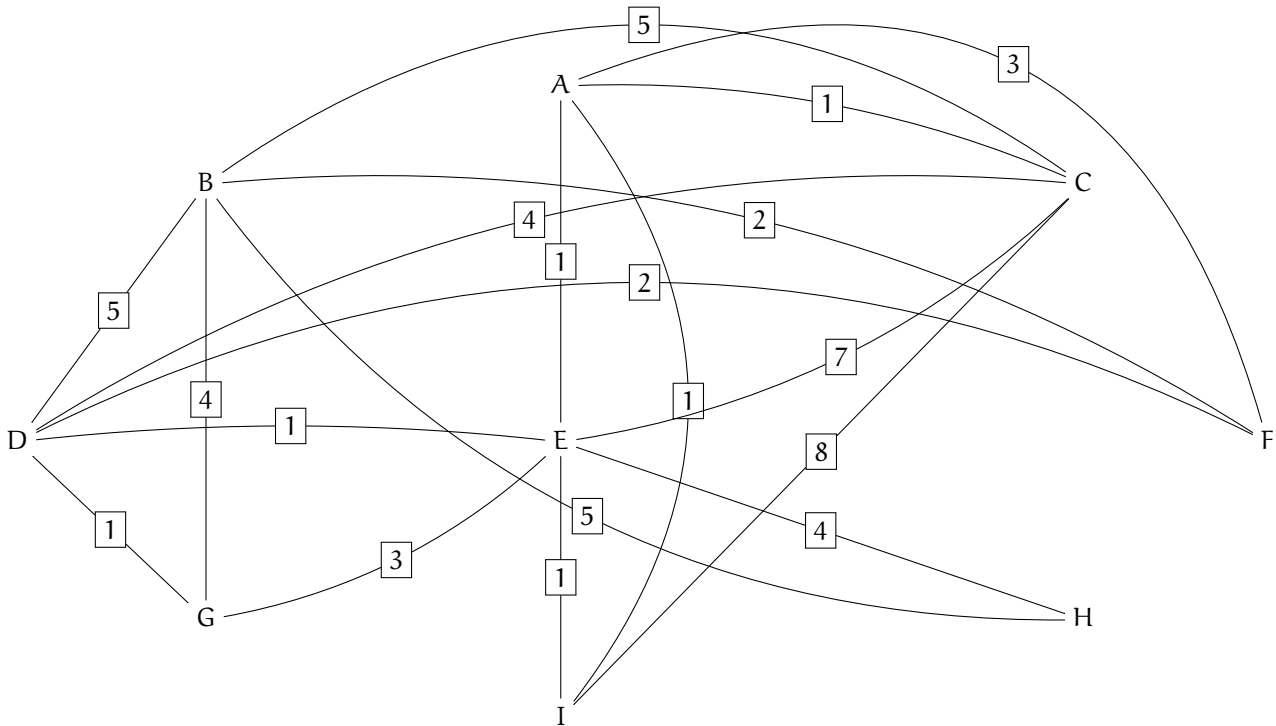
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et G ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EABG d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| B | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 2 | 4 | 5 | 0 |
| C | 1 | 5 | 0 | 4 | 7 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| D | 0 | 5 | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| E | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 0 | 3 | 4 | 1 |
| F | 3 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 0 | 4 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 5 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 1 | 0 | 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | | 7 | 1 | X | | 3 | 4 | 1 |
| A | X | | 2 | 1 | X | 4 | 3 | 4 | 1 |
| D | X | 6 | 2 | X | X | 3 | 2 | 4 | 1 |
| I | X | 6 | 2 | X | X | 3 | 2 | 4 | X |
| C | X | 6 | X | X | X | 3 | 2 | 4 | X |
| G | X | 6 | X | X | X | 3 | X | 4 | X |
| F | X | 5 | X | X | X | X | X | 4 | X |
| H | X | 5 | X | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 3 | 3 | 2 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | B | C | D | A | F | G | I | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BI. On ajoute une arête entre CF. On ajoute une arête entre D et A ainsi qu'une arête entre A et G. Par exemple :

AFBHEIBGDFCIAECDEGACBDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

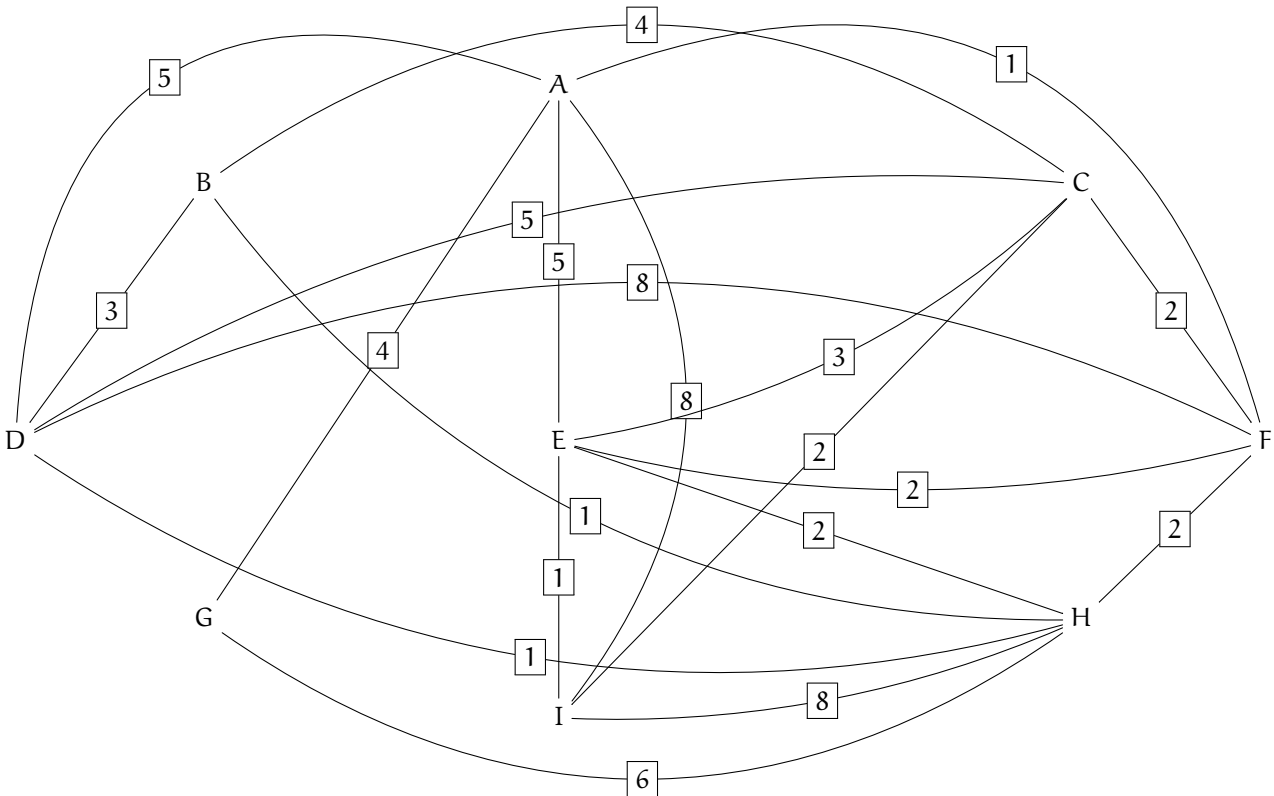
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et B ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDFB d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 1 | 4 | 0 | 8 |
| B | 0 | 0 | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C | 0 | 4 | 0 | 5 | 3 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| D | 5 | 3 | 5 | 0 | 0 | 8 | 0 | 1 | 0 |
| E | 5 | 0 | 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| F | 1 | 0 | 2 | 8 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| G | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| H | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 6 | 0 | 8 |
| I | 8 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 5 | | 3 | | X | 2 | | 2 | 1 |
| I | 5 | | 2 | | X | 2 | | 2 | X |
| C | 5 | 4 | X | 5 | X | 2 | | 2 | X |
| F | 1 | 4 | X | 5 | X | X | | 2 | X |
| A | X | 4 | X | 5 | X | X | 4 | 2 | X |
| H | X | 1 | X | 1 | X | X | 4 | X | X |
| B | X | X | X | 1 | X | X | 4 | X | X |
| D | X | X | X | X | X | X | 4 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | 6 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | A | C | D | E | F | I | B | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre DE. On ajoute une arête entre C et G ainsi qu'une arête entre G et F. Par exemple :

AGCIAEHFGHIECFABDEFDHBBCDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AF}, {BH}, {CI}, {DH}, {FE}, {GA}, {HE}, {IE}

. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

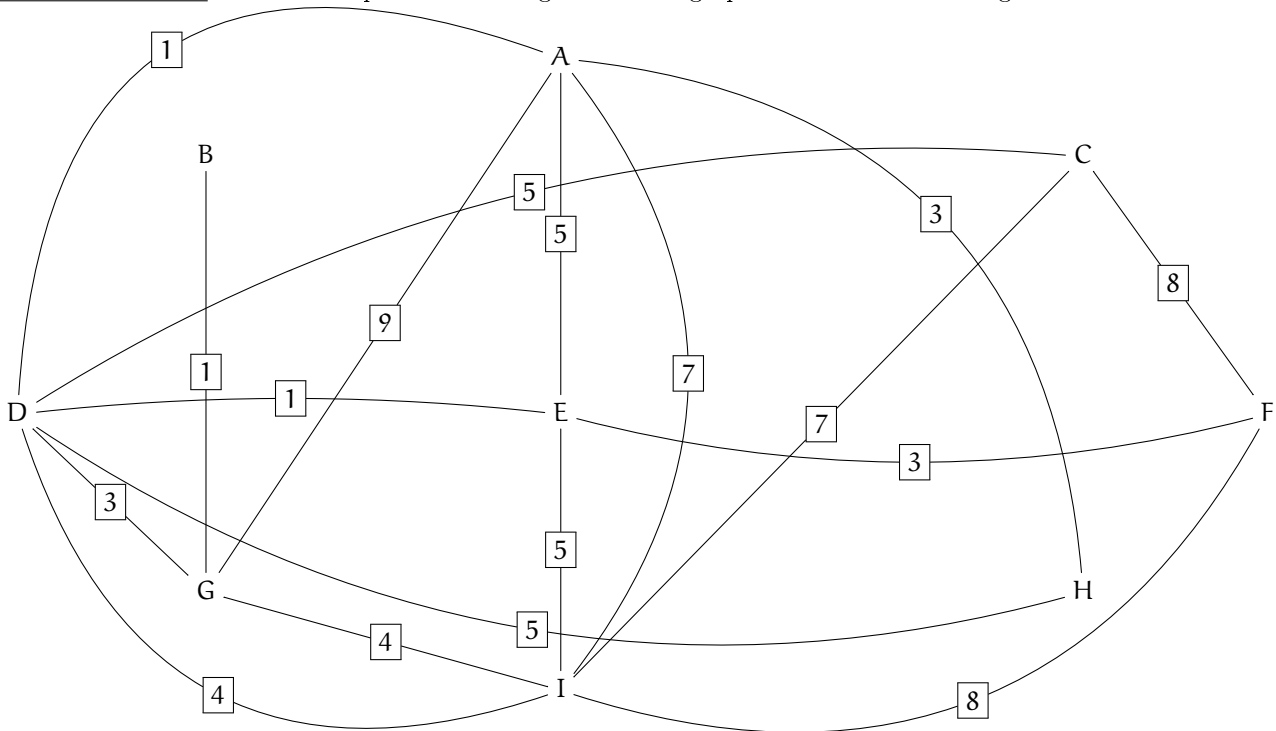
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 58

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 9 | 3 | 7 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 8 | 0 | 0 | 7 |
| D | 1 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 3 | 5 | 4 |
| E | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 5 |
| F | 0 | 0 | 8 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| G | 9 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| H | 3 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 7 | 0 | 7 | 4 | 5 | 8 | 4 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 5 | | | 1 | X | 3 | | | 5 |
| D | 1 | | 5 | X | X | 3 | 3 | 5 | 4 |
| A | X | | 5 | X | X | 3 | 3 | 3 | 4 |
| F | X | | 5 | X | X | X | 3 | 3 | 4 |
| G | X | 1 | 5 | X | X | X | X | 3 | 4 |
| B | X | X | 5 | X | X | X | X | 3 | 4 |
| H | X | X | 5 | X | X | X | X | X | 4 |
| I | X | X | 5 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 1 | 3 | 6 | 4 | 3 | 4 | 2 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | I | A | E | G | C | F | H | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre C et A ainsi qu'une arête entre A et F. Par exemple :

AFCIDHAEFIEDGIACDABGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AD\}, \{BG\}, \{CD\}, \{DE\}, \{FE\}, \{GD\}, \{HA\}, \{ID\}$

. Son poids est de 21 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{21 \times 100}{50} = 4200$ pièces d'or.

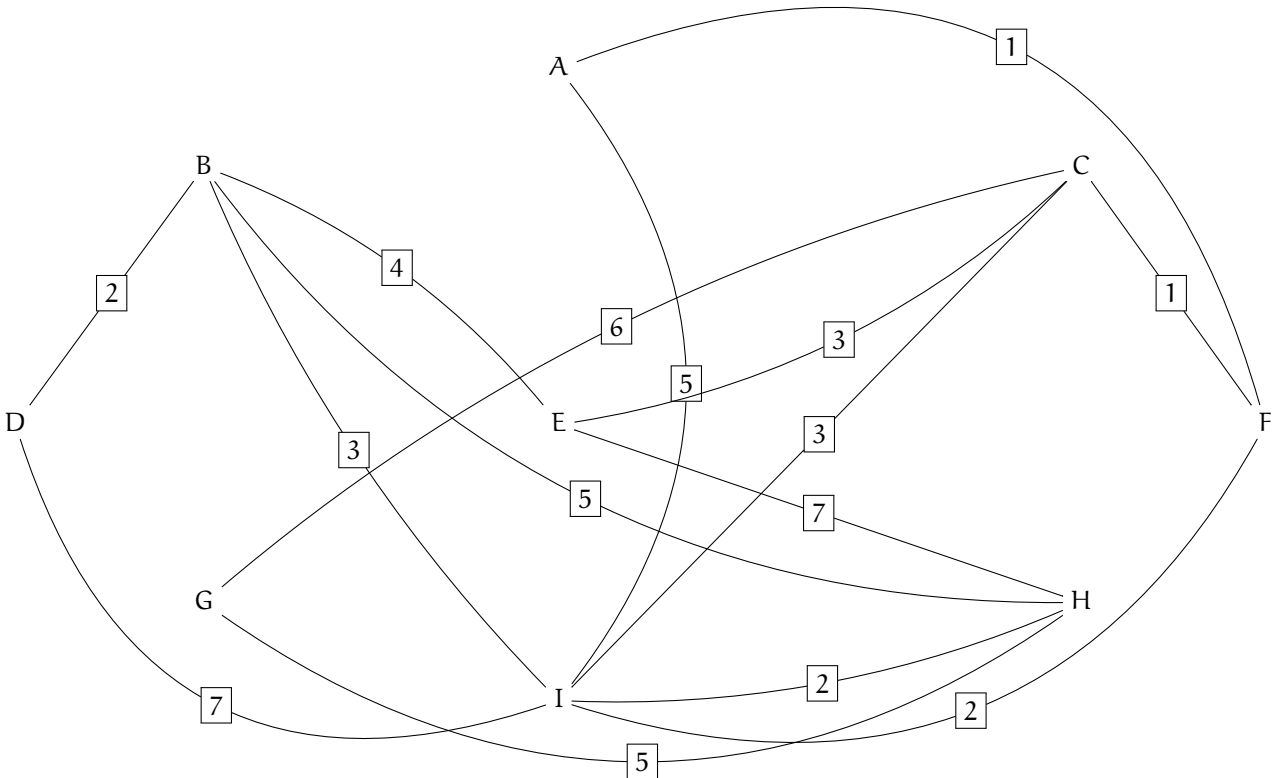
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 59

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| B | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 0 | 0 | 5 | 3 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 6 | 0 | 3 |
| D | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| E | 0 | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| F | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| G | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| H | 0 | 5 | 0 | 0 | 7 | 0 | 5 | 0 | 2 |
| I | 5 | 3 | 3 | 7 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 4 | 3 | | X | | | 7 | |
| C | | 4 | X | | X | 4 | 9 | 7 | 6 |
| B | | X | X | 6 | X | 4 | 9 | 7 | 6 |
| F | 5 | X | X | 6 | X | X | 9 | 7 | 6 |
| A | X | X | X | 6 | X | X | 9 | 7 | 6 |
| D | X | X | X | X | X | X | 9 | 7 | 6 |
| I | X | X | X | X | X | X | 9 | 7 | X |
| H | X | X | X | X | X | X | 9 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 4 | 4 | 2 | 3 | 3 | 2 | 4 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | I | B | C | H | E | F | A | D | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EF. Par exemple :

AFCGHICEBHEFIBDIA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

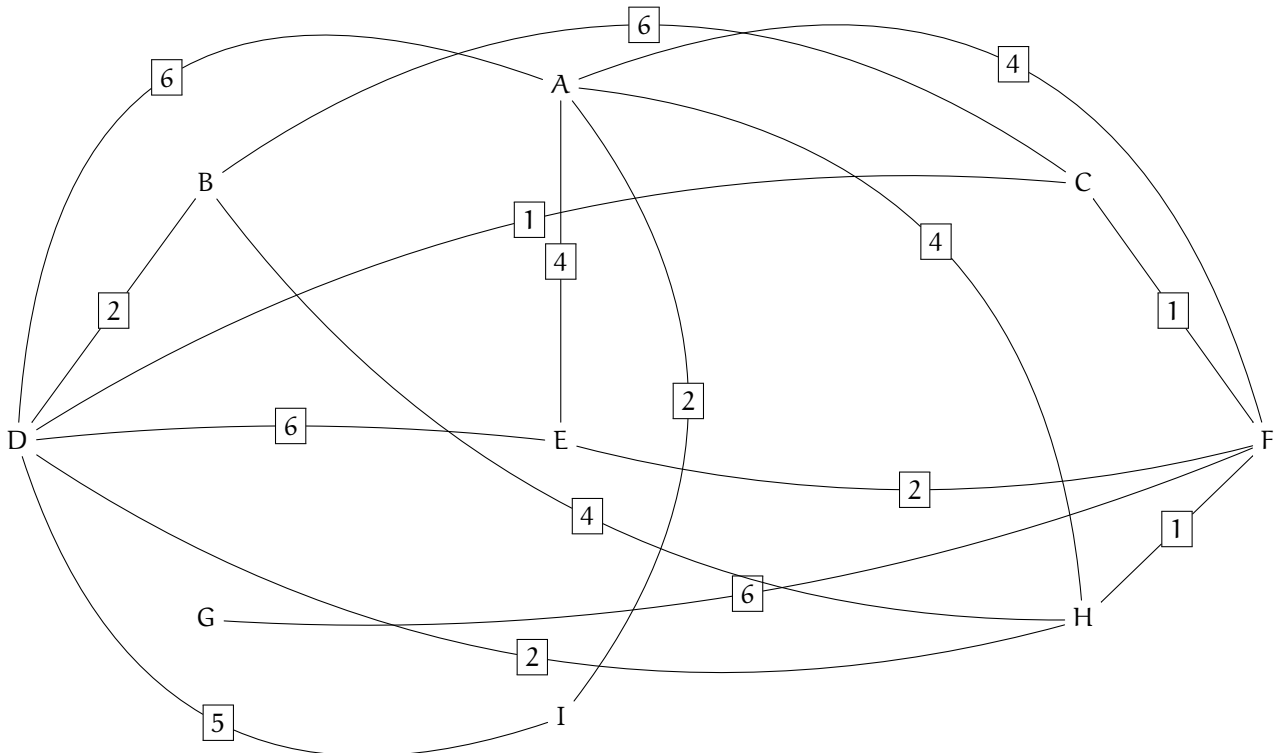
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est ECFA d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 6 | 4 | 4 | 0 | 4 | 2 |
| B | 0 | 0 | 6 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| C | 0 | 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| D | 6 | 2 | 1 | 0 | 6 | 0 | 0 | 2 | 5 |
| E | 4 | 0 | 0 | 6 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| F | 4 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 6 | 1 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| H | 4 | 4 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| I | 2 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 4 | | | 6 | X | 2 | | | |
| F | 4 | | 1 | 6 | X | X | 6 | 1 | |
| C | 4 | 6 | X | 1 | X | X | 6 | 1 | |
| D | 4 | 2 | X | X | X | X | 6 | 1 | 5 |
| H | 4 | 2 | X | X | X | X | 6 | X | 5 |
| B | 4 | X | X | X | X | X | 6 | X | 5 |
| A | X | X | X | X | X | X | 6 | X | 2 |
| I | X | X | X | X | X | X | 6 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 3 | 3 | 6 | 3 | 5 | 1 | 4 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | A | F | H | B | C | E | I | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre F et B ainsi qu'une arête entre B et G. Par exemple :

AHBDEFBGFHFDIAECFABCDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AE\}, \{BD\}, \{CF\}, \{DC\}, \{FE\}, \{GF\}, \{HF\}, \{IA\}$$

. Son poids est de 19 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{19 \times 100}{50} = 3800$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 7 | 6 | 7 | 4 | 5 | 3 | 2 | 4 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | C | B | I | E | D | H | F | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | ■ |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 4 | 3 | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 4 | 3 | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 5 | 4 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EF. On ajoute une arête entre A et G ainsi qu'une arête entre G et C. Par exemple :

AHBIAFBGADCGEIHCFEDICEABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EICF d'une distance de 4×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{4 \times 100}{50} = 8$ heures.

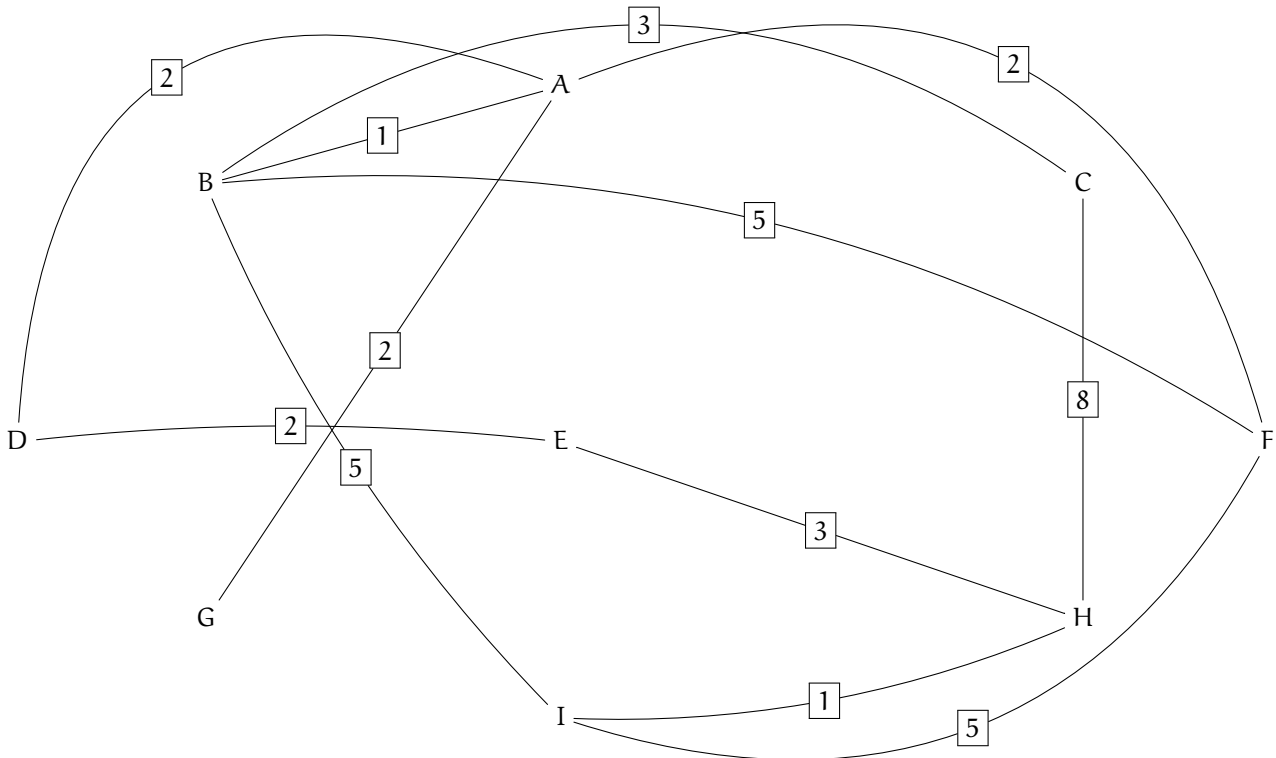
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 62

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| B | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 |
| C | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 |
| D | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| F | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| G | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 0 | 8 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| I | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|----|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | | 2 | X | | | 3 | |
| D | 4 | | | X | X | | | 3 | |
| H | 4 | | 11 | X | X | | | X | 4 |
| A | X | 5 | 11 | X | X | 6 | 6 | X | 4 |
| I | X | 5 | 11 | X | X | 6 | 6 | X | X |
| B | X | X | 8 | X | X | 6 | 6 | X | X |
| F | X | X | 8 | X | X | X | 6 | X | X |
| G | X | X | 8 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | F | H | I | C | D | E | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 1 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 3 | 2 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre FG. On ajoute une arête entre H et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

AFBIFGADEHIABCHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et C ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDABC d'une distance de 8×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{8 \times 100}{50} = 16$ heures.

Contrôle Graphe & Langages

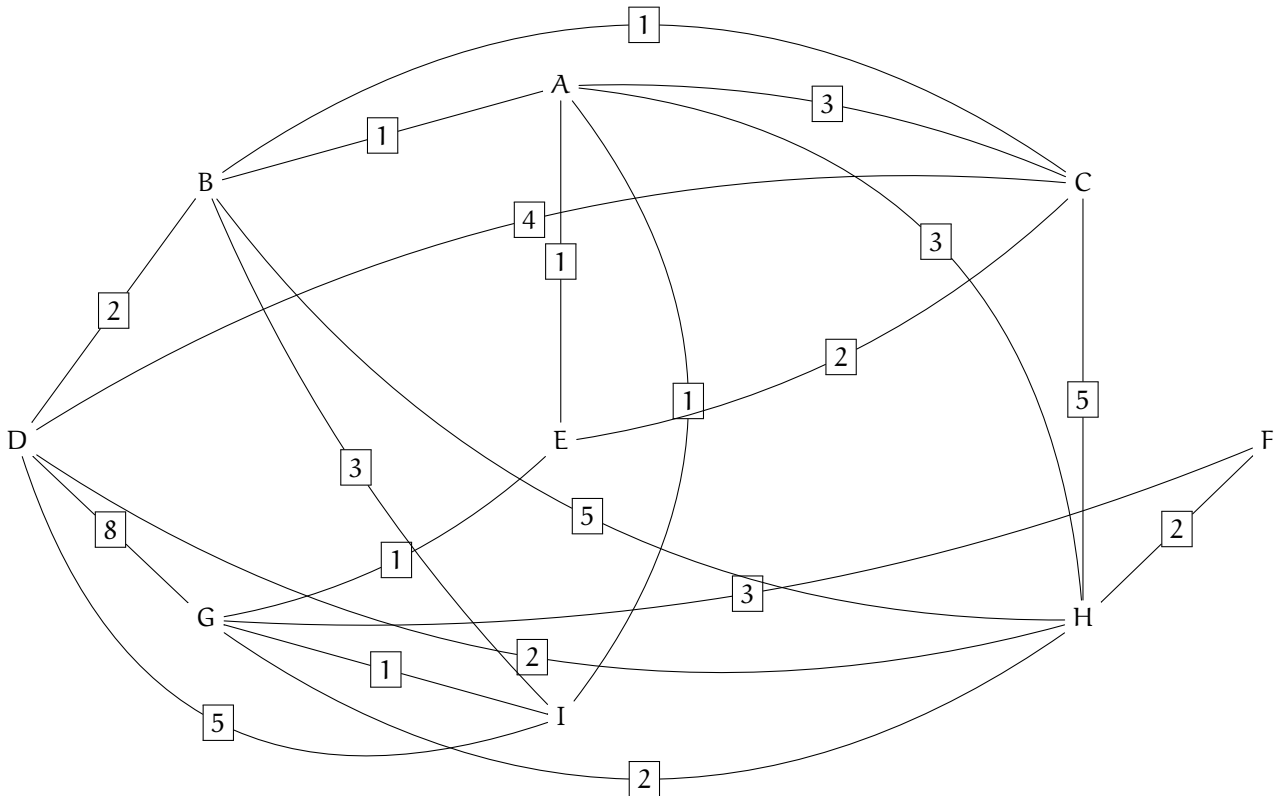
Correction du sujet 63

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| B | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 5 | 3 |
| C | 3 | 1 | 0 | 4 | 2 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| D | 0 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 8 | 2 | 5 |
| E | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 8 | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 |
| H | 3 | 5 | 5 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| I | 1 | 3 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | | 2 | | X | | 1 | | |
| A | X | 1 | 2 | | X | | 1 | 3 | 1 |
| B | X | X | 1 | 2 | X | | 1 | 3 | 1 |
| C | X | X | X | 2 | X | | 1 | 3 | 1 |
| G | X | X | X | 2 | X | 3 | X | 2 | 1 |
| I | X | X | X | 2 | X | 3 | X | 2 | X |
| D | X | X | X | X | X | 3 | X | 2 | X |
| H | X | X | X | X | X | 2 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 2 | 5 | 6 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | A | B | C | D | G | I | E | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre BE. On ajoute une arête entre CG. Par exemple :

AHBIADHGDIDBEABCEGFHCDGCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AE}, {BA}, {CB}, {DB}, {FH}, {GE}, {HG}, {IA}

. Son poids est de 11 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{11 \times 100}{50} = 2200$ pièces d'or.

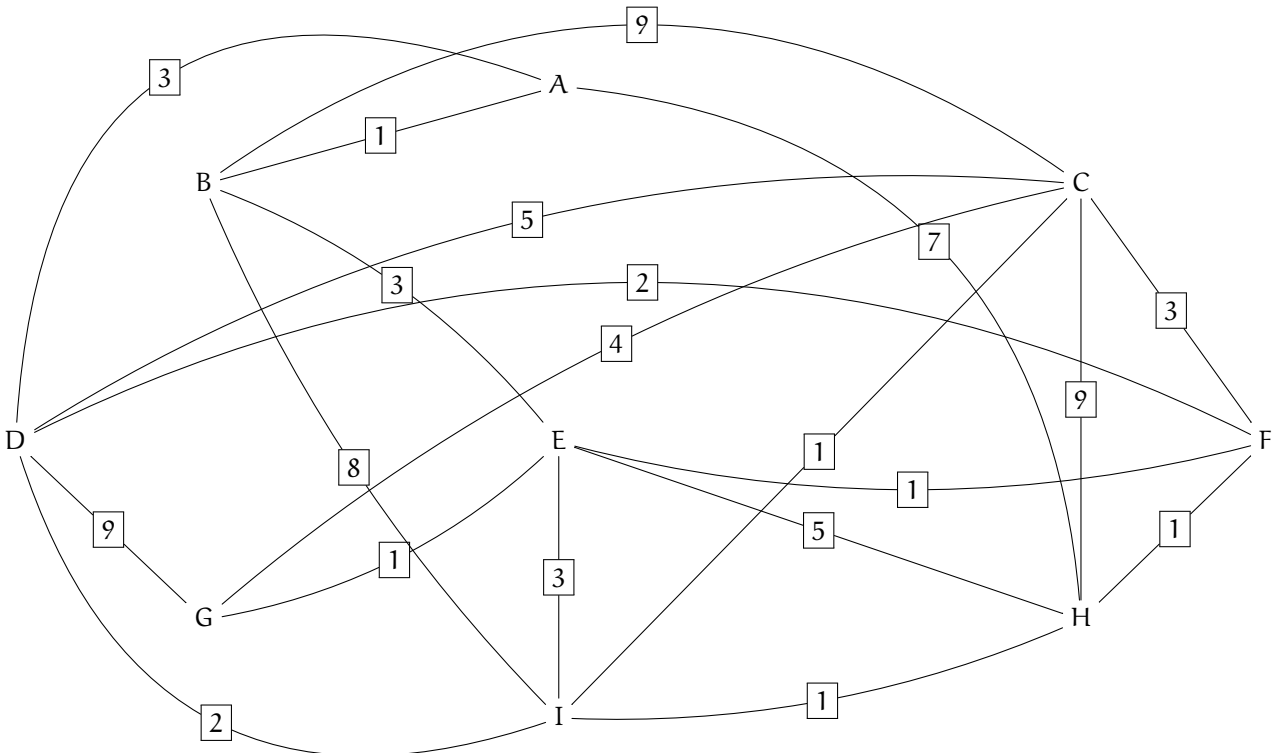
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 64

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| B | 1 | 0 | 9 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| C | 0 | 9 | 0 | 5 | 0 | 3 | 4 | 9 | 1 |
| D | 3 | 0 | 5 | 0 | 0 | 2 | 9 | 0 | 2 |
| E | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 | 3 |
| F | 0 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| G | 0 | 0 | 4 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 7 | 0 | 9 | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| I | 0 | 8 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 3 | | | X | 1 | 1 | 5 | 3 |
| F | | 3 | 3 | 2 | X | X | 1 | 1 | 3 |
| G | | 3 | 3 | 2 | X | X | X | 1 | 3 |
| H | 7 | 3 | 3 | 2 | X | X | X | X | 1 |
| I | 7 | 3 | 1 | 2 | X | X | X | X | X |
| C | 7 | 3 | X | 2 | X | X | X | X | X |
| D | 3 | 3 | X | X | X | X | X | X | X |
| A | X | 1 | X | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 4 | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 5 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | C | D | E | H | I | B | F | A | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 3 | 2 | 3 | 2 | ■ | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 2 | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AE. On ajoute une arête entre DH. On ajoute une arête entre GI. Par exemple :

AEGIEBICFDHEFHIDGCHABCD A

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AD}, {BA}, {CI}, {DF}, {FE}, {GE}, {HF}, {IH}

. Son poids est de 11 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{11 \times 100}{50} = 2200$ pièces d'or.

Contrôle Graphe & Langages

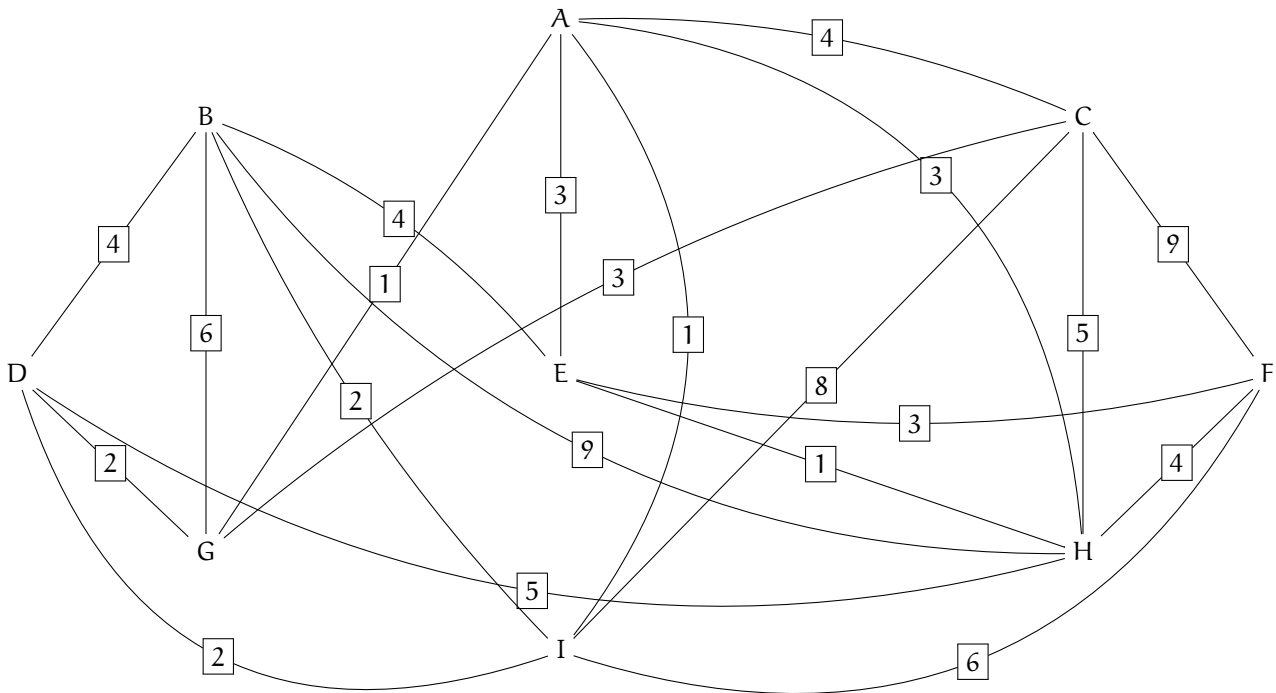
Correction du sujet 65

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 | 1 | 3 | 1 |
| B | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 0 | 6 | 9 | 2 |
| C | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 3 | 5 | 8 |
| D | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 5 | 2 |
| E | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| F | 0 | 0 | 9 | 0 | 3 | 0 | 0 | 4 | 6 |
| G | 1 | 6 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 3 | 9 | 5 | 5 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| I | 1 | 2 | 8 | 2 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | 4 | | | X | 3 | | 1 | |
| H | 3 | 4 | 6 | 6 | X | 3 | | X | |
| A | X | 4 | 6 | 6 | X | 3 | 4 | X | 4 |
| F | X | 4 | 6 | 6 | X | X | 4 | X | 4 |
| B | X | X | 6 | 6 | X | X | 4 | X | 4 |
| G | X | X | 6 | 6 | X | X | X | X | 4 |
| I | X | X | 6 | 6 | X | X | X | X | X |
| C | X | X | X | 6 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 6 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | A | B | C | I | D | E | F | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 2 | 4 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | 3 | 3 | ■ | 3 | 1 | 2 | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | 4 | ■ | 3 | 2 | 2 | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre C et E ainsi qu'une arête entre E et I. Par exemple :

AHBEHFIEFCHDICGBIACEABDGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et C ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EHC d'une distance de 6×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{6 \times 100}{50} = 12$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 6 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 2 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | E | F | G | D | I | A | C | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 4 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre D et C ainsi qu'une arête entre C et I. Par exemple :

AEHFIEBGCIBFCEDGIDFGABCD A

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et G ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDAG d'une distance de 4×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{4 \times 100}{50} = 8$ heures.

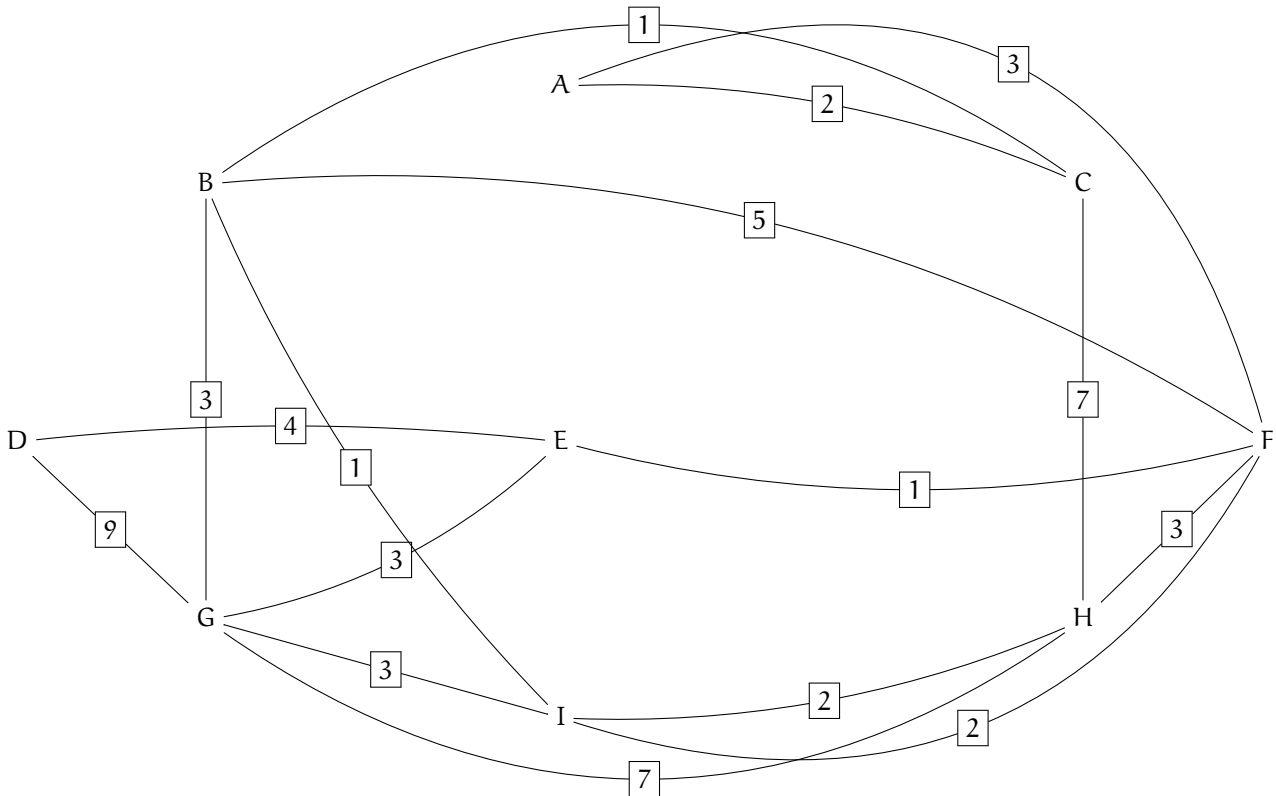
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 67

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 3 | 0 | 1 |
| C | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 9 | 0 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 |
| F | 3 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 |
| G | 0 | 3 | 0 | 9 | 3 | 0 | 0 | 7 | 3 |
| H | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 3 | 7 | 0 | 2 |
| I | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | | 4 | X | 1 | 3 | | |
| F | 3 | 5 | | 4 | X | X | 3 | 3 | 2 |
| I | 3 | 1 | | 4 | X | X | 3 | 2 | X |
| B | 3 | X | 1 | 4 | X | X | 3 | 2 | X |
| C | 2 | X | X | 4 | X | X | 3 | 2 | X |
| A | X | X | X | 4 | X | X | 3 | 2 | X |
| H | X | X | X | 4 | X | X | 3 | X | X |
| G | X | X | X | 4 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 4 | 3 | 2 | 3 | 5 | 5 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | G | B | H | I | C | E | A | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

ACBGHIGDECHFEGFIBFA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AC\}, \{BI\}, \{CB\}, \{DE\}, \{FE\}, \{GE\}, \{HI\}, \{IF\}$$

. Son poids est de 16 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{16 \times 100}{50} = 3200$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 6 | 4 | 5 | 6 | 5 | 3 | 4 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | E | D | F | C | H | A | G | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 3 | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre F et H ainsi qu'une arête entre H et G. Par exemple :

AEBGCEDHFGHIDFEHBFACBDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AF}, {BC}, {CG}, {DF}, {FE}, {GF}, {HD}, {ID}

. Son poids est de 12 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{12 \times 100}{50} = 2400$ pièces d'or.

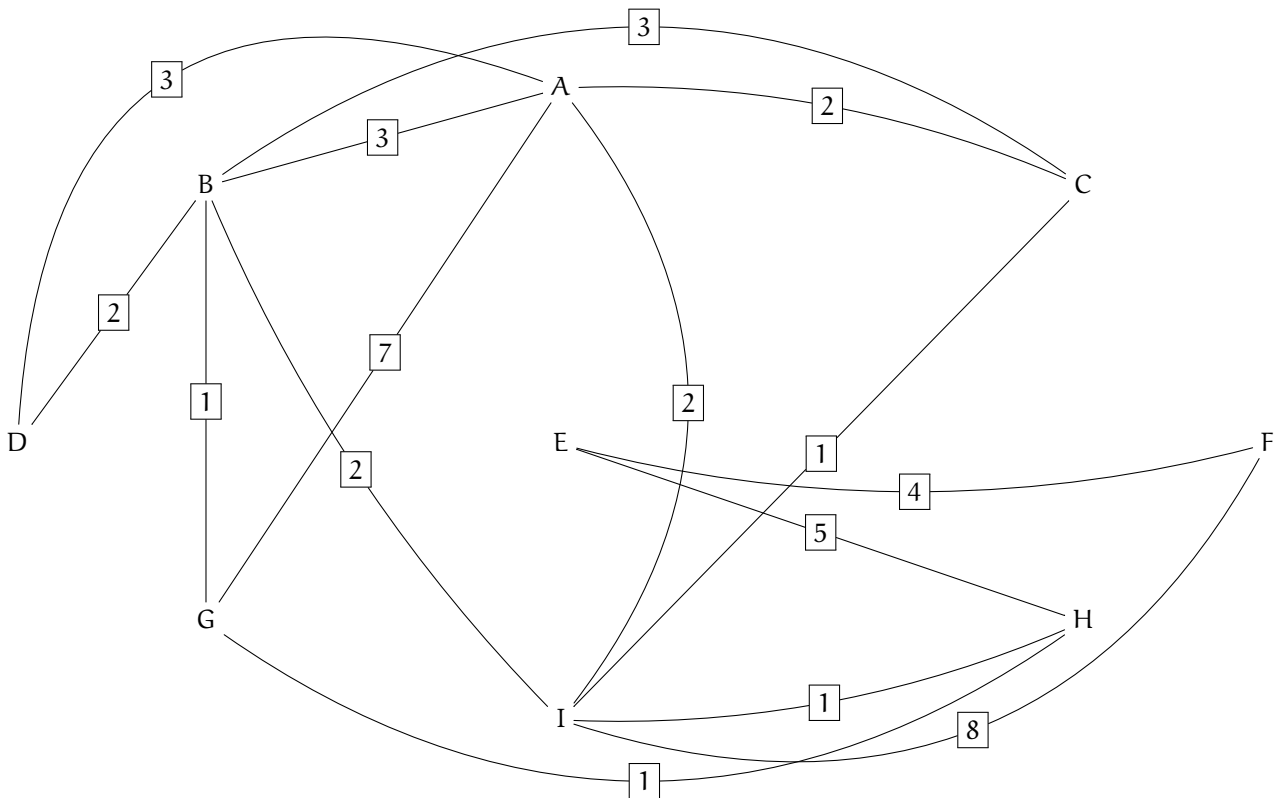
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 69

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 2 | 3 | 0 | 0 | 7 | 0 | 2 |
| B | 3 | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| C | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| D | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 5 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| G | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| H | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| I | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 8 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|----|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | | | X | 4 | | 5 | |
| F | | | | | X | X | | 5 | 12 |
| H | | | | | X | X | 6 | X | 6 |
| G | 13 | 7 | | | X | X | X | X | 6 |
| I | 8 | 7 | 7 | | X | X | X | X | X |
| B | 8 | X | 7 | 9 | X | X | X | X | X |
| C | 8 | X | X | 9 | X | X | X | X | X |
| A | X | X | X | 9 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 5 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | I | C | G | H | D | E | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AH. On ajoute une arête entre CG. On ajoute une arête entre B et E ainsi qu'une arête entre E et I. Par exemple :

AGBICGHADBEHIEFIABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et D ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EHGBD d'une distance de 9×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{9 \times 100}{50} = 18$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 1 | 3 | 4 | 3 | 4 | 6 | 5 | 2 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | G | C | E | B | D | H | I | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 3 | ■ | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | 2 | ■ | 2 | ■ | ■ | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre DG. Par exemple :

ABCFEGFHGIEDGCDBFA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et I ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EFGI d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

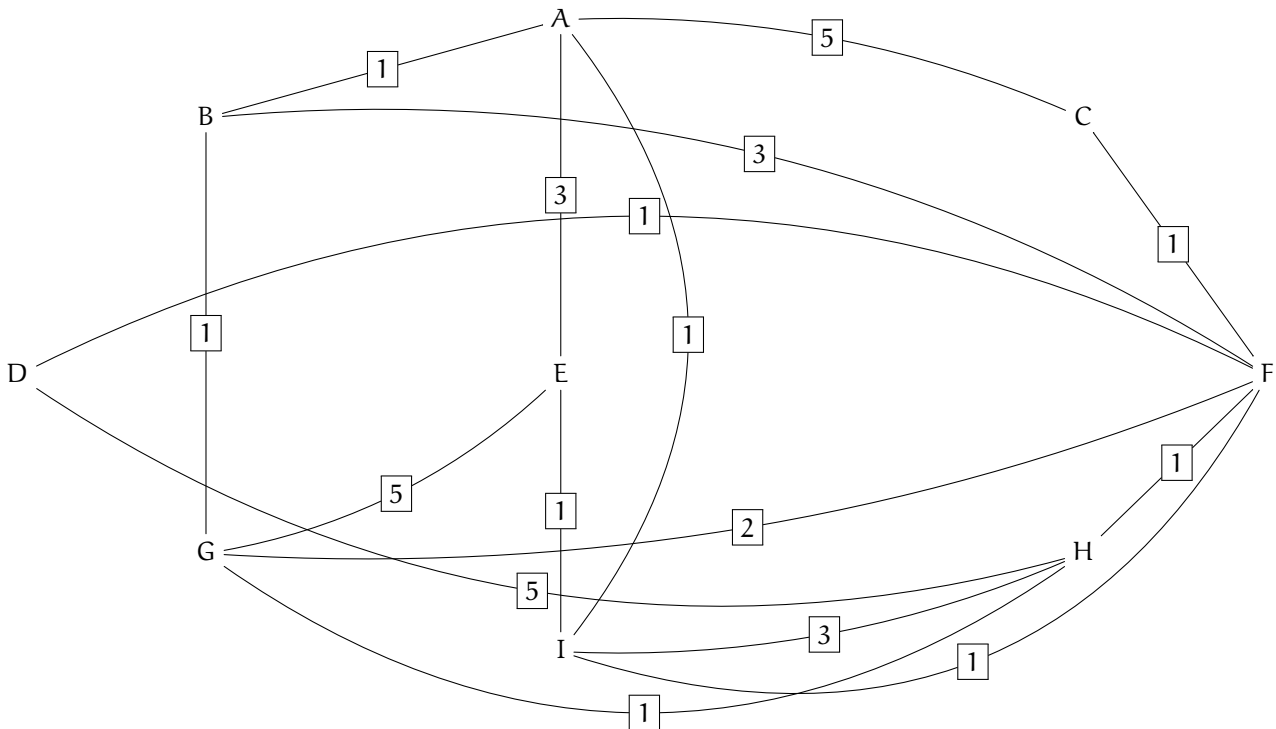
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 71

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 5 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| B | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| C | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 0 |
| E | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 |
| F | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| G | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| H | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| I | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | | | | X | | 5 | | 1 |
| I | 1 | | | | X | 1 | 5 | 3 | X |
| A | X | 1 | 5 | | X | 1 | 5 | 3 | X |
| B | X | X | 5 | | X | 1 | 1 | 3 | X |
| F | X | X | 1 | 1 | X | X | 1 | 1 | X |
| C | X | X | X | 1 | X | X | 1 | 1 | X |
| D | X | X | X | X | X | X | 1 | 1 | X |
| G | X | X | X | X | X | X | X | 1 | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 6 | 4 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | A | G | H | I | B | E | C | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 1 | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BE. Par exemple :

DFHIFGHDCFBGEIABEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliées par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AI\}, \{BA\}, \{CF\}, \{DF\}, \{FI\}, \{GB\}, \{HF\}, \{IE\}$$

. Son poids est de 8 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{8 \times 100}{50} = 1600$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 4 | 3 | 4 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | D | I | C | F | H | E | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | ■ | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 1 | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AH. On ajoute une arête entre CF. Par exemple :

AGHAEBIDFIHDCFABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliées par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EBCAF d'une distance de 11×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{11 \times 100}{50} = 22$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 6 | 4 | 6 | 7 | 3 | 5 | 2 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | A | B | D | G | I | C | F | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | ■ |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 3 | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 5 | 2 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre FG. On ajoute une arête entre E et H ainsi qu'une arête entre H et I. Par exemple :

AGBIAEHIEBFDCGEGFICEDHABDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et H ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EADH d'une distance de 6×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{6 \times 100}{50} = 12$ heures.

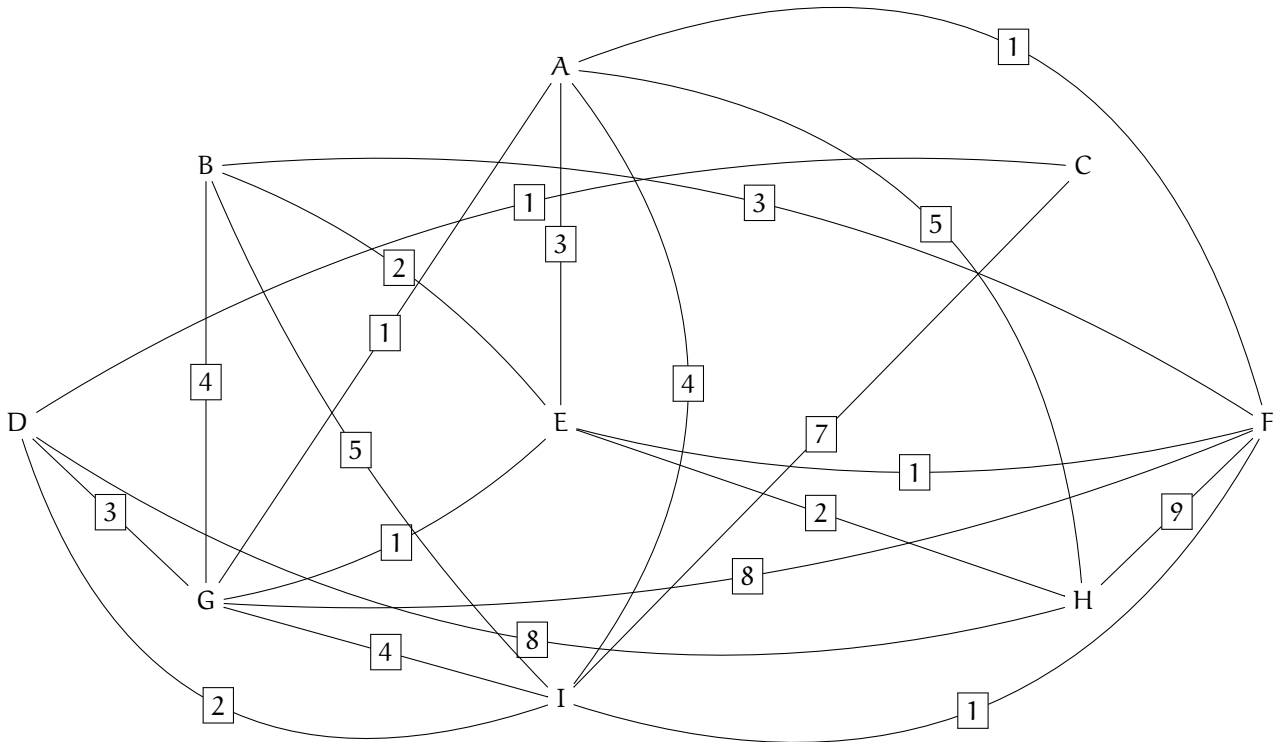
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 74

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 | 5 | 4 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 4 | 0 | 5 |
| C | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| D | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 8 | 2 |
| E | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| F | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 9 | 1 |
| G | 1 | 4 | 0 | 3 | 1 | 8 | 0 | 0 | 4 |
| H | 5 | 0 | 0 | 8 | 2 | 9 | 0 | 0 | 0 |
| I | 4 | 5 | 7 | 2 | 0 | 1 | 4 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | 2 | | | X | 1 | 1 | 2 | |
| F | 1 | 2 | | | X | X | 1 | 2 | 1 |
| A | X | 2 | | | X | X | 1 | 2 | 1 |
| G | X | 2 | | 3 | X | X | X | 2 | 1 |
| I | X | 2 | 7 | 2 | X | X | X | 2 | X |
| B | X | X | 7 | 2 | X | X | X | 2 | X |
| D | X | X | 1 | X | X | X | X | 2 | X |
| C | X | X | X | X | X | X | X | 2 | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 4 | 2 | 4 | 5 | 6 | 6 | 4 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | G | I | A | E | B | D | H | C |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 1 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre A et C ainsi qu'une arête entre C et E. Par exemple :

AHDI AEF G I F H E B G E C I B F A C D G A

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AF\}, \{BE\}, \{CD\}, \{DI\}, \{FE\}, \{GE\}, \{HE\}, \{IF\}$$

. Son poids est de 11 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{11 \times 100}{50} = 2200$ pièces d'or.

Contrôle Graphe & Langages

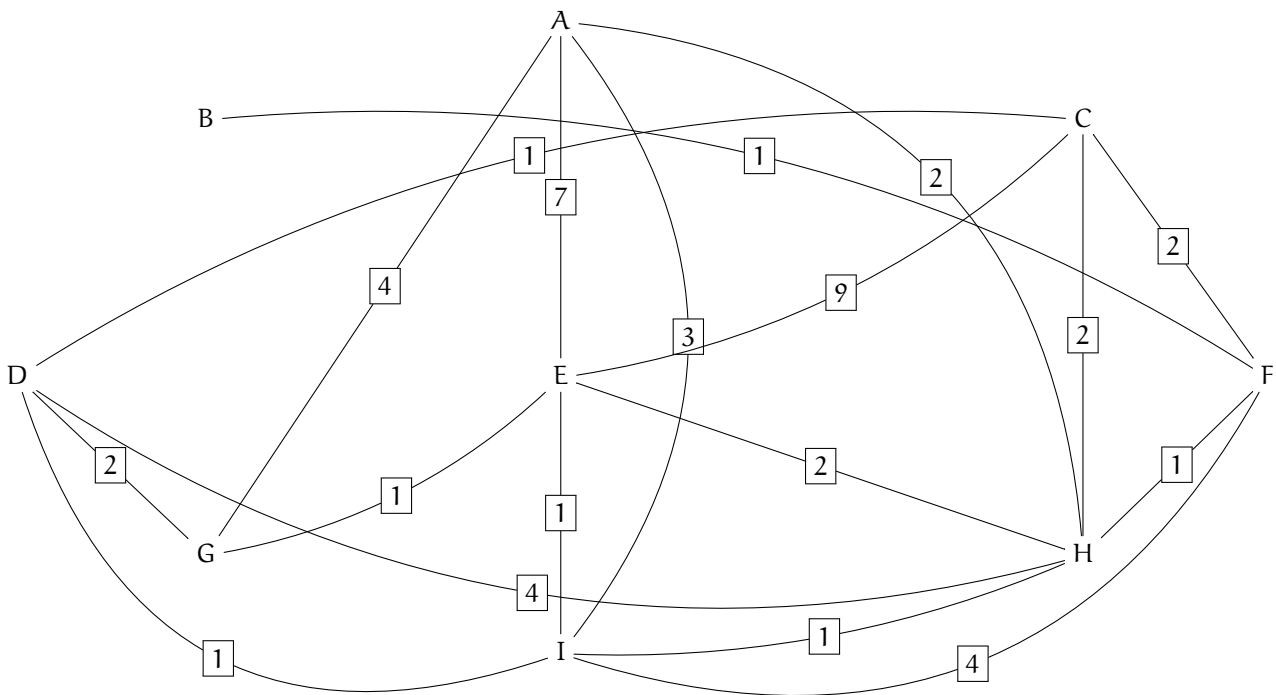
Correction du sujet 75

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maëlstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 4 | 2 | 3 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| D | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 1 |
| E | 7 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| F | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| G | 4 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 2 | 0 | 2 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| I | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 4 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 7 | | 9 | | X | | 1 | 2 | 1 |
| G | 4 | | 9 | 2 | X | | X | 2 | 1 |
| I | 3 | | 9 | 1 | X | 4 | X | 1 | X |
| D | 3 | | 1 | X | X | 4 | X | 1 | X |
| C | 3 | | X | X | X | 2 | X | 1 | X |
| H | 2 | | X | X | X | 1 | X | X | X |
| F | 2 | 1 | X | X | X | X | X | X | X |
| B | 2 | X | X | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 1 | 4 | 4 | 5 | 4 | 3 | 6 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | E | I | A | C | D | F | G | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BE. On ajoute une arête entre GI. Par exemple :

AHCEGIAEBFHIFCDHEIDGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AH\}, \{BF\}, \{CD\}, \{DI\}, \{FH\}, \{GE\}, \{HI\}, \{IE\}$$

. Son poids est de 9 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{9 \times 100}{50} = 1800$ pièces d'or.

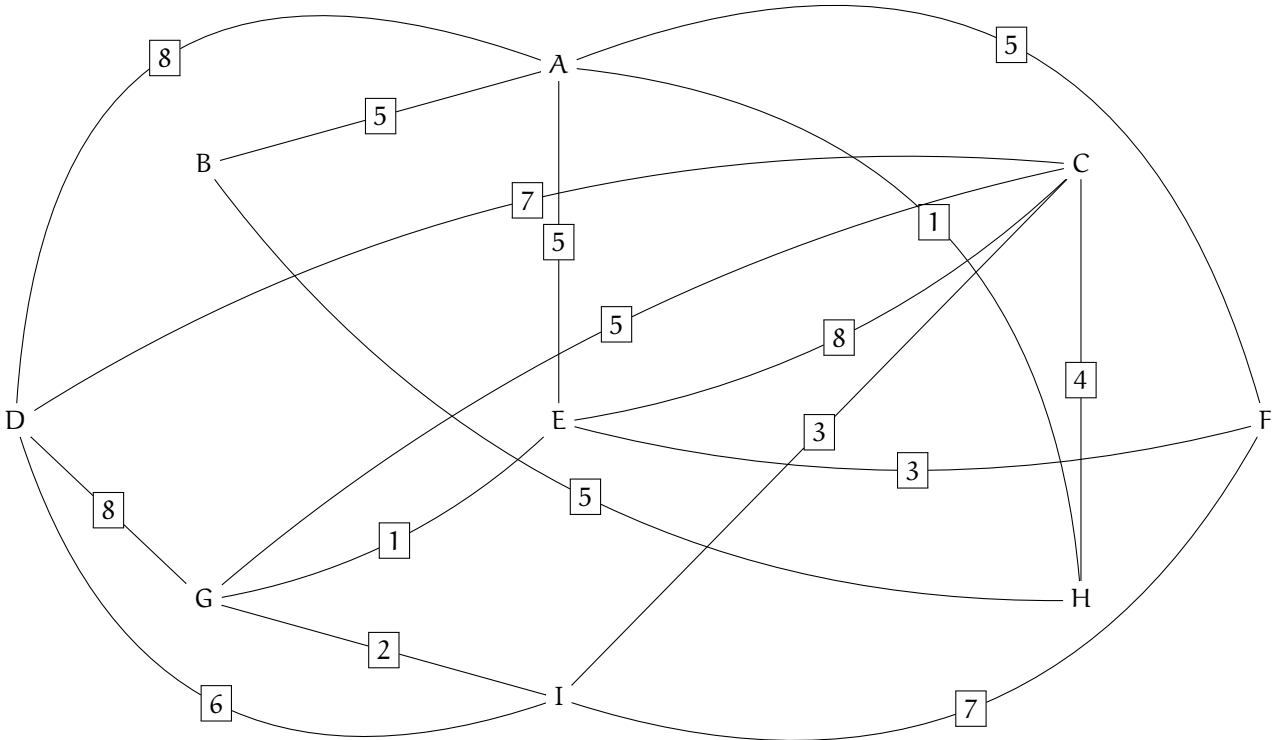
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 76

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 5 | 0 | 8 | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| B | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 7 | 8 | 0 | 5 | 4 | 3 |
| D | 8 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 6 |
| E | 5 | 0 | 8 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| F | 5 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| G | 0 | 0 | 5 | 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| H | 1 | 5 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 3 | 6 | 0 | 7 | 2 | 0 | 0 |

0.5

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 5 | | 8 | | X | 3 | 1 | | |
| G | 5 | | 5 | 8 | X | 3 | X | | 2 |
| I | 5 | | 3 | 6 | X | 3 | X | | X |
| C | 5 | | X | 6 | X | 3 | X | 4 | X |
| F | 5 | | X | 6 | X | X | X | 4 | X |
| H | 1 | 5 | X | 6 | X | X | X | X | X |
| A | X | 5 | X | 6 | X | X | X | X | X |
| B | X | X | X | 6 | X | X | X | X | X |

2

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 2 | 5 | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | C | D | E | G | I | F | H | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | □ | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | □ | □ | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | □ | □ | ■ | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | □ | □ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | □ | □ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | □ | □ | ■ | ■ | ■ | □ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AC. On ajoute une arête entre FH. Par exemple :

AEFIGECGDICHFACDABHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AH}, {BH}, {CI}, {DI}, {FE}, {GE}, {HC}, {IG}

. Son poids est de 25 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{25 \times 100}{50} = 5000$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 6 | 6 | 2 | 5 | 7 | 6 | 3 | 7 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | I | A | B | C | G | E | H | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 3 | 3 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 4 | 4 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ | 5 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | 5 | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 6 | 3 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 6 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 6. De plus on observe que \mathcal{K}_6 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 6. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 6.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EF. On ajoute une arête entre H et D ainsi qu'une arête entre D et I. Par exemple :

AGBECGEFHIFGICFBIADHEIDFABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 6. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 6 (couleur 6)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AC\}, \{BE\}, \{CB\}, \{DF\}, \{FC\}, \{GF\}, \{HE\}, \{IC\}$

. Son poids est de 12 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{12 \times 100}{50} = 2400$ pièces d'or.

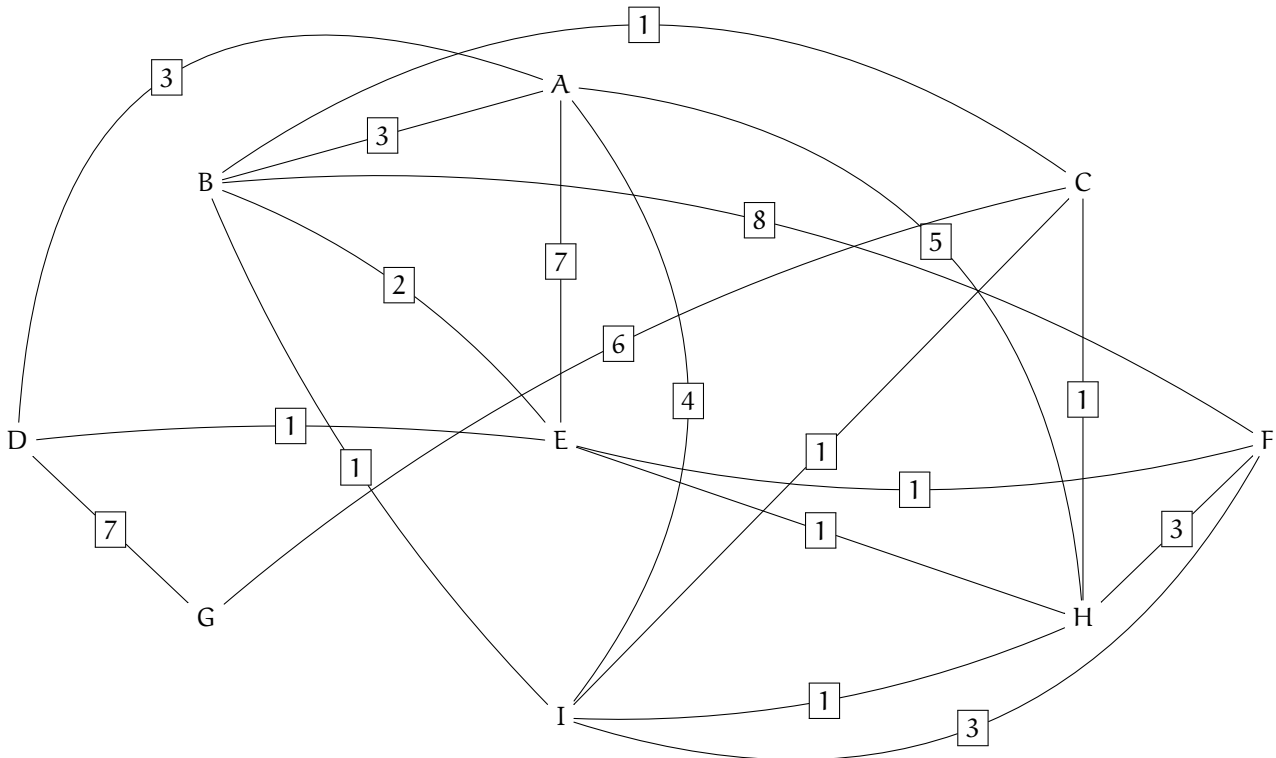
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 78

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 0 | 3 | 7 | 0 | 0 | 5 | 4 |
| B | 3 | 0 | 1 | 0 | 2 | 8 | 0 | 0 | 1 |
| C | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1 | 1 |
| D | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 7 | 0 | 0 |
| E | 7 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| F | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 3 |
| G | 0 | 0 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| I | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 7 | 2 | | 1 | X | 1 | | 1 | |
| D | 3 | 2 | | X | X | 1 | 7 | 1 | |
| F | 3 | 2 | | X | X | X | 7 | 1 | 3 |
| H | 3 | 2 | 1 | X | X | X | 7 | X | 1 |
| C | 3 | 1 | X | X | X | X | 6 | X | 1 |
| B | 3 | X | X | X | X | X | 6 | X | 1 |
| I | 3 | X | X | X | X | X | 6 | X | X |
| A | X | X | X | X | X | X | 6 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 5 | 4 | 3 | 5 | 4 | 2 | 5 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | E | H | I | C | F | D | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | ■ | 4 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | 2 | 3 | 3 | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | 3 | 4 | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | 4 | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BD. On ajoute une arête entre EI. On ajoute une arête entre A et G ainsi qu'une arête entre G et H. Par exemple :

AHCIADBFHIFEDGHEIBEABCGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AD\}, \{BC\}, \{CH\}, \{DE\}, \{FE\}, \{GC\}, \{HE\}, \{IH\}$

. Son poids est de 15 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{15 \times 100}{50} = 3000$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 4 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | 6 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | B | D | C | E | F | G | A | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | ■ | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | 2 | ■ | ■ | 3 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 3 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

AGDBCFCEDHFGHICEBHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AG\}, \{BD\}, \{CI\}, \{DE\}, \{FC\}, \{GD\}, \{HB\}, \{IH\}$

. Son poids est de 12 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{12 \times 100}{50} = 2400$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| \bullet | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 5 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | I | H | B | D | E | C | G | A | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre DE. On ajoute une arête entre FH. Par exemple :

CHDICBEFHIEDGHBIA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AI\}, \{BE\}, \{CI\}, \{DI\}, \{FE\}, \{GD\}, \{HG\}, \{IE\}$$

. Son poids est de 16 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{16 \times 100}{50} = 3200$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 6 | 7 | 6 | 4 | 4 | 3 | 1 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | C | B | D | A | E | F | G | I | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 5 | 4 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AG. On ajoute une arête entre CH. Par exemple :

AECDEFADBHCDFDGCIBGABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et G ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDCG d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

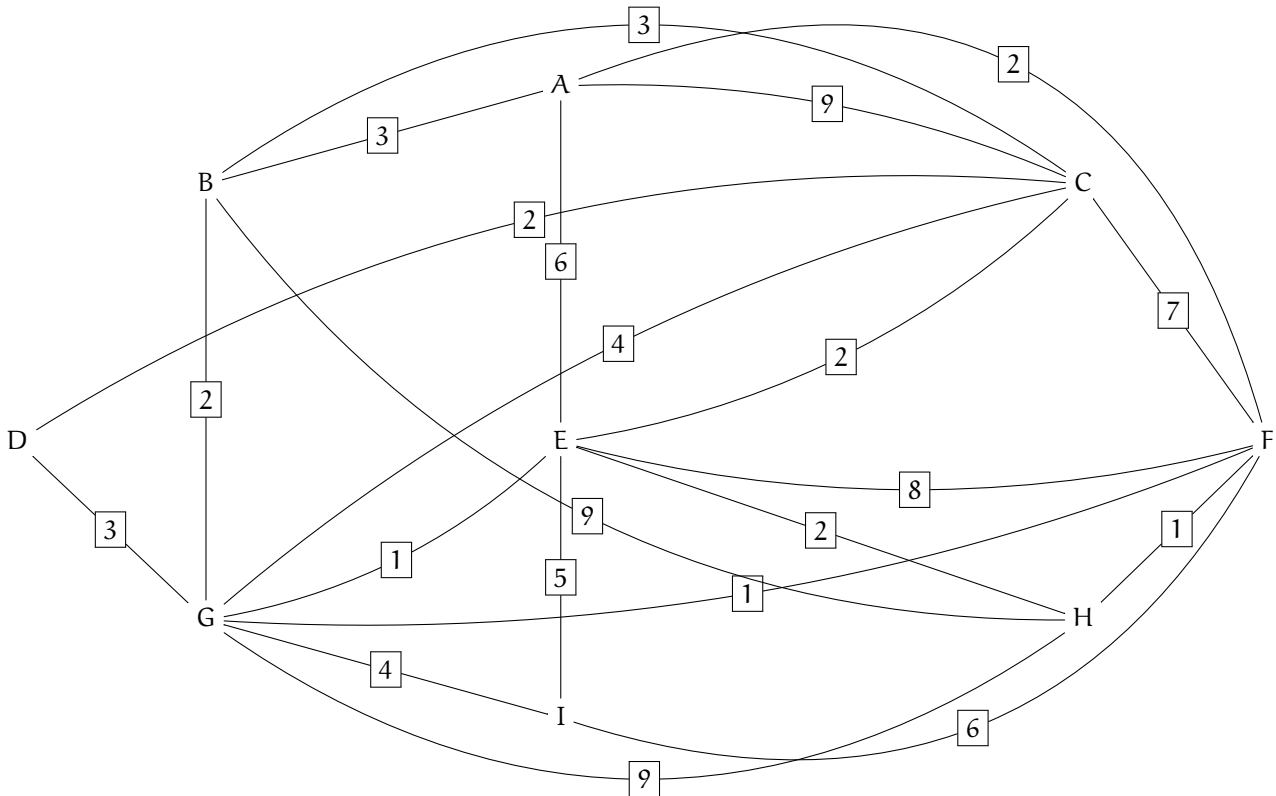
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 82

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 9 | 0 | 6 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| B | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 2 | 9 | 0 |
| C | 9 | 3 | 0 | 2 | 2 | 7 | 4 | 0 | 0 |
| D | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| E | 6 | 0 | 2 | 0 | 0 | 8 | 1 | 2 | 5 |
| F | 2 | 0 | 7 | 0 | 8 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| G | 0 | 2 | 4 | 3 | 1 | 1 | 0 | 9 | 4 |
| H | 0 | 9 | 0 | 0 | 2 | 1 | 9 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 6 | 4 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 6 | | 2 | | X | 8 | 1 | 2 | 5 |
| G | 6 | 2 | 2 | 3 | X | 1 | X | 2 | 4 |
| F | 2 | 2 | 2 | 3 | X | X | X | 1 | 4 |
| H | 2 | 2 | 2 | 3 | X | X | X | X | 4 |
| A | X | 2 | 2 | 3 | X | X | X | X | 4 |
| B | X | X | 2 | 3 | X | X | X | X | 4 |
| C | X | X | X | 2 | X | X | X | X | 4 |
| D | X | X | X | X | X | X | X | X | 4 |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 4 | 6 | 2 | 6 | 6 | 7 | 4 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | G | C | E | F | A | B | H | I | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 6 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 3 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre G et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

AFHGIFCGBHEFGEIAECDGABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AF\}, \{BG\}, \{CE\}, \{DC\}, \{FG\}, \{GE\}, \{HF\}, \{IG\}$

. Son poids est de 15 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{15 \times 100}{50} = 3000$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 4 | 3 | 6 | 6 | 4 | 5 | 3 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | E | A | G | B | F | I | C | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 3 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 1 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 2 | 4 | 1 | 4 | 4 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AG. On ajoute une arête entre CH. Par exemple :

AFHGIFGACDGEIDEABECHBDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 4, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AB\}, \{BE\}, \{CA\}, \{DE\}, \{FA\}, \{GD\}, \{HB\}, \{IE\}$

. Son poids est de 10 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{10 \times 100}{50} = 2000$ pièces d'or.

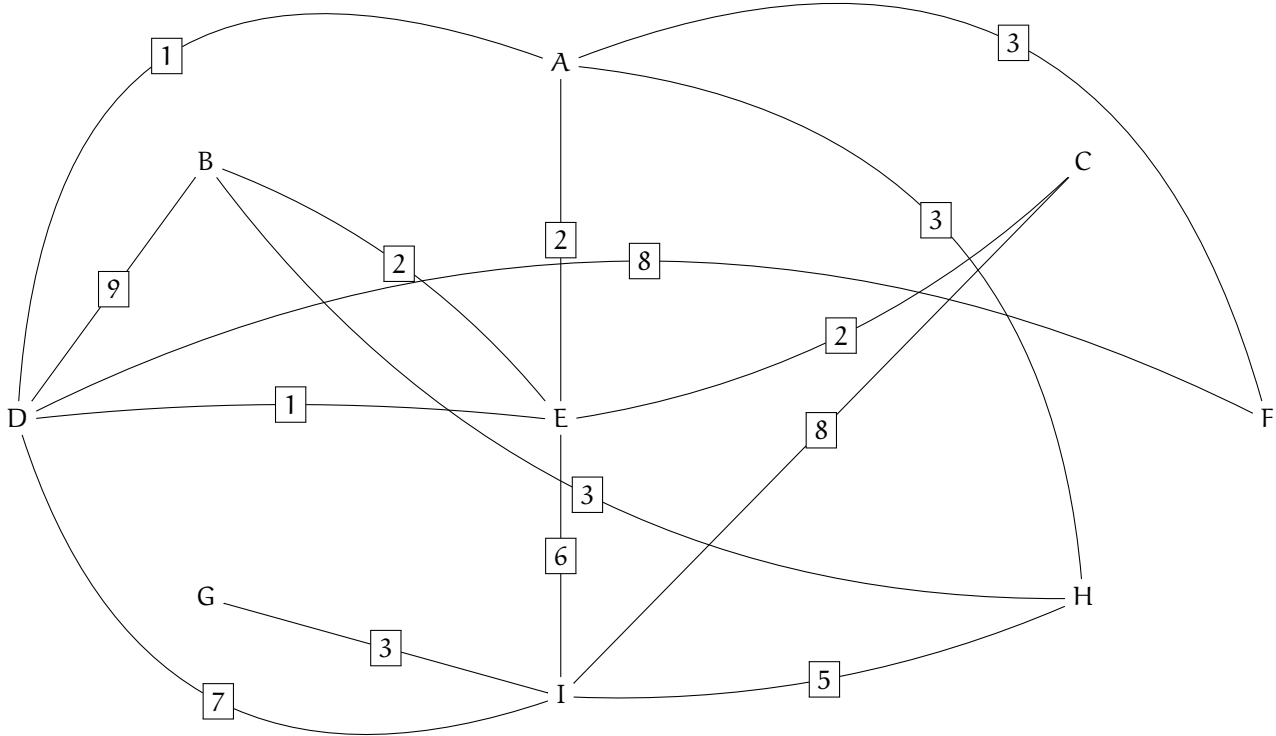
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 84

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 9 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| D | 1 | 9 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | 0 | 7 |
| E | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| F | 3 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| H | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| I | 0 | 0 | 8 | 7 | 6 | 0 | 3 | 5 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 2 | 2 | 2 | 1 | X | | | | 6 |
| D | 2 | 2 | 2 | X | X | 9 | | | 6 |
| A | X | 2 | 2 | X | X | 5 | | 5 | 6 |
| B | X | X | 2 | X | X | 5 | | 5 | 6 |
| C | X | X | X | X | X | 5 | | 5 | 6 |
| F | X | X | X | X | X | X | | 5 | 6 |
| H | X | X | X | X | X | X | | X | 6 |
| I | X | X | X | X | X | X | 9 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 3 | 2 | 5 | 5 | 2 | 1 | 3 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | E | I | A | B | H | C | F | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BG. On ajoute une arête entre DH. On ajoute une arête entre E et F ainsi qu'une arête entre F et I. Par exemple :

AFDECIDHADBGIEFIHBEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 4 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50 km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EAF d'une distance de 5×100 km. A 50 km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 7 | 6 | 7 | 3 | 3 | 6 | 4 | 3 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | C | B | F | I | G | D | E | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | 2 | ■ | 3 | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 3 | 3 | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 4 | 5 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre EH. On ajoute une arête entre BF. On ajoute une arête entre GI. On ajoute une arête entre C et D ainsi qu'une arête entre D et G. Par exemple :

AGBIAFGIFBEHADCHDICFDGCEABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AE}, {BE}, {CE}, {DF}, {FA}, {GA}, {HD}, {IA}

. Son poids est de 11 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{11 \times 100}{50} = 2200$ pièces d'or.

Contrôle Graphe & Langages

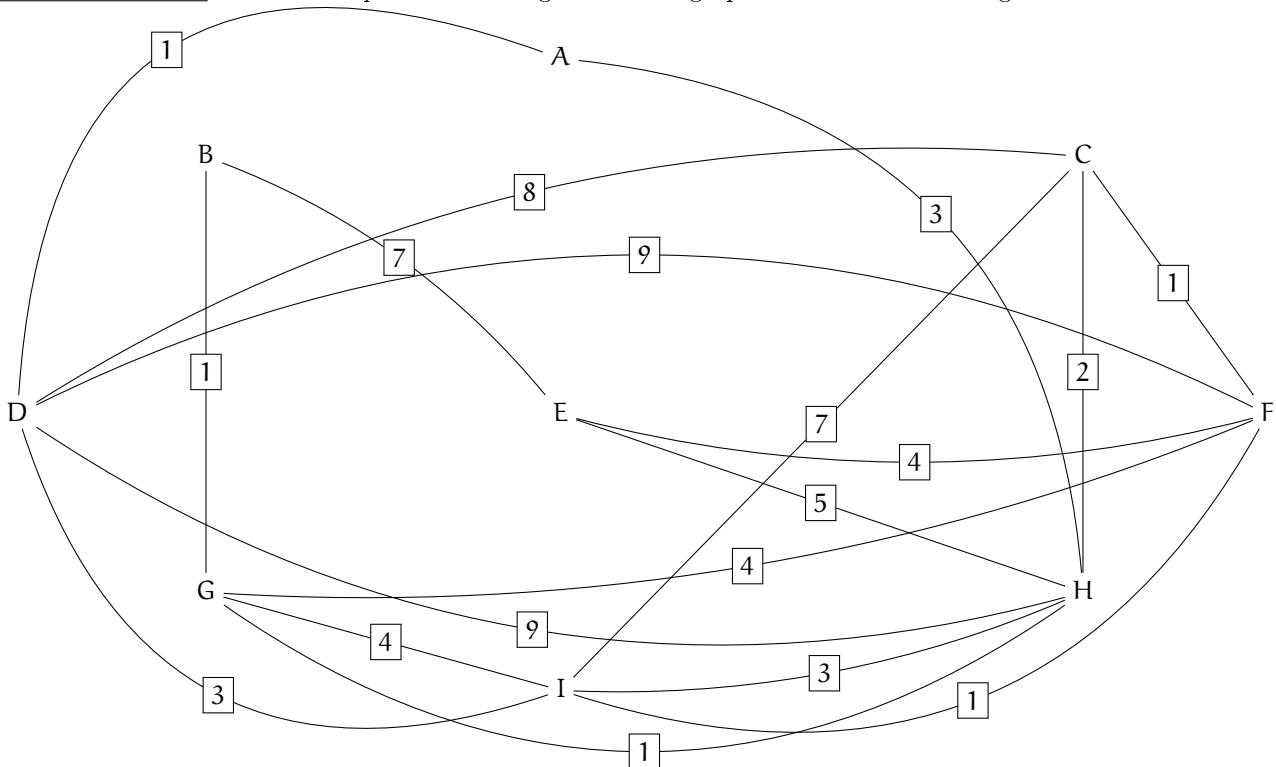
Correction du sujet 86

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 1 | 0 | 2 | 7 |
| D | 1 | 0 | 8 | 0 | 0 | 9 | 0 | 9 | 3 |
| E | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 5 | 0 |
| F | 0 | 0 | 1 | 9 | 4 | 0 | 4 | 0 | 1 |
| G | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 1 | 4 |
| H | 3 | 0 | 2 | 9 | 5 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| I | 0 | 0 | 7 | 3 | 0 | 1 | 4 | 3 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 7 | | | X | 4 | | 5 | |
| F | | 7 | 1 | 9 | X | X | 4 | 5 | 1 |
| C | | 7 | X | 8 | X | X | 4 | 2 | 1 |
| I | | 7 | X | 3 | X | X | 4 | 2 | X |
| H | 3 | 7 | X | 3 | X | X | 1 | X | X |
| G | 3 | 1 | X | 3 | X | X | X | X | X |
| B | 3 | X | X | 3 | X | X | X | X | X |
| A | X | X | X | 1 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 2 | 4 | 5 | 3 | 5 | 4 | 6 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | D | F | I | C | G | E | A | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 2 | 2 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre DE. On ajoute une arête entre F et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

BEDFEHDIFGHIBHBCIADCFA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AH\}, \{BG\}, \{CF\}, \{DA\}, \{FE\}, \{GH\}, \{HC\}, \{IF\}$

. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 4 | 5 | 3 | 6 | 5 | 4 | 6 | 1 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | H | C | F | A | B | G | D | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 1 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CI. On ajoute une arête entre DF. Par exemple :

AFGHFCEDFEHADCBGCIHBEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :

- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
- Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
- Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
- Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AF\}, \{BE\}, \{CE\}, \{DE\}, \{FE\}, \{GF\}, \{HF\}, \{IH\}$$

. Son poids est de 17 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{17 \times 100}{50} = 3400$ pièces d'or.

Contrôle Graphe & Langages

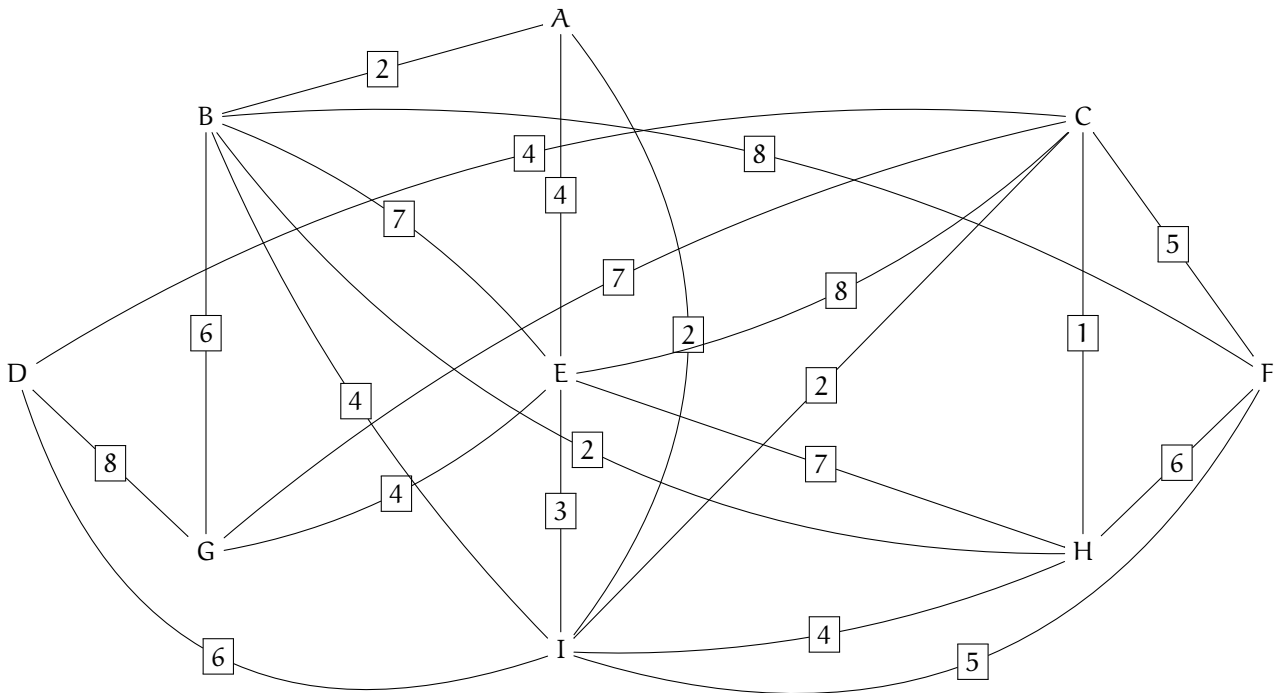
Correction du sujet 88

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| B | 2 | 0 | 0 | 0 | 7 | 8 | 6 | 2 | 4 |
| C | 0 | 0 | 0 | 4 | 8 | 5 | 7 | 1 | 2 |
| D | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 6 |
| E | 4 | 7 | 8 | 0 | 0 | 0 | 4 | 7 | 3 |
| F | 0 | 8 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 5 |
| G | 0 | 6 | 7 | 8 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 2 | 1 | 0 | 7 | 6 | 0 | 0 | 4 |
| I | 2 | 4 | 2 | 6 | 3 | 5 | 0 | 4 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 4 | 7 | 8 | | X | | 4 | 7 | 3 |
| I | 4 | 7 | 5 | 9 | X | 8 | 4 | 7 | X |
| A | X | 6 | 5 | 9 | X | 8 | 4 | 7 | X |
| G | X | 6 | 5 | 9 | X | 8 | X | 7 | X |
| C | X | 6 | X | 9 | X | 8 | X | 6 | X |
| B | X | X | X | 9 | X | 8 | X | 6 | X |
| H | X | X | X | 9 | X | 8 | X | X | X |
| F | X | X | X | 9 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 6 | 6 | 3 | 6 | 4 | 4 | 5 | 7 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | I | B | C | E | H | F | G | A | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 1 | 4 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre H et G ainsi qu'une arête entre G et I. Par exemple :

ADCEHFIEGHIGBHCIBFCGDIABEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et H ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EICH d'une distance de 6×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{6 \times 100}{50} = 12$ heures.

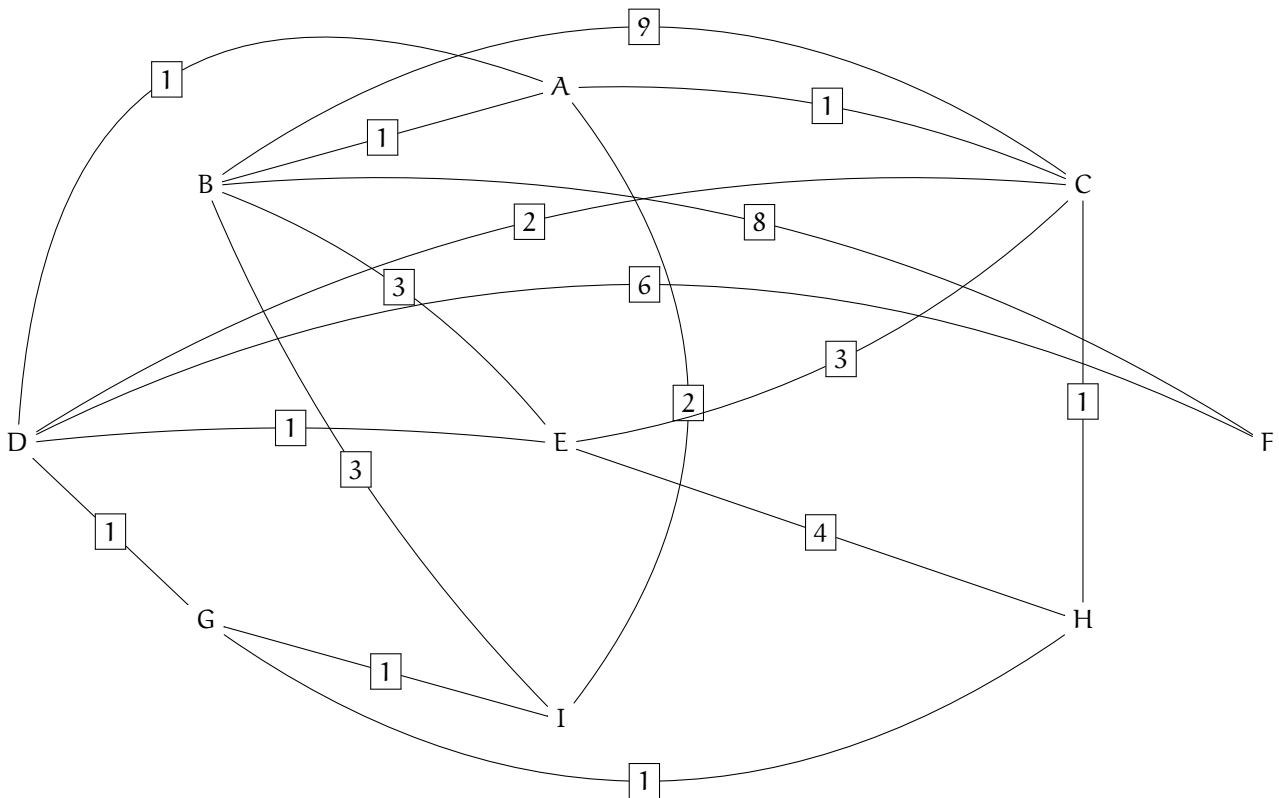
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 89

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| B | 1 | 0 | 9 | 0 | 3 | 8 | 0 | 0 | 3 |
| C | 1 | 9 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| D | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 6 | 1 | 0 | 0 |
| E | 0 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| F | 0 | 8 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| H | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| I | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 3 | 3 | 1 | X | | | 4 | |
| D | 1 | 3 | 2 | X | X | 6 | 1 | 4 | |
| A | X | 1 | 1 | X | X | 6 | 1 | 4 | 2 |
| B | X | X | 1 | X | X | 6 | 1 | 4 | 2 |
| C | X | X | X | X | X | 6 | 1 | 1 | 2 |
| G | X | X | X | X | X | 6 | X | 1 | 1 |
| H | X | X | X | X | X | 6 | X | X | 1 |
| I | X | X | X | X | X | 6 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 2 | 3 | 3 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | C | D | A | E | G | H | I | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 5 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 4 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BD. On ajoute une arête entre CG. On ajoute une arête entre HI. Par exemple :

ADBECDEHCGHIGDFBIABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AD\}, \{BA\}, \{CA\}, \{DE\}, \{FD\}, \{GD\}, \{HC\}, \{IG\}$

. Son poids est de 13 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{13 \times 100}{50} = 2600$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 5 | 3 | 4 | 6 | 6 | 5 | 3 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | E | F | B | G | D | C | H | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 2 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BC. On ajoute une arête entre GH. Par exemple :

AGBFGHFEGCHADBEBEDIFABCEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et G ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EAG d'une distance de 2×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{2 \times 100}{50} = 4$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 3 | 4 | 4 | 6 | 2 | 4 | 5 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | H | I | C | D | G | A | B | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre H et D ainsi qu'une arête entre D et I. Par exemple :

ACDGDIFHDEHIEGBICHABEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EIHA d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 5 | 6 | 4 | 1 | 3 | 4 | 4 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | C | B | A | D | G | H | F | I | E |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 1 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BE. On ajoute une arête entre FI. Par exemple :

AGCDGIFHDBFCIBEHABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 5 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et I ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EHAGI d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 1 | 3 | 5 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | F | A | C | E | G | H | I | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | ■ | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre DH. On ajoute une arête entre G et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

AGDEHDFGIFCIADCEABHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et I ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDFGI d'une distance de 8×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{8 \times 100}{50} = 16$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 3 | 3 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | C | H | I | A | F | G | B | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 4 | 4 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AE. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

AGECHFGICFEDIAEBHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EBHA d'une distance de 7×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{7 \times 100}{50} = 14$ heures.

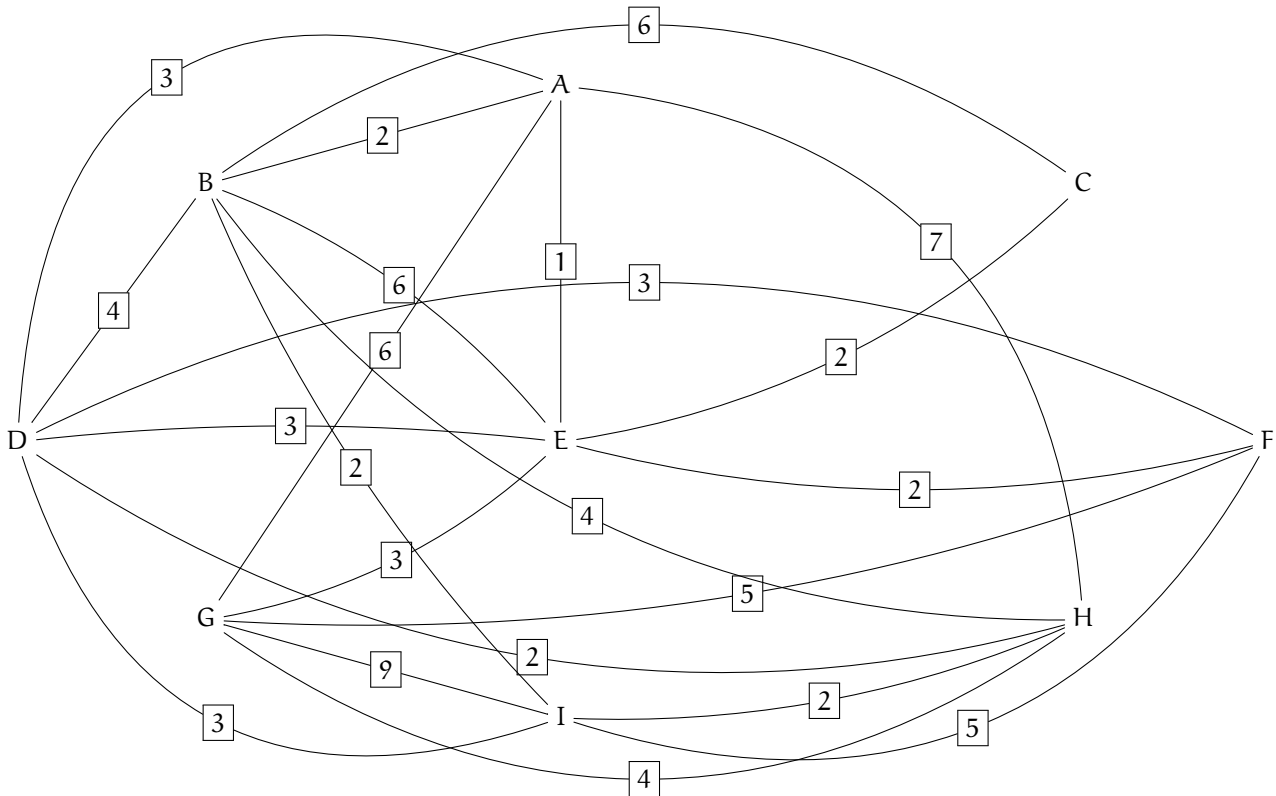
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 95

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 0 | 6 | 7 | 0 |
| B | 2 | 0 | 6 | 4 | 6 | 0 | 0 | 4 | 2 |
| C | 0 | 6 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 3 | 4 | 0 | 0 | 3 | 3 | 0 | 2 | 3 |
| E | 1 | 6 | 2 | 3 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 | 5 | 0 | 5 |
| G | 6 | 0 | 0 | 0 | 3 | 5 | 0 | 4 | 9 |
| H | 7 | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 |
| I | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 5 | 9 | 2 | 0 |

0.5 2

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | 6 | 2 | 3 | X | 2 | 3 | | |
| A | X | 2 | 2 | 3 | X | 2 | 3 | 7 | |
| B | X | X | 2 | 3 | X | 2 | 3 | 4 | 2 |
| C | X | X | X | 3 | X | 2 | 3 | 4 | 2 |
| F | X | X | X | 3 | X | X | 3 | 4 | 2 |
| I | X | X | X | 3 | X | X | 3 | 2 | X |
| H | X | X | X | 2 | X | X | 3 | X | X |
| D | X | X | X | X | X | X | 3 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 6 | 2 | 6 | 6 | 4 | 5 | 5 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | D | E | A | G | H | I | F | C |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 4 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 4 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 5 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre A et I. On ajoute une arête entre G et C ainsi qu'une arête entre C et H. Par exemple :

AHBIADBEDFEGHIGABCGFIDHCEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.
- Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AE\}, \{BA\}, \{CE\}, \{DH\}, \{FE\}, \{GE\}, \{HI\}, \{IB\}$$

. Son poids est de 16 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{16 \times 100}{50} = 3200$ pièces d'or.

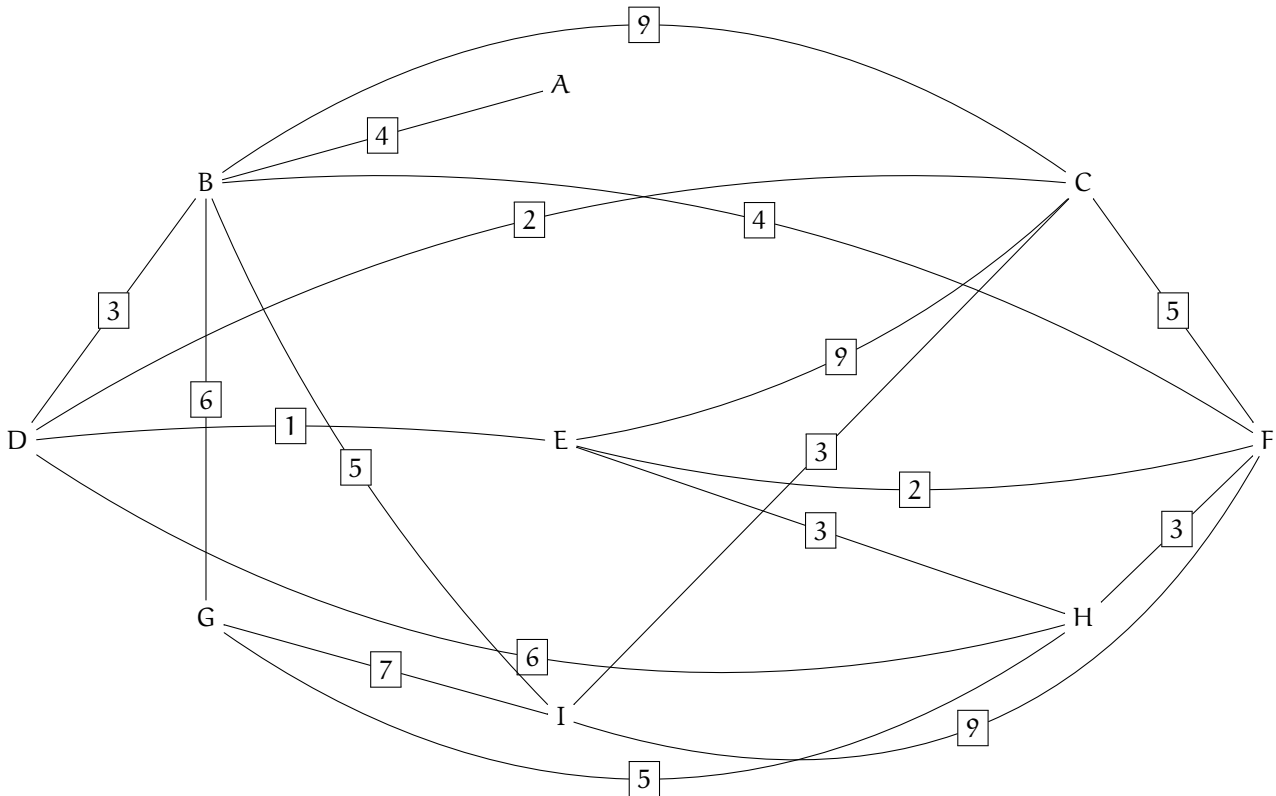
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 96

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | 4 | 0 | 9 | 3 | 0 | 4 | 6 | 0 | 5 |
| C | 0 | 9 | 0 | 2 | 9 | 5 | 0 | 0 | 3 |
| D | 0 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| E | 0 | 0 | 9 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| F | 0 | 4 | 5 | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 9 |
| G | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 7 |
| H | 0 | 0 | 0 | 6 | 3 | 3 | 5 | 0 | 0 |
| I | 0 | 5 | 3 | 0 | 0 | 9 | 7 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | 9 | 1 | X | 2 | | 3 | |
| D | | 4 | 3 | X | X | 2 | | 3 | |
| F | | 4 | 3 | X | X | X | | 3 | 11 |
| C | | 4 | X | X | X | X | | 3 | 6 |
| H | | 4 | X | X | X | X | 8 | X | 6 |
| B | 8 | X | X | X | X | X | 8 | X | 6 |
| I | 8 | X | X | X | X | X | 8 | X | X |
| A | X | X | X | X | X | X | 8 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 1 | 6 | 5 | 4 | 4 | 5 | 3 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | C | F | D | E | H | I | G | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 1 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AC. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

ABGFHGFICIBDCEDHEFBCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDAB d'une distance de 8×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{8 \times 100}{50} = 16$ heures.

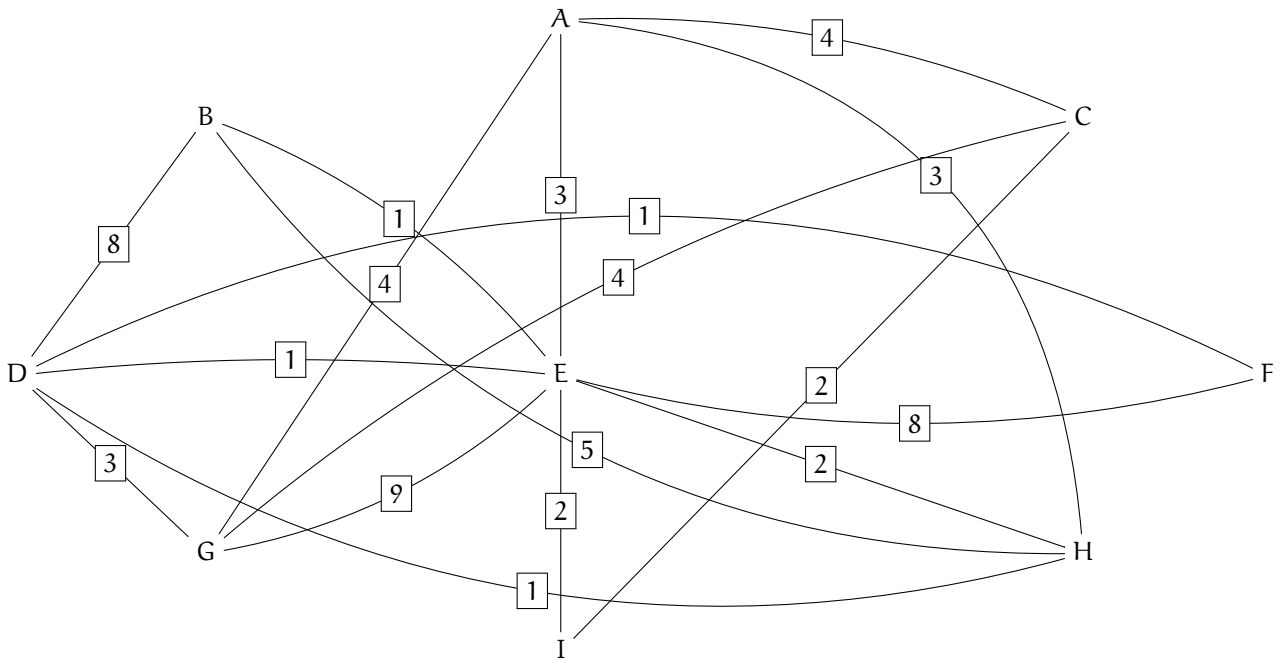
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 97

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 | 4 | 3 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 8 | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| C | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 |
| D | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| E | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 8 | 9 | 2 | 2 |
| F | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 4 | 0 | 4 | 3 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 3 | 5 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

0.5 2

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | 1 | | 1 | X | 8 | 9 | 2 | 2 |
| B | 3 | X | | 1 | X | 8 | 9 | 2 | 2 |
| D | 3 | X | | X | X | 1 | 3 | 1 | 2 |
| F | 3 | X | | X | X | X | 3 | 1 | 2 |
| H | 3 | X | | X | X | X | 3 | X | 2 |
| I | 3 | X | 2 | X | X | X | 3 | X | X |
| C | 3 | X | X | X | X | X | 3 | X | X |
| A | X | X | X | X | X | X | 3 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 3 | 3 | 5 | 7 | 2 | 4 | 4 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | D | A | G | H | B | C | F | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 1 | ■ | 3 | 2 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 2 | ■ | ■ | 2 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BC. On ajoute une arête entre D et C ainsi qu'une arête entre C et E. Par exemple :

AGCIEBHACBDGHEHDEFDCEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AE\}, \{BE\}, \{CI\}, \{DE\}, \{FD\}, \{GD\}, \{HD\}, \{IE\}$$

. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

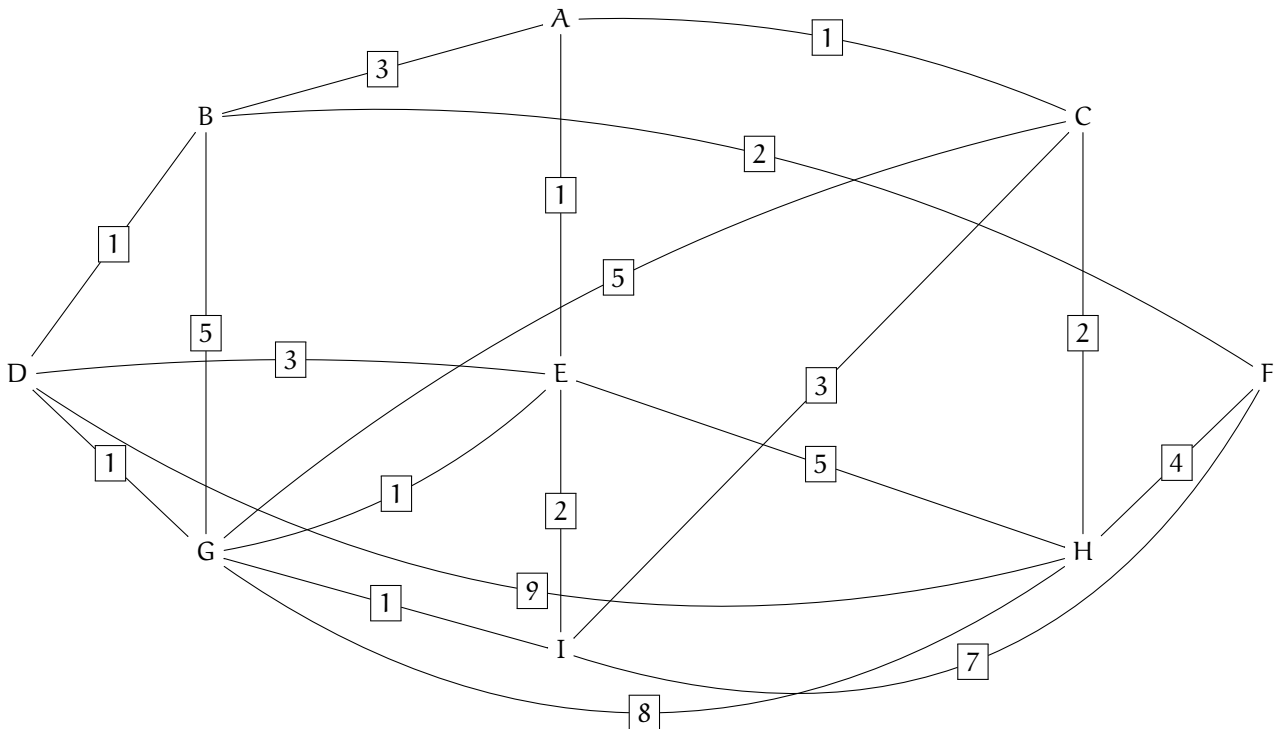
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 98

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 |
| C | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 2 | 3 |
| D | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 9 | 0 |
| E | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | 5 | 2 |
| F | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 7 |
| G | 0 | 5 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 8 | 1 |
| H | 0 | 0 | 2 | 9 | 5 | 4 | 8 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 7 | 1 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | | | 3 | X | | 1 | 5 | 2 |
| A | X | 4 | 2 | 3 | X | | 1 | 5 | 2 |
| G | X | 4 | 2 | 2 | X | | X | 5 | 2 |
| C | X | 4 | X | 2 | X | | X | 4 | 2 |
| D | X | 3 | X | X | X | | X | 4 | 2 |
| I | X | 3 | X | X | X | 9 | X | 4 | X |
| B | X | X | X | X | X | 5 | X | 4 | X |
| H | X | X | X | X | X | 5 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 3 | 6 | 5 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | G | E | H | B | C | D | I | A | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | ■ | 3 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | ■ | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 | 3 | ■ | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | 3 | ■ | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | ■ | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AF. On ajoute une arête entre E et B ainsi qu'une arête entre B et H. Par exemple :

ACHEICGBEGDHBFBHGIFABDEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EGDBF d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 3 | 2 | 2 | 5 | 4 | 2 | 3 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | I | F | B | H | A | C | D | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 2 | 2 | 3 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EH. On ajoute une arête entre B et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

AFHIFDCEGIABHEIBE A

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :

- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
- Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
- Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
- Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AE\}, \{BI\}, \{CE\}, \{DF\}, \{FA\}, \{GE\}, \{HF\}, \{IF\}$$

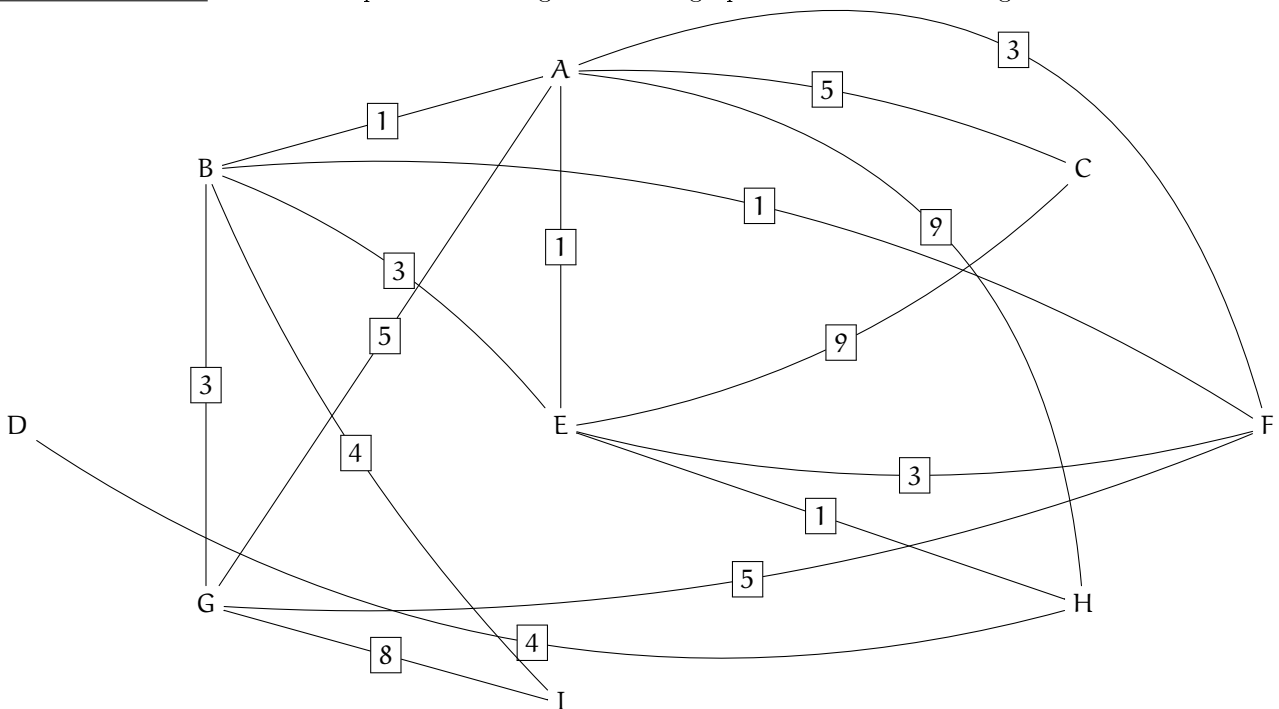
. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 5 | 0 | 1 | 3 | 5 | 9 | 0 |
| B | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 3 | 0 | 4 |
| C | 5 | 0 | 0 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| E | 1 | 3 | 9 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| F | 3 | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| G | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 8 |
| H | 9 | 0 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | 3 | 9 | | X | 3 | | 1 | |
| A | X | 1 | 5 | | X | 3 | 5 | 1 | |
| B | X | X | 5 | | X | 1 | 3 | 1 | 4 |
| F | X | X | 5 | | X | X | 3 | 1 | 4 |
| H | X | X | 5 | 4 | X | X | 3 | X | 4 |
| G | X | X | 5 | 4 | X | X | X | X | 4 |
| D | X | X | 5 | X | X | X | X | X | 4 |
| I | X | X | 5 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 5 | 2 | 1 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | E | F | G | H | C | I | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BD. On ajoute une arête entre E et G ainsi qu'une arête entre G et H. Par exemple :

AFBGEHGIBEFGACEABDHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AE\}, \{BA\}, \{CA\}, \{DH\}, \{FB\}, \{GB\}, \{HE\}, \{IB\}$

. Son poids est de 20 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{20 \times 100}{50} = 4000$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 3 | 3 | 2 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | B | C | D | A | F | G | I | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BI. On ajoute une arête entre CF. On ajoute une arête entre D et A ainsi qu'une arête entre A et G. Par exemple :

AFBHEIBGDFCIAECDEGACBDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AE\}, \{BF\}, \{CA\}, \{DE\}, \{FD\}, \{GD\}, \{HE\}, \{IE\}$

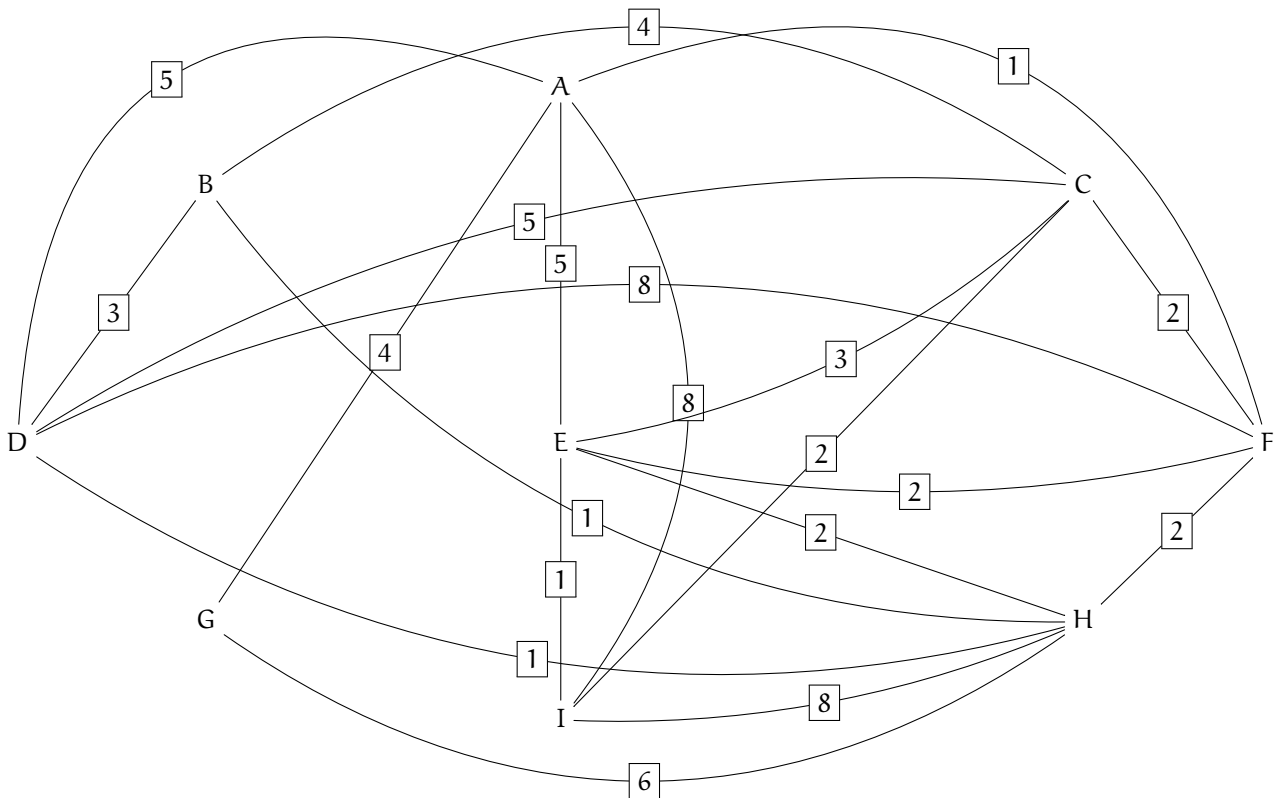
. Son poids est de 13 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{13 \times 100}{50} = 2600$ pièces d'or.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 1 | 4 | 0 | 8 |
| B | 0 | 0 | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C | 0 | 4 | 0 | 5 | 3 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| D | 5 | 3 | 5 | 0 | 0 | 8 | 0 | 1 | 0 |
| E | 5 | 0 | 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| F | 1 | 0 | 2 | 8 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| G | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| H | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 6 | 0 | 8 |
| I | 8 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 5 | | 3 | | X | 2 | | 2 | 1 |
| I | 5 | | 2 | | X | 2 | | 2 | X |
| C | 5 | 4 | X | 5 | X | 2 | | 2 | X |
| F | 1 | 4 | X | 5 | X | X | | 2 | X |
| A | X | 4 | X | 5 | X | X | 4 | 2 | X |
| H | X | 1 | X | 1 | X | X | 4 | X | X |
| B | X | X | X | 1 | X | X | 4 | X | X |
| D | X | X | X | X | X | X | 4 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | 6 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | A | C | D | E | F | I | B | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre DE. On ajoute une arête entre C et G ainsi qu'une arête entre G et F. Par exemple :

AGCIAEHFGHIECFABDEFDHBBCDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AF}, {BH}, {CI}, {DH}, {FE}, {GA}, {HE}, {IE}

. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

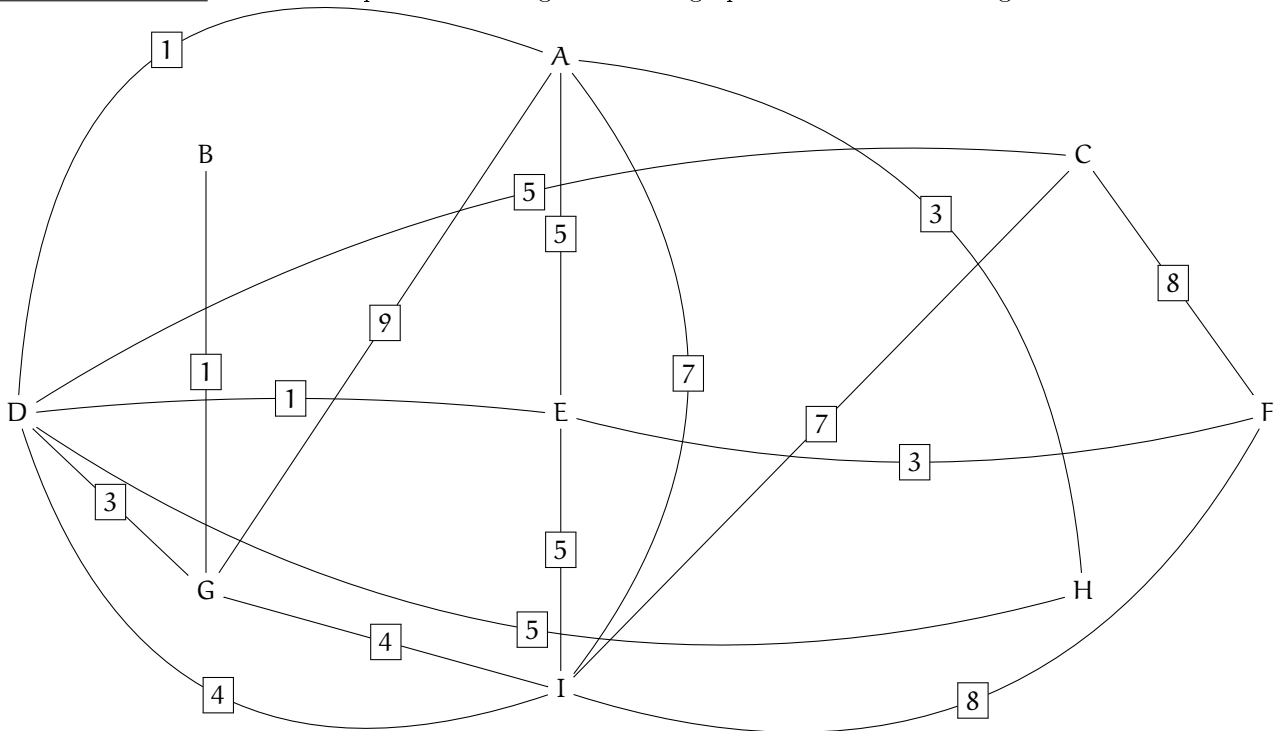
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 103

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 9 | 3 | 7 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 8 | 0 | 0 | 7 |
| D | 1 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 3 | 5 | 4 |
| E | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 5 |
| F | 0 | 0 | 8 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| G | 9 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| H | 3 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 7 | 0 | 7 | 4 | 5 | 8 | 4 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 5 | | | 1 | X | 3 | | | 5 |
| D | 1 | | 5 | X | X | 3 | 3 | 5 | 4 |
| A | X | | 5 | X | X | 3 | 3 | 3 | 4 |
| F | X | | 5 | X | X | X | 3 | 3 | 4 |
| G | X | 1 | 5 | X | X | X | X | 3 | 4 |
| B | X | X | 5 | X | X | X | X | 3 | 4 |
| H | X | X | 5 | X | X | X | X | X | 4 |
| I | X | X | 5 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 1 | 3 | 6 | 4 | 3 | 4 | 2 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | I | A | E | G | C | F | H | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre C et A ainsi qu'une arête entre A et F. Par exemple :

AFCIDHAEFIEDGIACDABGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AD\}, \{BG\}, \{CD\}, \{DE\}, \{FE\}, \{GD\}, \{HA\}, \{ID\}$

. Son poids est de 21 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{21 \times 100}{50} = 4200$ pièces d'or.

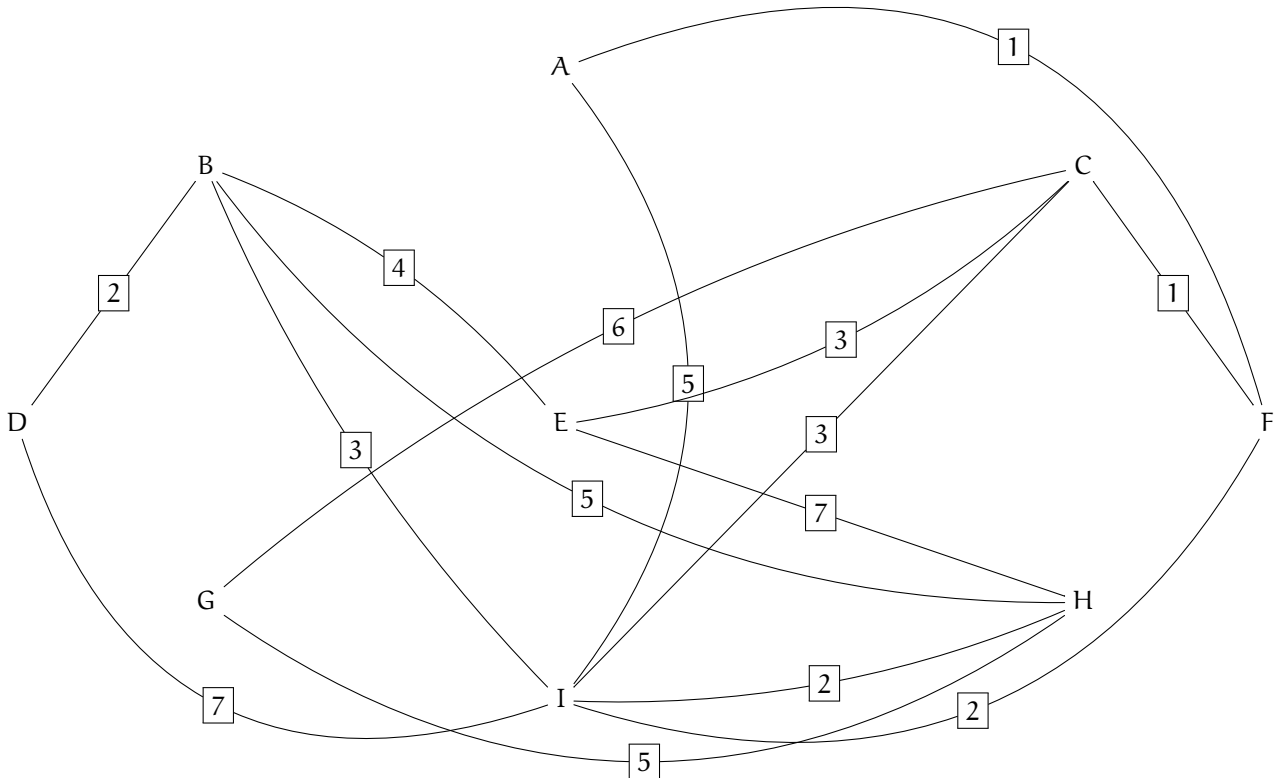
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 104

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| B | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 0 | 0 | 5 | 3 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 6 | 0 | 3 |
| D | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| E | 0 | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| F | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| G | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| H | 0 | 5 | 0 | 0 | 7 | 0 | 5 | 0 | 2 |
| I | 5 | 3 | 3 | 7 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 4 | 3 | | X | | | 7 | |
| C | | 4 | X | | X | 4 | 9 | 7 | 6 |
| B | | X | X | 6 | X | 4 | 9 | 7 | 6 |
| F | 5 | X | X | 6 | X | X | 9 | 7 | 6 |
| A | X | X | X | 6 | X | X | 9 | 7 | 6 |
| D | X | X | X | X | X | X | 9 | 7 | 6 |
| I | X | X | X | X | X | X | 9 | 7 | X |
| H | X | X | X | X | X | X | 9 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 4 | 4 | 2 | 3 | 3 | 2 | 4 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | I | B | C | H | E | F | A | D | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EF. Par exemple :

AFCGHICEBHEFIBDIA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

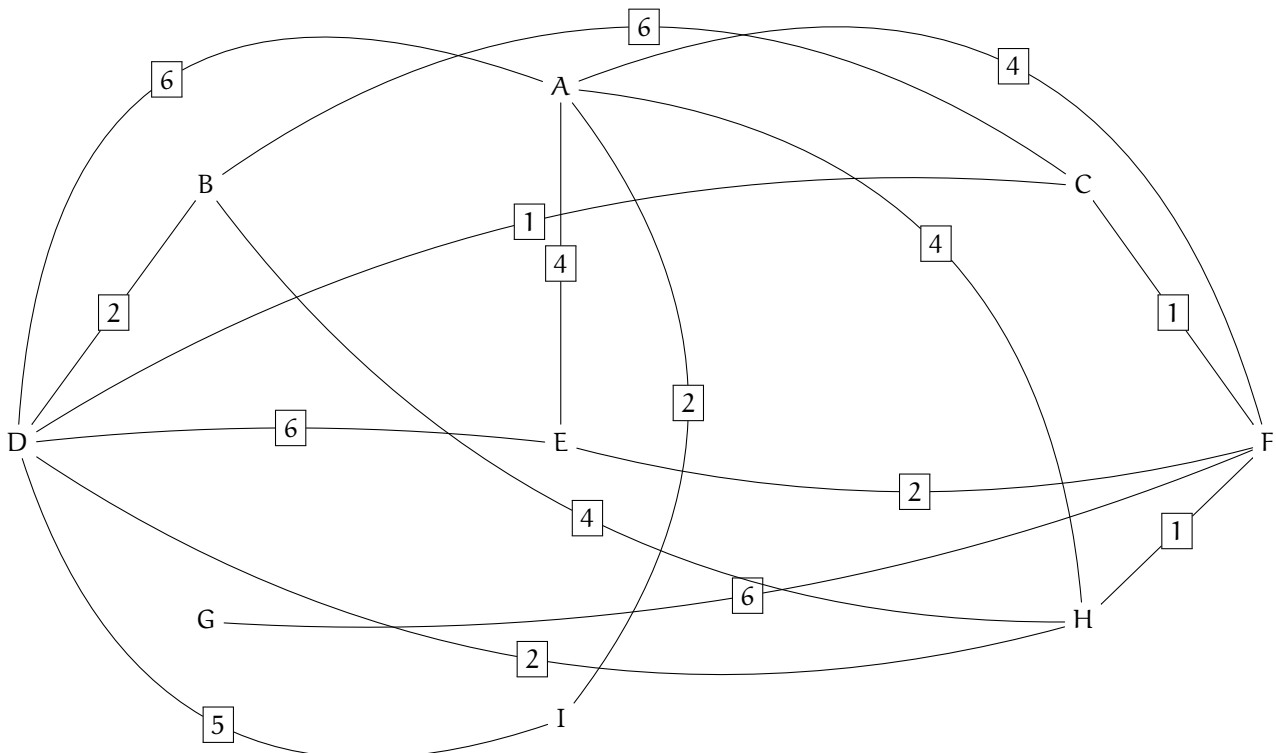
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est ECFA d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 6 | 4 | 4 | 0 | 4 | 2 |
| B | 0 | 0 | 6 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| C | 0 | 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| D | 6 | 2 | 1 | 0 | 6 | 0 | 0 | 2 | 5 |
| E | 4 | 0 | 0 | 6 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| F | 4 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 6 | 1 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| H | 4 | 4 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| I | 2 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 4 | | | 6 | X | 2 | | | |
| F | 4 | | 3 | 6 | X | X | 8 | 3 | |
| C | 4 | 9 | X | 4 | X | X | 8 | 3 | |
| H | 4 | 7 | X | 4 | X | X | 8 | X | |
| A | X | 7 | X | 4 | X | X | 8 | X | 6 |
| D | X | 6 | X | X | X | X | 8 | X | 6 |
| B | X | X | X | X | X | X | 8 | X | 6 |
| I | X | X | X | X | X | X | 8 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^+(\bullet)$ | 5 | 3 | 3 | 6 | 3 | 5 | 1 | 4 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | A | F | H | B | C | E | I | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre F et B ainsi qu'une arête entre B et G. Par exemple :

AHBDEFBGFHFDIAECFABCDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et B ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EFCD B d'une distance de 6×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{6 \times 100}{50} = 12$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 7 | 6 | 7 | 4 | 5 | 3 | 2 | 4 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | C | B | I | E | D | H | F | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | ■ |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 4 | 3 | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 4 | 3 | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 5 | 4 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EF. On ajoute une arête entre A et G ainsi qu'une arête entre G et C. Par exemple :

AHBIAFBGADCGEIHCFEDICEABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

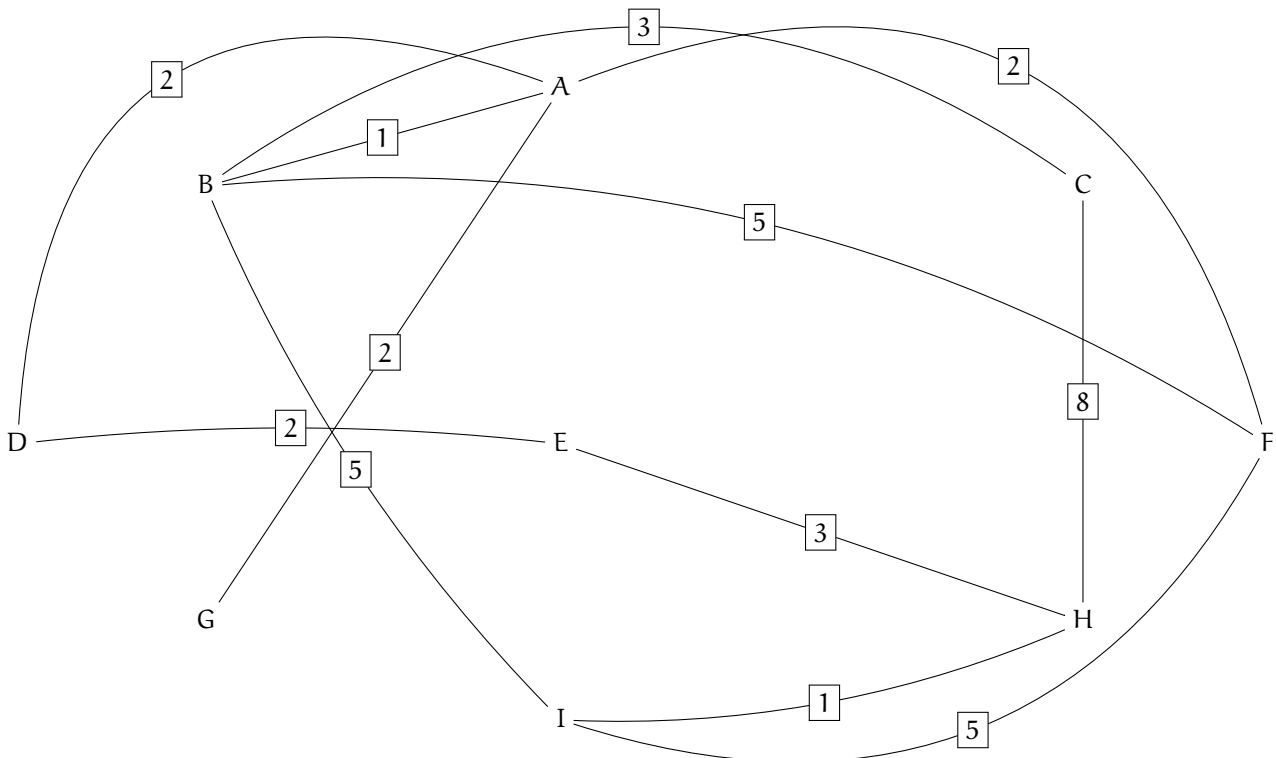
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EICF d'une distance de 4×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{4 \times 100}{50} = 8$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| B | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 |
| C | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 |
| D | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| F | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| G | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 0 | 8 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| I | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|----|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | | 2 | X | | | 3 | |
| D | 4 | | | X | X | | | 3 | |
| H | 4 | | 11 | X | X | | | X | 4 |
| A | X | 5 | 11 | X | X | 6 | 6 | X | 4 |
| I | X | 5 | 11 | X | X | 6 | 6 | X | X |
| B | X | X | 8 | X | X | 6 | 6 | X | X |
| F | X | X | 8 | X | X | X | 6 | X | X |
| G | X | X | 8 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | F | H | I | C | D | E | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 1 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 3 | 2 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre FG. On ajoute une arête entre H et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

AFBIFGADEHIA BCHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et C ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDABC d'une distance de 8×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{8 \times 100}{50} = 16$ heures.

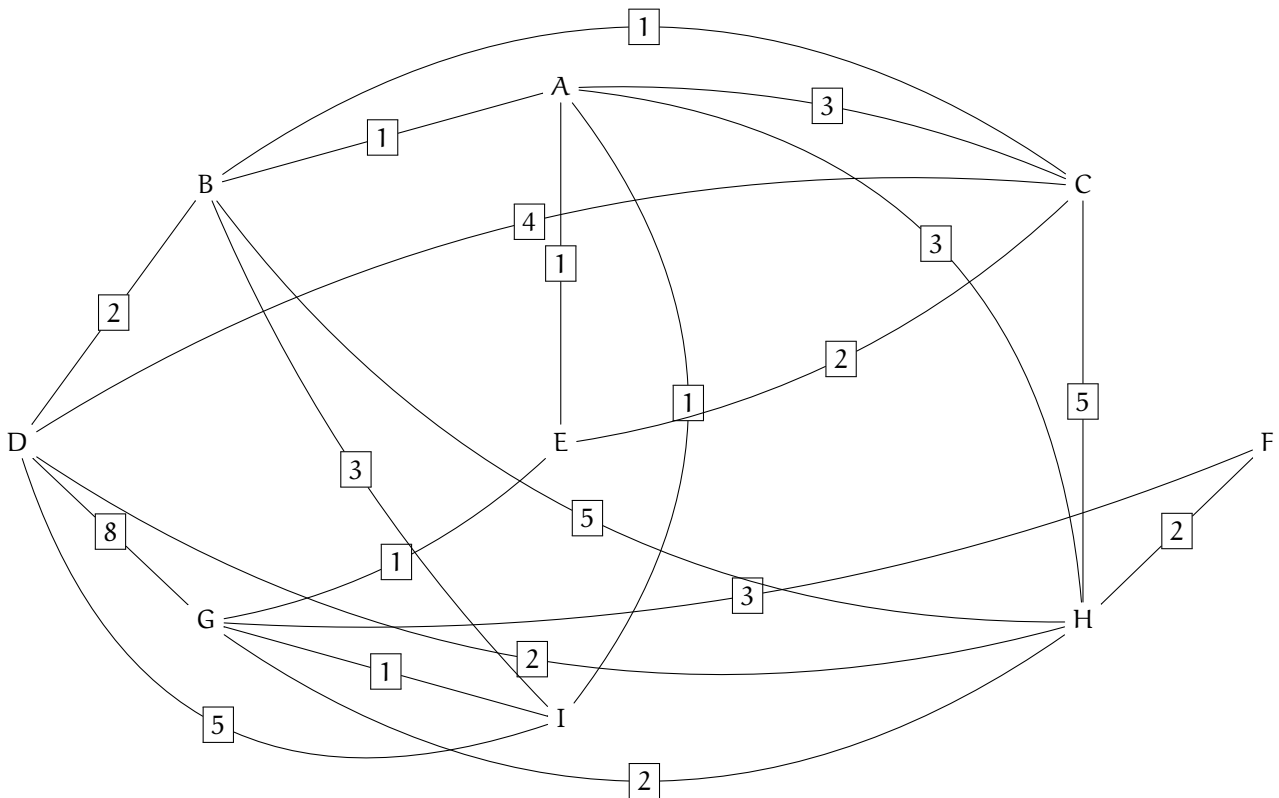
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 108

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| B | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 5 | 3 |
| C | 3 | 1 | 0 | 4 | 2 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| D | 0 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 8 | 2 | 5 |
| E | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 8 | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 |
| H | 3 | 5 | 5 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| I | 1 | 3 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | | 2 | | X | | 1 | | |
| A | X | 2 | 2 | | X | | 1 | 4 | 2 |
| G | X | 2 | 2 | 9 | X | 4 | X | 3 | 2 |
| B | X | X | 2 | 4 | X | 4 | X | 3 | 2 |
| C | X | X | X | 4 | X | 4 | X | 3 | 2 |
| I | X | X | X | 4 | X | 4 | X | 3 | X |
| H | X | X | X | 4 | X | 4 | X | X | X |
| D | X | X | X | X | X | 4 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 2 | 5 | 6 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | A | B | C | D | G | I | E | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre BE. On ajoute une arête entre CG. Par exemple :

AHBIADHGDIDBEABCEGFHCDGCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

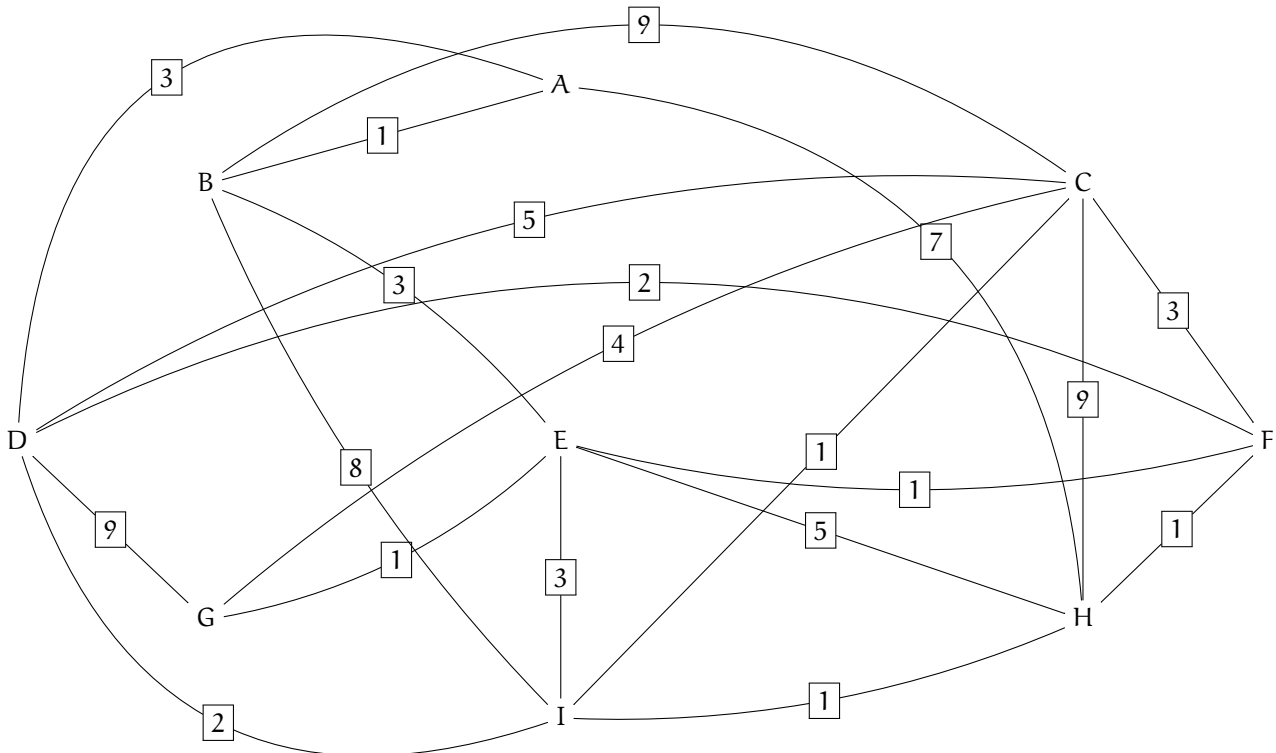
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et D ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EABD d'une distance de 4×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Conton, $\frac{4 \times 100}{50} = 8$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| B | 1 | 0 | 9 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| C | 0 | 9 | 0 | 5 | 0 | 3 | 4 | 9 | 1 |
| D | 3 | 0 | 5 | 0 | 0 | 2 | 9 | 0 | 2 |
| E | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 | 3 |
| F | 0 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| G | 0 | 0 | 4 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 7 | 0 | 9 | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| I | 0 | 8 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 3 | | | X | 1 | 1 | 5 | 3 |
| F | | 3 | 4 | 3 | X | X | 1 | 2 | 3 |
| G | | 3 | 4 | 3 | X | X | X | 2 | 3 |
| H | 9 | 3 | 4 | 3 | X | X | X | X | 3 |
| B | 4 | X | 4 | 3 | X | X | X | X | 3 |
| D | 4 | X | 4 | X | X | X | X | X | 3 |
| I | 4 | X | 4 | X | X | X | X | X | X |
| A | X | X | 4 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 4 | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 5 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | C | D | E | H | I | B | F | A | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 3 | 2 | 3 | 2 | ■ | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 2 | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AE. On ajoute une arête entre DH. On ajoute une arête entre GI. Par exemple :

AEGIEBICFDHEFHIDGCHABCD A

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EBA d'une distance de 4×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{4 \times 100}{50} = 8$ heures.

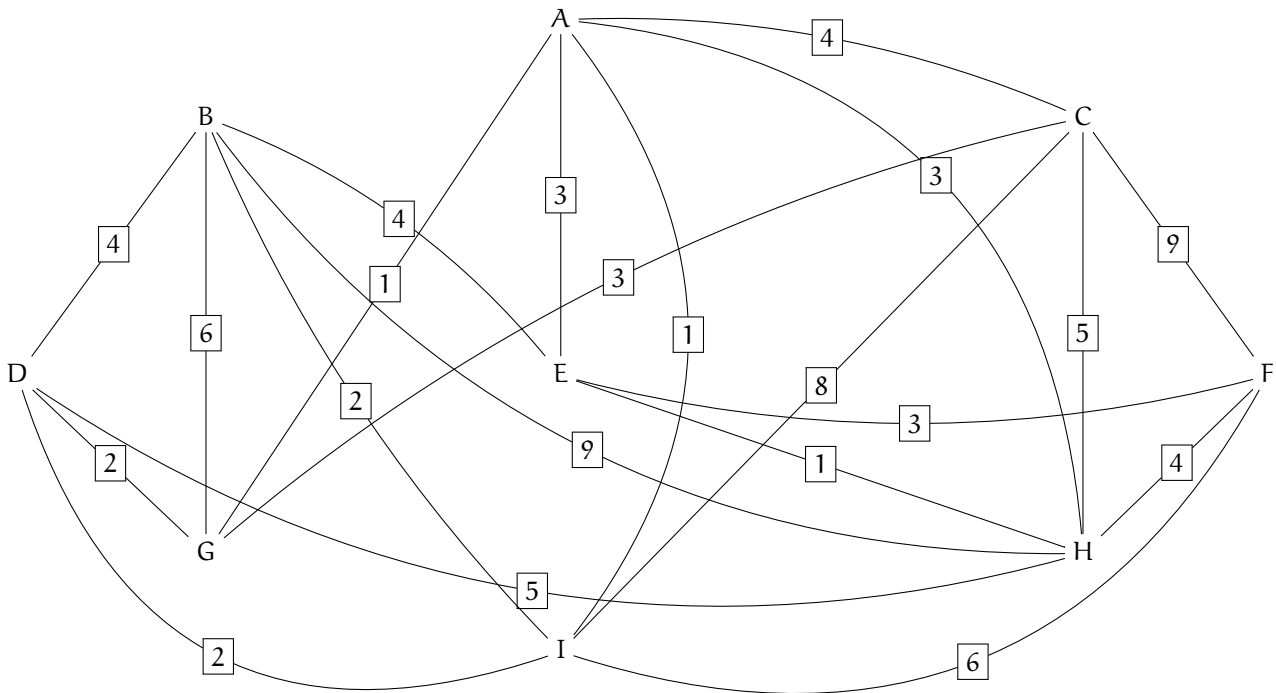
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 110

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 | 1 | 3 | 1 |
| B | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 0 | 6 | 9 | 2 |
| C | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 3 | 5 | 8 |
| D | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 5 | 2 |
| E | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| F | 0 | 0 | 9 | 0 | 3 | 0 | 0 | 4 | 6 |
| G | 1 | 6 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 3 | 9 | 5 | 5 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| I | 1 | 2 | 8 | 2 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | 4 | | | X | 3 | | 1 | |
| H | 3 | 4 | 5 | 5 | X | 3 | | X | |
| A | X | 4 | 4 | 5 | X | 3 | 1 | X | 1 |
| G | X | 4 | 3 | 2 | X | 3 | X | X | 1 |
| I | X | 2 | 3 | 2 | X | 3 | X | X | X |
| B | X | X | 3 | 2 | X | 3 | X | X | X |
| D | X | X | 3 | X | X | 3 | X | X | X |
| C | X | X | X | X | X | 3 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 6 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | A | B | C | I | D | E | F | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 2 | 4 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | 3 | 3 | ■ | 3 | 1 | 2 | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | 4 | ■ | 3 | 2 | 2 | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre C et E ainsi qu'une arête entre E et I. Par exemple :

AHBEHFIEFCHDICGBIACEABDGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AE\}, \{BI\}, \{CG\}, \{DG\}, \{FE\}, \{GA\}, \{HE\}, \{IA\}$

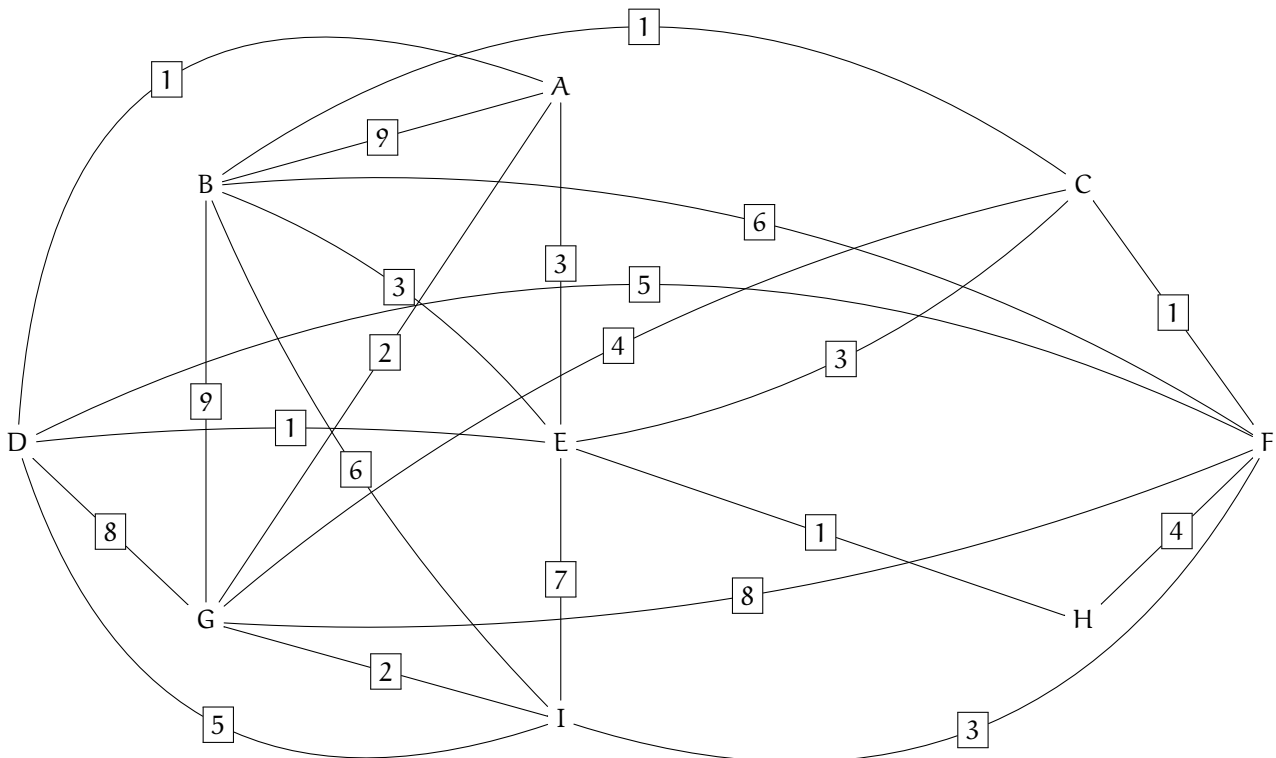
. Son poids est de 16 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{16 \times 100}{50} = 3200$ pièces d'or.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 9 | 0 | 1 | 3 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| B | 9 | 0 | 1 | 0 | 3 | 6 | 9 | 0 | 6 |
| C | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 1 | 4 | 0 | 0 |
| D | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 8 | 0 | 5 |
| E | 3 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 |
| F | 0 | 6 | 1 | 5 | 0 | 0 | 8 | 4 | 3 |
| G | 2 | 9 | 4 | 8 | 0 | 8 | 0 | 0 | 2 |
| H | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 6 | 0 | 5 | 7 | 3 | 2 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | 3 | 3 | 1 | X | | | 1 | 7 |
| D | 1 | 3 | 3 | X | X | 5 | 8 | 1 | 5 |
| A | X | 3 | 3 | X | X | 5 | 2 | 1 | 5 |
| H | X | 3 | 3 | X | X | 4 | 2 | X | 5 |
| G | X | 3 | 3 | X | X | 4 | X | X | 2 |
| I | X | 3 | 3 | X | X | 3 | X | X | X |
| B | X | X | 1 | X | X | 3 | X | X | X |
| C | X | X | X | X | X | 1 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 6 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 2 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | E | F | G | D | I | A | C | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 4 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre D et C ainsi qu'une arête entre C et I. Par exemple :

AEHFIEBGCIBFCEDGIDFGABCD A

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AD\}, \{BE\}, \{CB\}, \{DE\}, \{FC\}, \{GA\}, \{HE\}, \{IG\}$

. Son poids est de 12 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{12 \times 100}{50} = 2400$ pièces d'or.

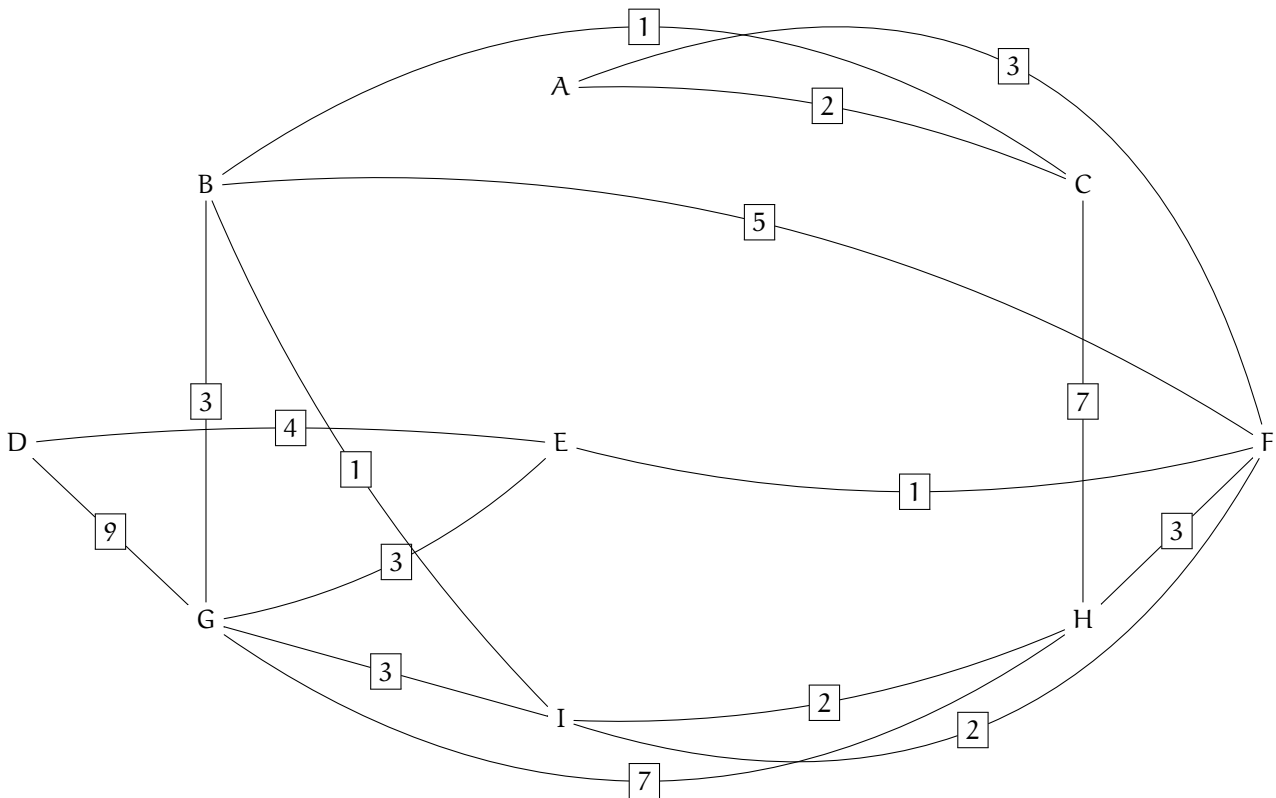
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 112

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 3 | 0 | 1 |
| C | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 9 | 0 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 |
| F | 3 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 |
| G | 0 | 3 | 0 | 9 | 3 | 0 | 0 | 7 | 3 |
| H | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 3 | 7 | 0 | 2 |
| I | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | | 4 | X | 1 | 3 | | |
| F | 4 | 6 | | 4 | X | X | 3 | 4 | 3 |
| G | 4 | 6 | | 4 | X | X | X | 4 | 3 |
| I | 4 | 4 | | 4 | X | X | X | 4 | X |
| A | X | 4 | 6 | 4 | X | X | X | 4 | X |
| B | X | X | 5 | 4 | X | X | X | 4 | X |
| D | X | X | 5 | X | X | X | X | 4 | X |
| H | X | X | 5 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 4 | 3 | 2 | 3 | 5 | 5 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | G | B | H | I | C | E | A | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

ACBGHIGDECHFEGFIBFA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

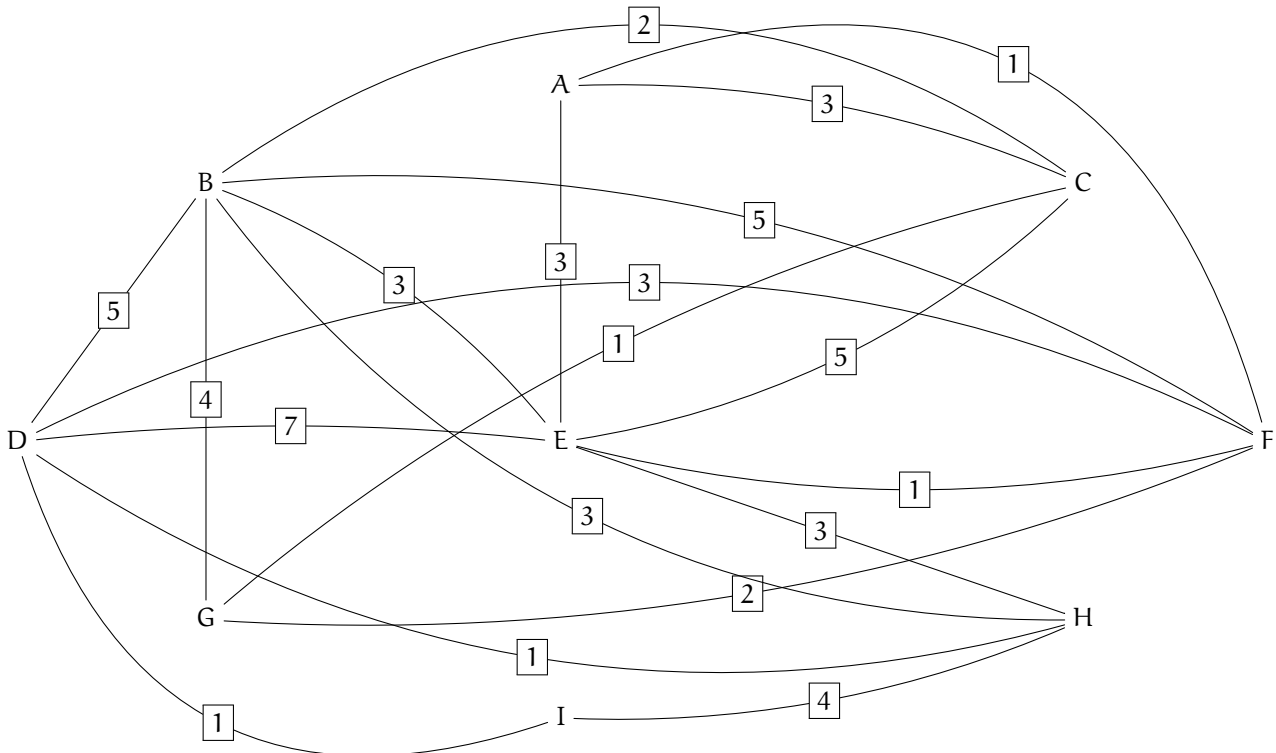
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et C ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EFIBC d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe.
 On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 2 | 5 | 3 | 5 | 4 | 3 | 0 |
| C | 3 | 2 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| D | 0 | 5 | 0 | 0 | 7 | 3 | 0 | 1 | 1 |
| E | 3 | 3 | 5 | 7 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 |
| F | 1 | 5 | 0 | 3 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| G | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 3 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| I | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |

2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | 3 | 5 | 7 | X | 1 | | 3 | |
| F | 1 | 3 | 5 | 3 | X | X | 2 | 3 | |
| A | X | 3 | 3 | 3 | X | X | 2 | 3 | |
| G | X | 3 | 1 | 3 | X | X | X | 3 | |
| C | X | 2 | X | 3 | X | X | X | 3 | |
| B | X | X | X | 3 | X | X | X | 3 | |
| D | X | X | X | X | X | X | X | 1 | 1 |
| H | X | X | X | X | X | X | X | X | 1 |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 6 | 4 | 5 | 6 | 5 | 3 | 4 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | E | D | F | C | H | A | G | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 3 | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre F et H ainsi qu'une arête entre H et G. Par exemple :

AEBGCEDHFGHIDFEHBFACBDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AF}, {BC}, {CG}, {DF}, {FE}, {GF}, {HD}, {ID}

. Son poids est de 12 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{12 \times 100}{50} = 2400$ pièces d'or.

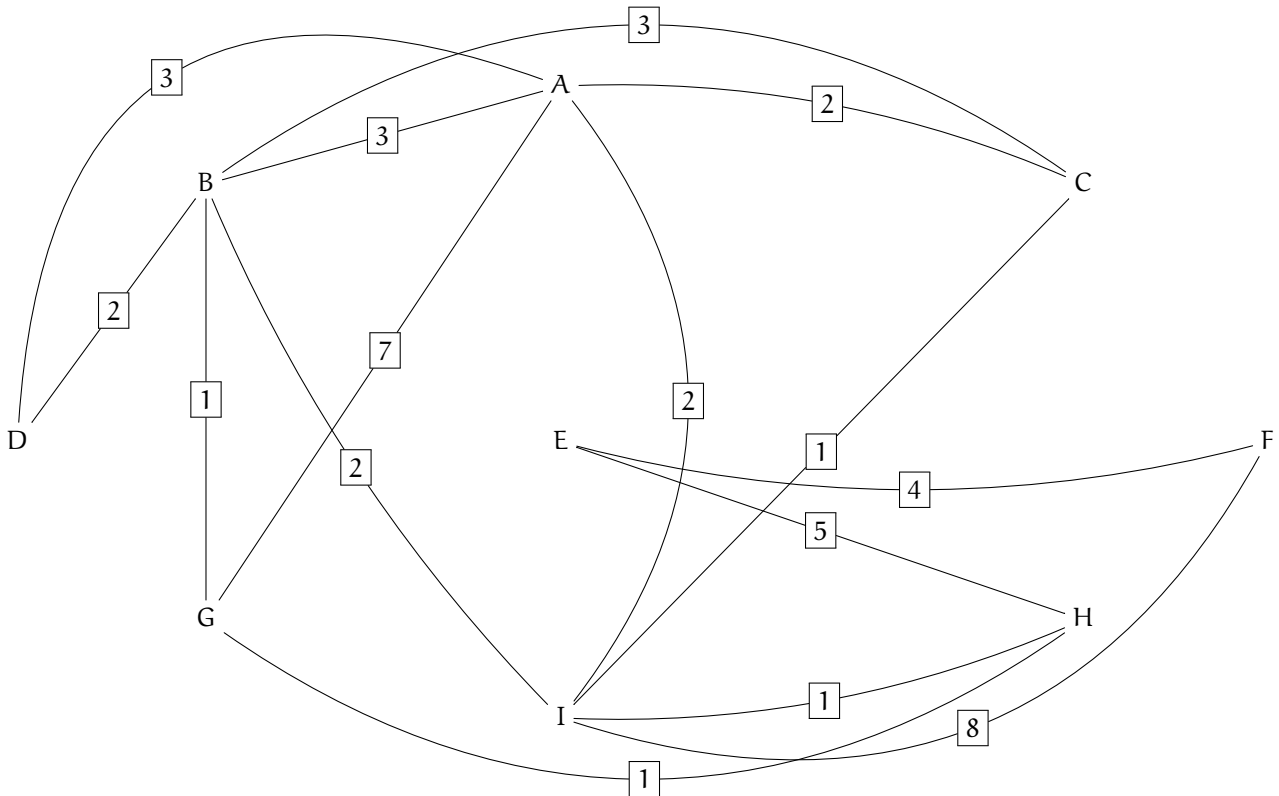
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 114

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 2 | 3 | 0 | 0 | 7 | 0 | 2 |
| B | 3 | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| C | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| D | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 5 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| G | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| H | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| I | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 8 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|----|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | | | X | 4 | | 5 | |
| F | | | | | X | X | | 5 | 12 |
| H | | | | | X | X | 6 | X | 6 |
| G | 13 | 7 | | | X | X | X | X | 6 |
| I | 8 | 7 | 7 | | X | X | X | X | X |
| B | 8 | X | 7 | 9 | X | X | X | X | X |
| C | 8 | X | X | 9 | X | X | X | X | X |
| A | X | X | X | 9 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 5 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | I | C | G | H | D | E | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AH. On ajoute une arête entre CG. On ajoute une arête entre B et E ainsi qu'une arête entre E et I. Par exemple :

AGBICGHADBEHIEFIABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et D ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EHGBD d'une distance de 9×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{9 \times 100}{50} = 18$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 1 | 3 | 4 | 3 | 4 | 6 | 5 | 2 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | G | C | E | B | D | H | I | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 3 | ■ | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | 2 | ■ | 2 | ■ | ■ | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre DG. Par exemple :

ABCFEGFHGIEDGCDBFA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île I et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et I ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EFGI d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

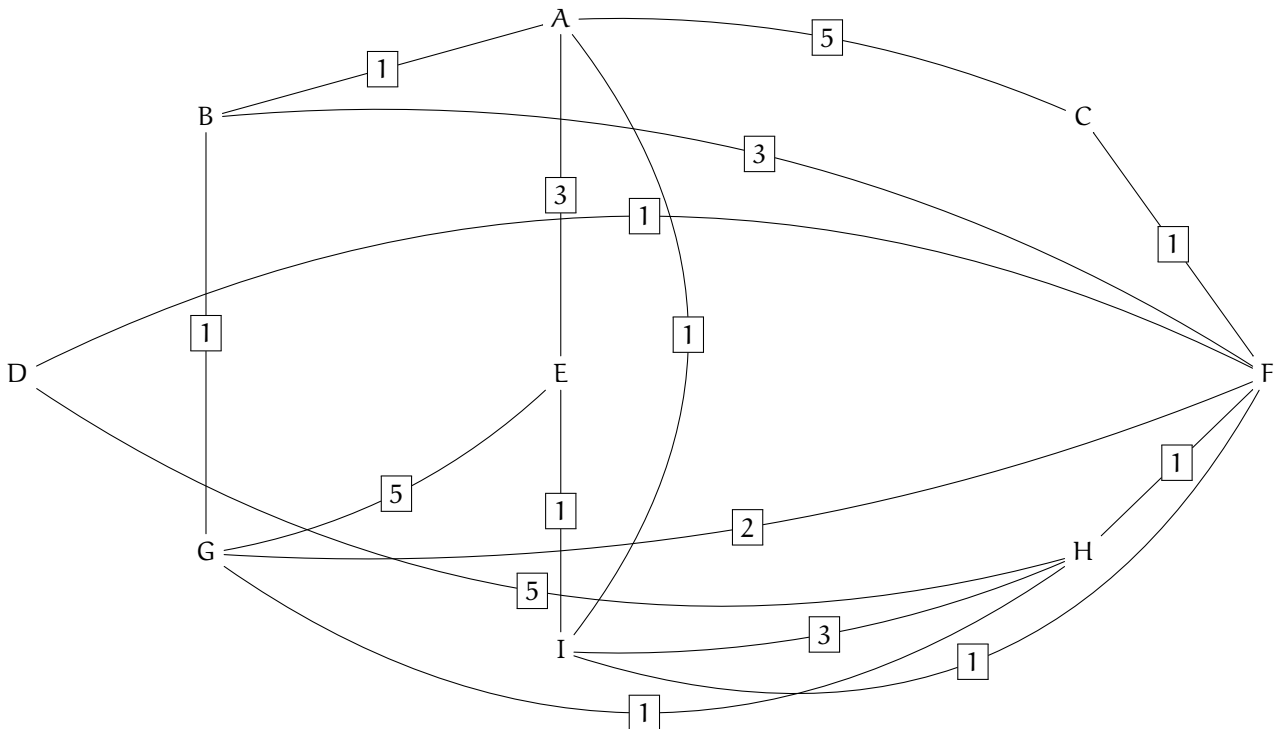
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 116

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 5 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| B | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| C | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 0 |
| E | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 |
| F | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| G | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| H | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| I | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | | | | X | | 5 | | 1 |
| I | 1 | | | | X | 1 | 5 | 3 | X |
| A | X | 1 | 5 | | X | 1 | 5 | 3 | X |
| B | X | X | 5 | | X | 1 | 1 | 3 | X |
| F | X | X | 1 | 1 | X | X | 1 | 1 | X |
| C | X | X | X | 1 | X | X | 1 | 1 | X |
| D | X | X | X | X | X | X | 1 | 1 | X |
| G | X | X | X | X | X | X | X | 1 | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 6 | 4 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | A | G | H | I | B | E | C | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 1 | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BE. Par exemple :

DFHIFGHDCFBGEIABEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AI\}, \{BA\}, \{CF\}, \{DF\}, \{FI\}, \{GB\}, \{HF\}, \{IE\}$$

. Son poids est de 8 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{8 \times 100}{50} = 1600$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 4 | 3 | 4 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | D | I | C | F | H | E | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | ■ | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 1 | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AH. On ajoute une arête entre CF. Par exemple :

AGHAEBIDFIHDCFABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EBCAF d'une distance de 11×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{11 \times 100}{50} = 22$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 6 | 4 | 6 | 7 | 3 | 5 | 2 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | A | B | D | G | I | C | F | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | ■ |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 3 | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 5 | 2 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre FG. On ajoute une arête entre E et H ainsi qu'une arête entre H et I. Par exemple :

AGBIAEHIEBFDCGEGFICEDHABDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et H ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EADH d'une distance de 6×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{6 \times 100}{50} = 12$ heures.

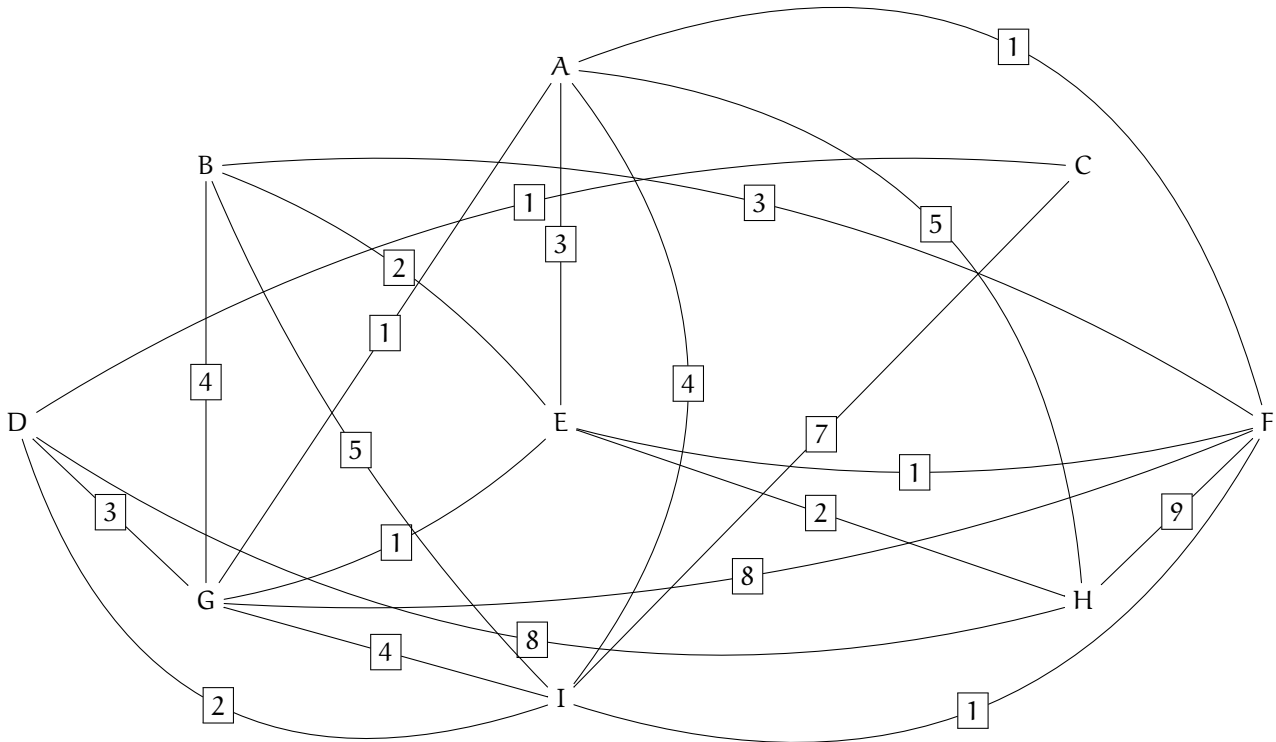
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 119

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe.
 On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 | 5 | 4 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 4 | 0 | 5 |
| C | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| D | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 8 | 2 |
| E | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| F | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 9 | 1 |
| G | 1 | 4 | 0 | 3 | 1 | 8 | 0 | 0 | 4 |
| H | 5 | 0 | 0 | 8 | 2 | 9 | 0 | 0 | 0 |
| I | 4 | 5 | 7 | 2 | 0 | 1 | 4 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | 2 | | | X | 1 | 1 | 2 | |
| F | 1 | 2 | | | X | X | 1 | 2 | 1 |
| A | X | 2 | | | X | X | 1 | 2 | 1 |
| G | X | 2 | | 3 | X | X | X | 2 | 1 |
| I | X | 2 | 7 | 2 | X | X | X | 2 | X |
| B | X | X | 7 | 2 | X | X | X | 2 | X |
| D | X | X | 1 | X | X | X | X | 2 | X |
| C | X | X | X | X | X | X | X | 2 | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 4 | 2 | 4 | 5 | 6 | 6 | 4 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | G | I | A | E | B | D | H | C |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 1 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre A et C ainsi qu'une arête entre C et E. Par exemple :

AHDI AEF G I F H E B G E C I B F A C D G A

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AF\}, \{BE\}, \{CD\}, \{DI\}, \{FE\}, \{GE\}, \{HE\}, \{IF\}$$

. Son poids est de 11 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{11 \times 100}{50} = 2200$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 1 | 4 | 4 | 5 | 4 | 3 | 6 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | E | I | A | C | D | F | G | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BE. On ajoute une arête entre GI. Par exemple :

AHCEGIAEBFHIFCDHEIDGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AH\}, \{BF\}, \{CD\}, \{DI\}, \{FH\}, \{GE\}, \{HI\}, \{IE\}$$

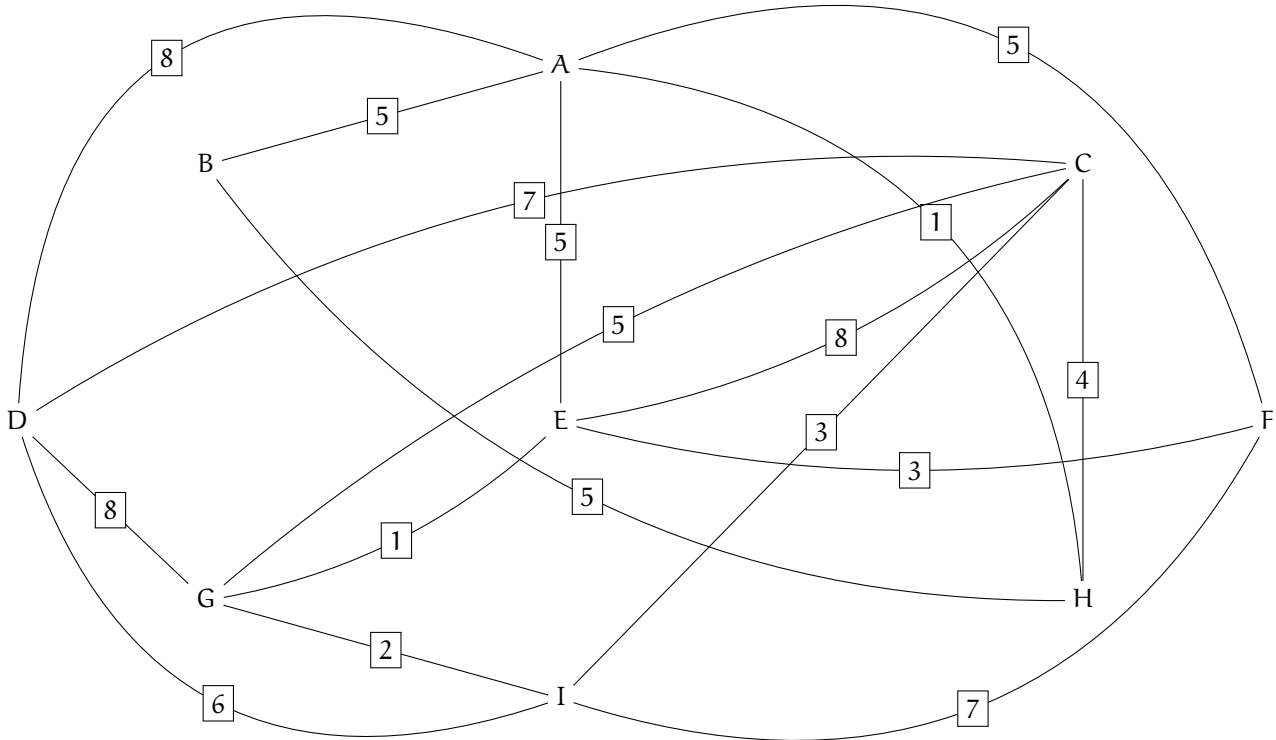
. Son poids est de 9 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{9 \times 100}{50} = 1800$ pièces d'or.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0,5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 5 | 0 | 8 | 5 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| B | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 7 | 8 | 0 | 5 | 4 | 3 |
| D | 8 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 6 |
| E | 5 | 0 | 8 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| F | 5 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| G | 0 | 0 | 5 | 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| H | 1 | 5 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 3 | 6 | 0 | 7 | 2 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|----|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 5 | | 8 | | X | 3 | 1 | | |
| G | 5 | | 6 | 9 | X | 3 | X | | 3 |
| F | 5 | | 6 | 9 | X | X | X | | 3 |
| I | 5 | | 6 | 9 | X | X | X | | X |
| A | X | 10 | 6 | 9 | X | X | X | 6 | X |
| C | X | 10 | X | 9 | X | X | X | 6 | X |
| H | X | 10 | X | 9 | X | X | X | X | X |
| D | X | 10 | X | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 2 | 5 | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | C | D | E | G | I | F | H | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | □ | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | □ | □ | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | □ | □ | ■ | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | □ | □ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | □ | □ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | □ | □ | ■ | ■ | ■ | □ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AC. On ajoute une arête entre FH. Par exemple :

AEFIGECGDICHFACDABHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliées par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et B ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EAB d'une distance de 10×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{10 \times 100}{50} = 20$ heures.

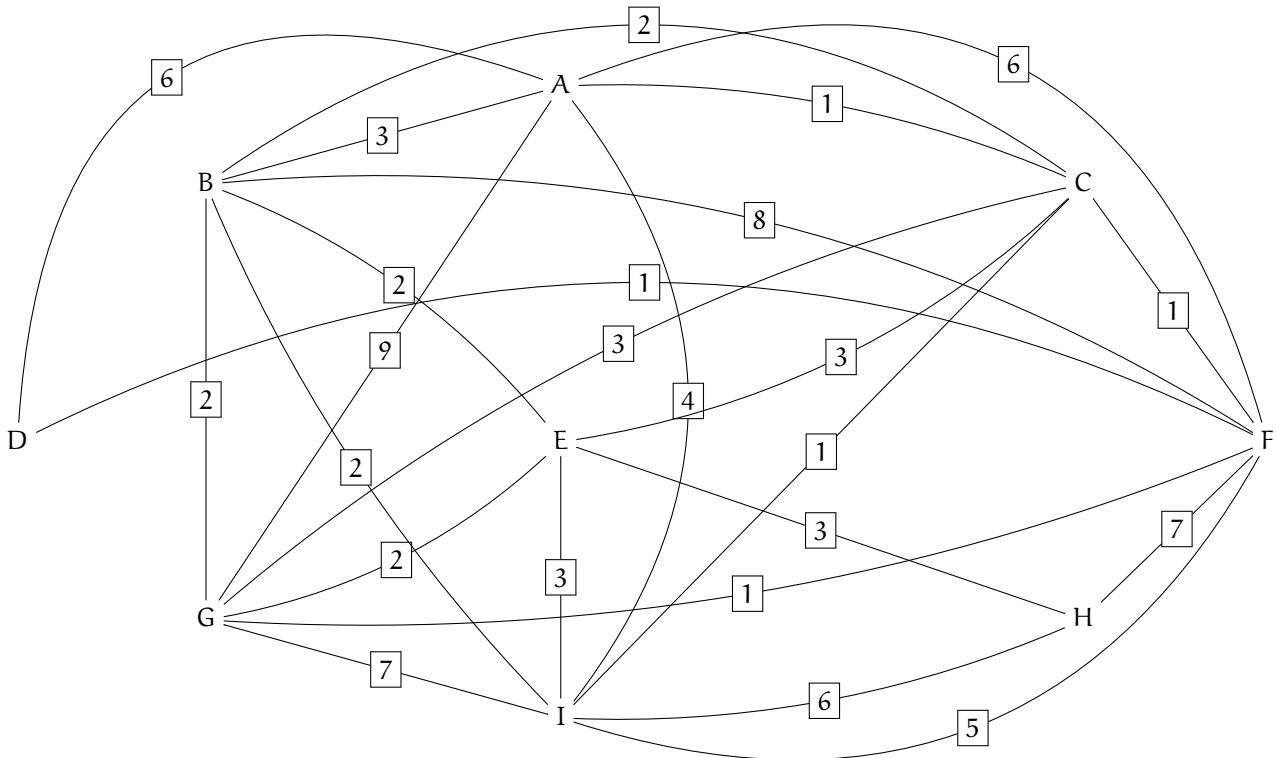
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 122

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 1 | 6 | 0 | 6 | 9 | 0 | 4 |
| B | 3 | 0 | 2 | 0 | 2 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| C | 1 | 2 | 0 | 0 | 3 | 1 | 3 | 0 | 1 |
| D | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| E | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 3 |
| F | 6 | 8 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 7 | 5 |
| G | 9 | 2 | 3 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 |
| H | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 7 | 0 | 0 | 6 |
| I | 4 | 2 | 1 | 0 | 3 | 5 | 7 | 6 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|----|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 2 | 3 | | X | | 2 | 3 | 3 |
| B | 5 | X | 3 | | X | 10 | 2 | 3 | 3 |
| G | 5 | X | 3 | | X | 3 | X | 3 | 3 |
| C | 4 | X | X | | X | 3 | X | 3 | 3 |
| F | 4 | X | X | 4 | X | X | X | 3 | 3 |
| H | 4 | X | X | 4 | X | X | X | X | 3 |
| I | 4 | X | X | 4 | X | X | X | X | X |
| A | X | X | X | 4 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 6 | 6 | 2 | 5 | 7 | 6 | 3 | 7 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | F | I | A | B | C | G | E | H | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 3 | 3 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 4 | 4 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ | 5 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | 5 | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 6 | 3 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 6 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 6. De plus on observe que \mathcal{K}_6 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 6. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 6.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EF. On ajoute une arête entre H et D ainsi qu'une arête entre D et I. Par exemple :

AGBECGEFHIFGICFBIADHEIDFABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliées par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 6. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 6 (couleur 6)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île D et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

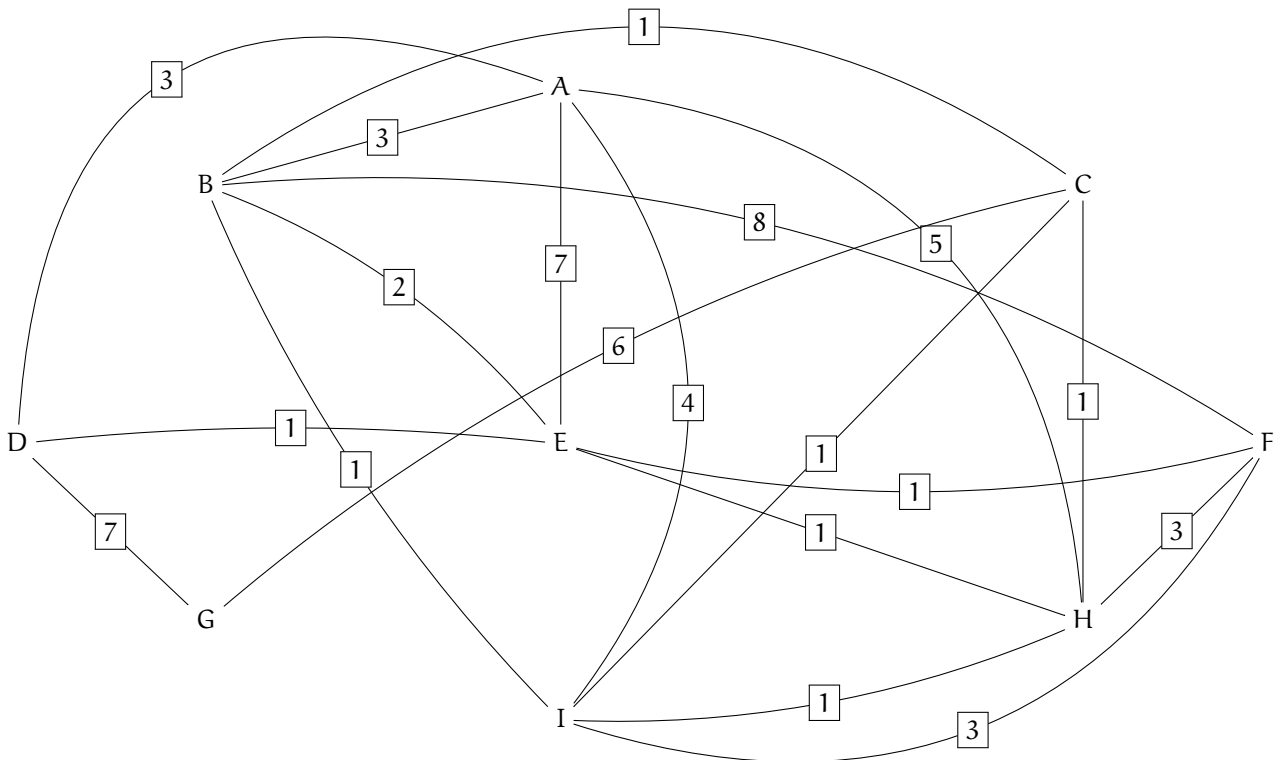
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et D ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EGF D d'une distance de 4×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{4 \times 100}{50} = 8$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 0 | 3 | 7 | 0 | 0 | 5 | 4 |
| B | 3 | 0 | 1 | 0 | 2 | 8 | 0 | 0 | 1 |
| C | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1 | 1 |
| D | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 7 | 0 | 0 |
| E | 7 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| F | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 3 |
| G | 0 | 0 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| I | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 7 | 2 | | 1 | X | 1 | | 1 | |
| D | 3 | 2 | | X | X | 1 | 7 | 1 | |
| F | 3 | 2 | | X | X | X | 7 | 1 | 3 |
| H | 3 | 2 | 1 | X | X | X | 7 | X | 1 |
| C | 3 | 1 | X | X | X | X | 6 | X | 1 |
| B | 3 | X | X | X | X | X | 6 | X | 1 |
| I | 3 | X | X | X | X | X | 6 | X | X |
| A | X | X | X | X | X | X | 6 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 5 | 4 | 3 | 5 | 4 | 2 | 5 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | E | H | I | C | F | D | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | ■ | 4 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | 2 | 3 | 3 | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | 3 | 4 | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | 4 | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BD. On ajoute une arête entre EI. On ajoute une arête entre A et G ainsi qu'une arête entre G et H. Par exemple :

AHCIADBFHIFEDGHEIBEABCGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AD\}, \{BC\}, \{CH\}, \{DE\}, \{FE\}, \{GC\}, \{HE\}, \{IH\}$

. Son poids est de 15 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{15 \times 100}{50} = 3000$ pièces d'or.

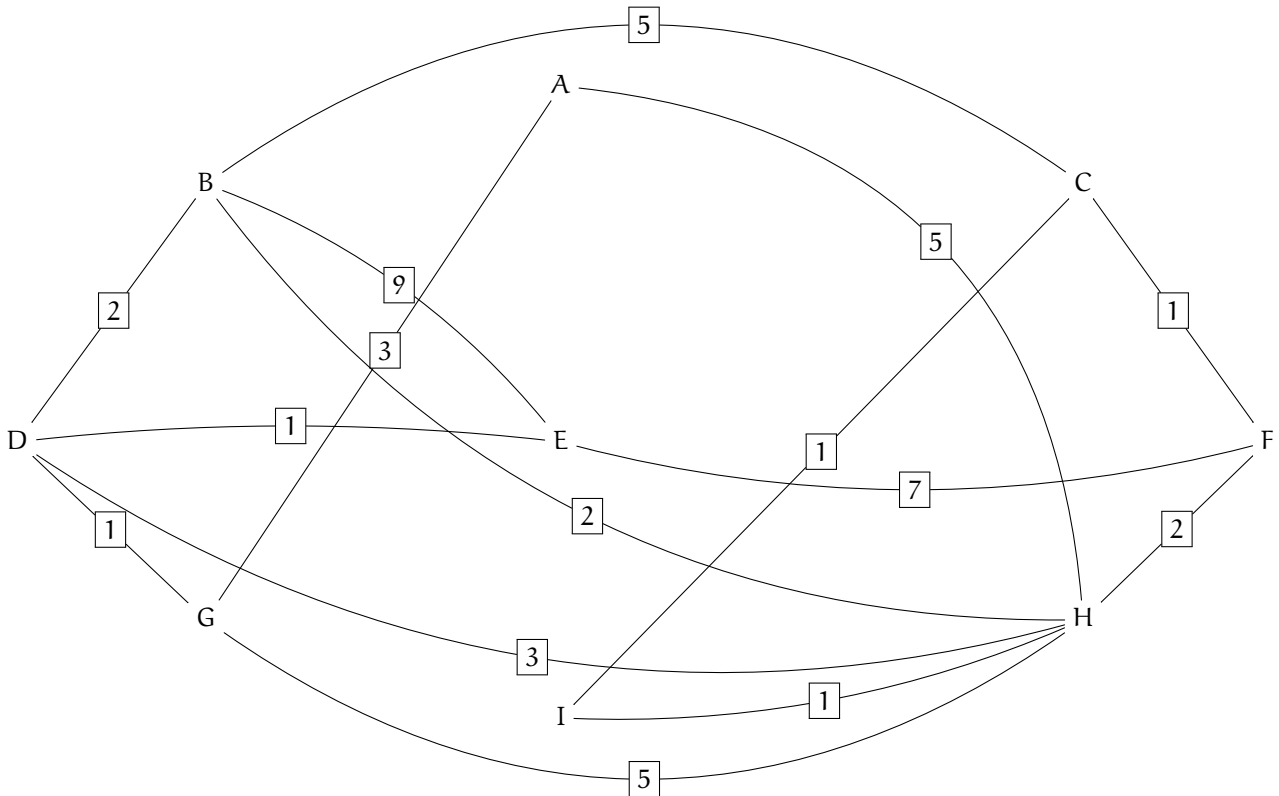
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 124

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 5 | 0 |
| B | 0 | 0 | 5 | 2 | 9 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| C | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| D | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0 |
| E | 0 | 9 | 0 | 1 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 1 | 0 | 7 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| G | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| H | 5 | 2 | 0 | 3 | 0 | 2 | 5 | 0 | 1 |
| I | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 9 | | 1 | X | 7 | | | |
| D | | 3 | | X | X | 7 | 2 | 4 | |
| G | 5 | 3 | | X | X | 7 | X | 4 | |
| B | 5 | X | 8 | X | X | 7 | X | 4 | |
| H | 5 | X | 8 | X | X | 6 | X | X | 5 |
| A | X | X | 8 | X | X | 6 | X | X | 5 |
| I | X | X | 6 | X | X | 6 | X | X | X |
| C | X | X | X | X | X | 6 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 4 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | 6 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | B | D | C | E | F | G | A | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | ■ | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | 2 | ■ | ■ | 3 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 3 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

AGDBCFCEDHFGHICEBHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et C ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDHC d'une distance de 6×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{6 \times 100}{50} = 12$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 5 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | I | H | B | D | E | C | G | A | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre DE. On ajoute une arête entre FH. Par exemple :

CHDICBEFHIEDGHBIA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AI\}, \{BE\}, \{CI\}, \{DI\}, \{FE\}, \{GD\}, \{HG\}, \{IE\}$$

. Son poids est de 16 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{16 \times 100}{50} = 3200$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 6 | 7 | 6 | 4 | 4 | 3 | 1 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | C | B | D | A | E | F | G | I | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 5 | 4 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AG. On ajoute une arête entre CH. Par exemple :

AECDEFADBHCDFDGCIBGABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et G ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDCG d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

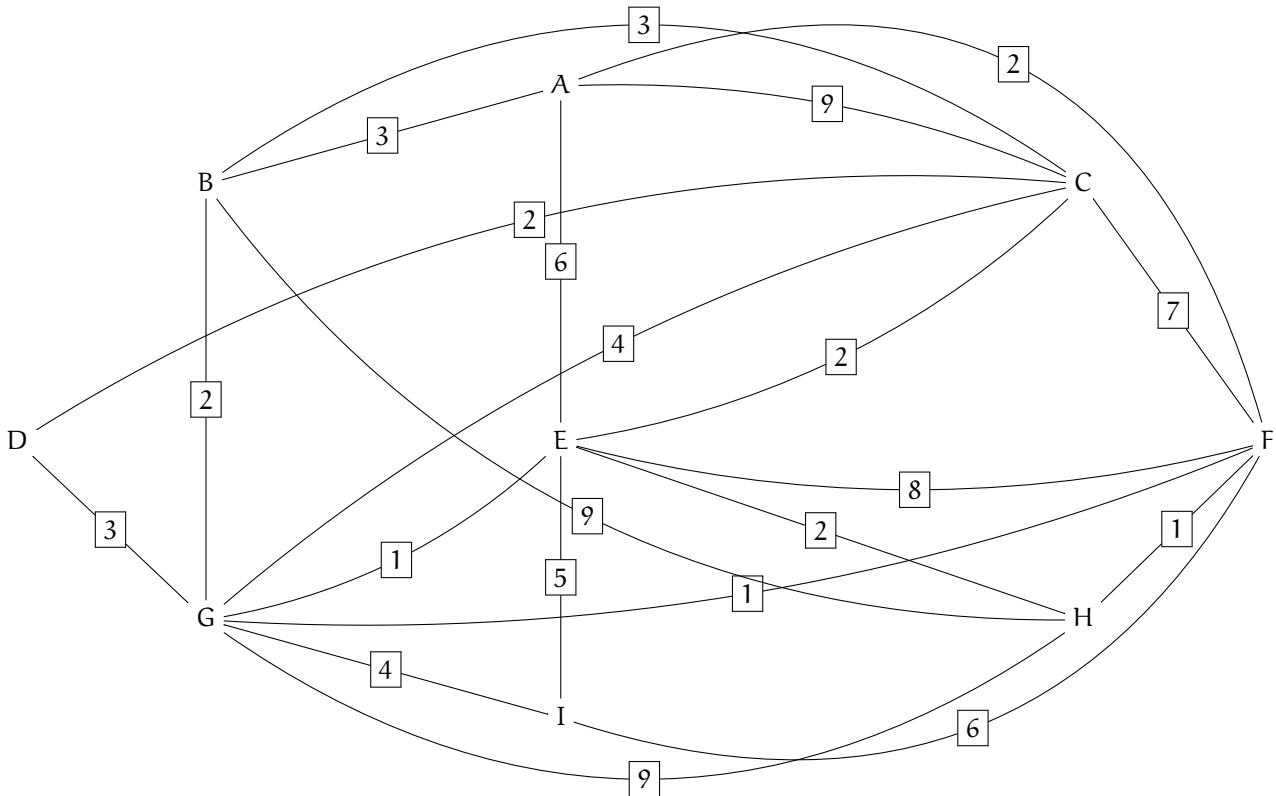
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 127

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 9 | 0 | 6 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| B | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 2 | 9 | 0 |
| C | 9 | 3 | 0 | 2 | 2 | 7 | 4 | 0 | 0 |
| D | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| E | 6 | 0 | 2 | 0 | 0 | 8 | 1 | 2 | 5 |
| F | 2 | 0 | 7 | 0 | 8 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| G | 0 | 2 | 4 | 3 | 1 | 1 | 0 | 9 | 4 |
| H | 0 | 9 | 0 | 0 | 2 | 1 | 9 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 6 | 4 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 6 | | 2 | | X | 8 | 1 | 2 | 5 |
| G | 6 | 2 | 2 | 3 | X | 1 | X | 2 | 4 |
| F | 2 | 2 | 2 | 3 | X | X | X | 1 | 4 |
| H | 2 | 2 | 2 | 3 | X | X | X | X | 4 |
| A | X | 2 | 2 | 3 | X | X | X | X | 4 |
| B | X | X | 2 | 3 | X | X | X | X | 4 |
| C | X | X | X | 2 | X | X | X | X | 4 |
| D | X | X | X | X | X | X | X | X | 4 |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 4 | 6 | 2 | 6 | 6 | 7 | 4 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | G | C | E | F | A | B | H | I | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 6 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 3 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre G et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

AFHGIFCGBHEFGIEAECGDABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

{AF}, {BG}, {CE}, {DC}, {FG}, {GE}, {HF}, {IG}

. Son poids est de 15 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{15 \times 100}{50} = 3000$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 4 | 3 | 6 | 6 | 4 | 5 | 3 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | E | A | G | B | F | I | C | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 3 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 1 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 2 | 4 | 1 | 4 | 4 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AG. On ajoute une arête entre CH. Par exemple :

AFHGIFGACDGEIDEABECHBDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 4, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AB\}, \{BE\}, \{CA\}, \{DE\}, \{FA\}, \{GD\}, \{HB\}, \{IE\}$

. Son poids est de 10 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{10 \times 100}{50} = 2000$ pièces d'or.

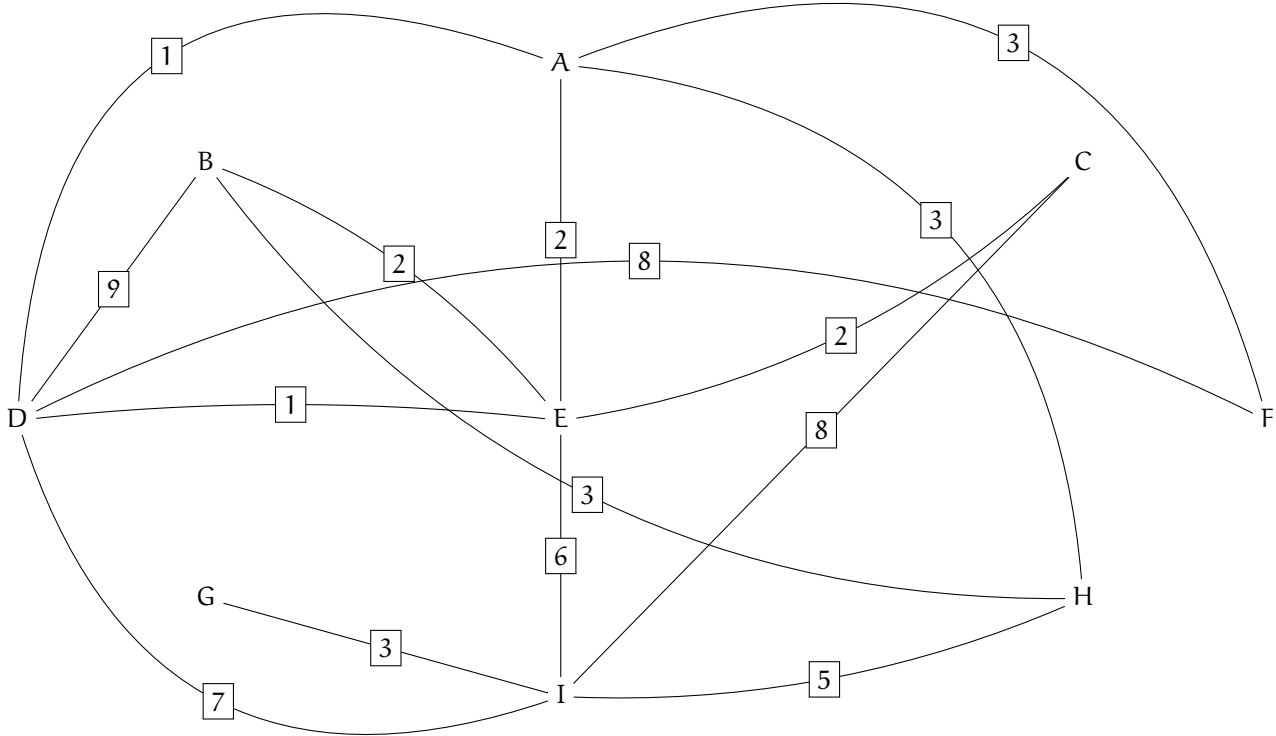
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 129

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 9 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| D | 1 | 9 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | 0 | 7 |
| E | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| F | 3 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| H | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| I | 0 | 0 | 8 | 7 | 6 | 0 | 3 | 5 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 2 | 2 | 2 | 1 | X | | | | 6 |
| D | 2 | 2 | 2 | X | X | 9 | | | 6 |
| A | X | 2 | 2 | X | X | 5 | | 5 | 6 |
| B | X | X | 2 | X | X | 5 | | 5 | 6 |
| C | X | X | X | X | X | 5 | | 5 | 6 |
| F | X | X | X | X | X | X | | 5 | 6 |
| H | X | X | X | X | X | X | | X | 6 |
| I | X | X | X | X | X | X | 9 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 3 | 2 | 5 | 5 | 2 | 1 | 3 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | E | I | A | B | H | C | F | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BG. On ajoute une arête entre DH. On ajoute une arête entre E et F ainsi qu'une arête entre F et I. Par exemple :

AFDECIDHADBGIEFIHBEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 4 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EAF d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 7 | 6 | 7 | 3 | 3 | 6 | 4 | 3 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | C | B | F | I | G | D | E | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | 2 | ■ | 3 | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 3 | 3 | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 4 | 5 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre EH. On ajoute une arête entre BI. On ajoute une arête entre DG. On ajoute une arête entre CD. On ajoute une arête entre GI. Par exemple :

AGBIAFGIFBEHADCHDICFDGCEABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

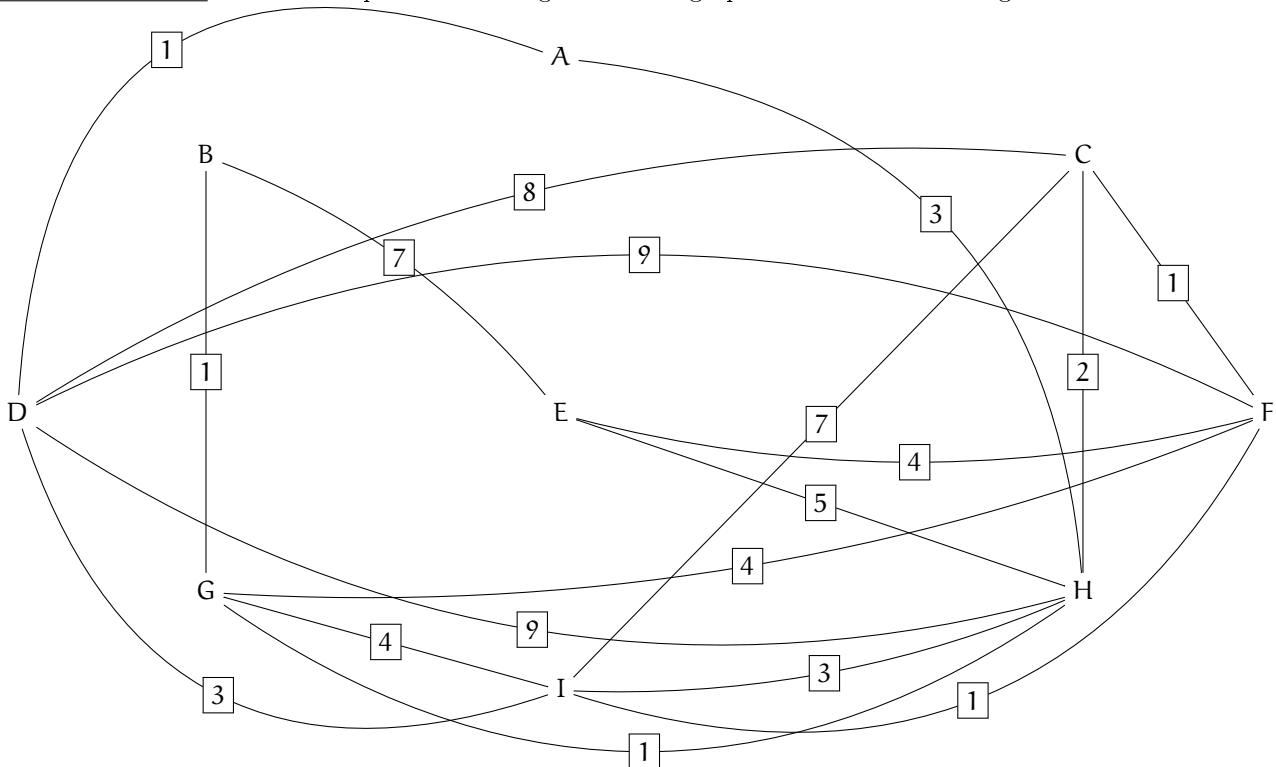
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et H ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EAFDH d'une distance de 6×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{6 \times 100}{50} = 12$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 1 | 0 | 2 | 7 |
| D | 1 | 0 | 8 | 0 | 0 | 9 | 0 | 9 | 3 |
| E | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 5 | 0 |
| F | 0 | 0 | 1 | 9 | 4 | 0 | 4 | 0 | 1 |
| G | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 1 | 4 |
| H | 3 | 0 | 2 | 9 | 5 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| I | 0 | 0 | 7 | 3 | 0 | 1 | 4 | 3 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 7 | | | X | 4 | | 5 | |
| F | | 7 | 1 | 9 | X | X | 4 | 5 | 1 |
| C | | 7 | X | 8 | X | X | 4 | 2 | 1 |
| I | | 7 | X | 3 | X | X | 4 | 2 | X |
| H | 3 | 7 | X | 3 | X | X | 1 | X | X |
| G | 3 | 1 | X | 3 | X | X | X | X | X |
| B | 3 | X | X | 3 | X | X | X | X | X |
| A | X | X | X | 1 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 2 | 4 | 5 | 3 | 5 | 4 | 6 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | D | F | I | C | G | E | A | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 2 | 2 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre DE. On ajoute une arête entre F et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

BEDFEHDIFGHIBHBCIADCFA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AH\}, \{BG\}, \{CF\}, \{DA\}, \{FE\}, \{GH\}, \{HC\}, \{IF\}$

. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 4 | 5 | 3 | 6 | 5 | 4 | 6 | 1 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | H | C | F | A | B | G | D | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 1 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre CI. On ajoute une arête entre DF. Par exemple :

AFGHFCEDFEHADCBGCIHBEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDA d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Conton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

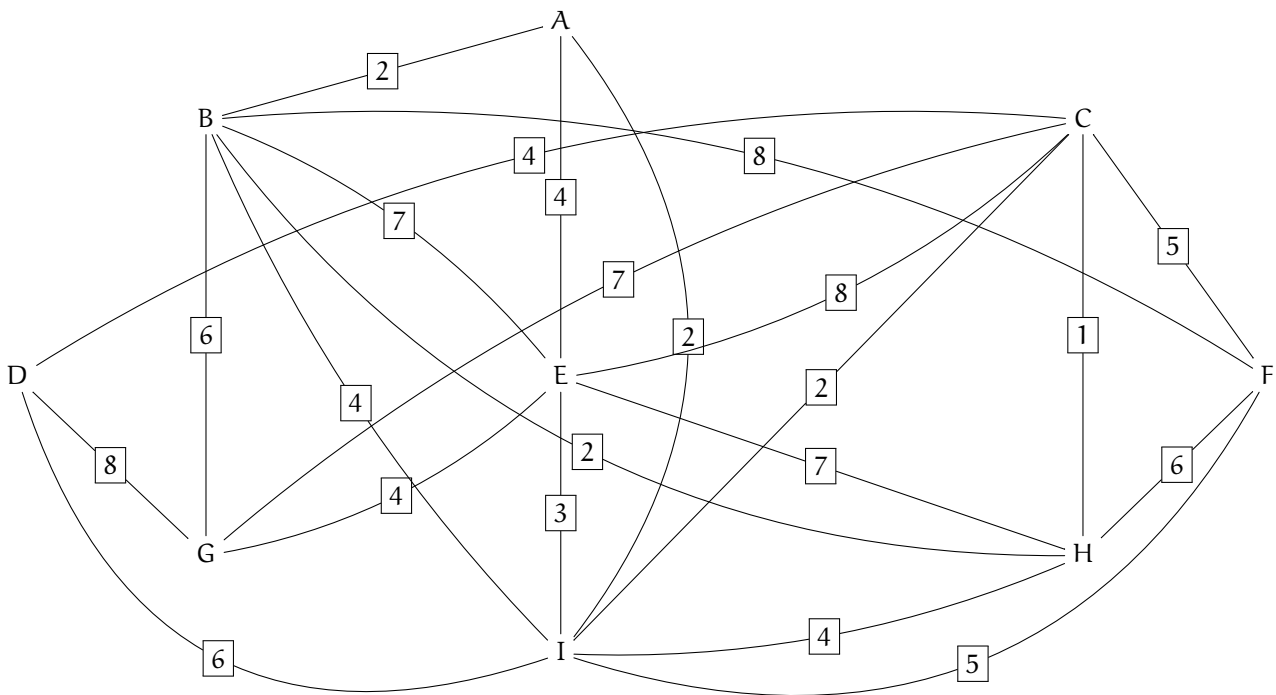
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 133

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| B | 2 | 0 | 0 | 0 | 7 | 8 | 6 | 2 | 4 |
| C | 0 | 0 | 0 | 4 | 8 | 5 | 7 | 1 | 2 |
| D | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 6 |
| E | 4 | 7 | 8 | 0 | 0 | 0 | 4 | 7 | 3 |
| F | 0 | 8 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 5 |
| G | 0 | 6 | 7 | 8 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 2 | 1 | 0 | 7 | 6 | 0 | 0 | 4 |
| I | 2 | 4 | 2 | 6 | 3 | 5 | 0 | 4 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 4 | 7 | 8 | | X | | 4 | 7 | 3 |
| I | 4 | 7 | 5 | 9 | X | 8 | 4 | 7 | X |
| A | X | 6 | 5 | 9 | X | 8 | 4 | 7 | X |
| G | X | 6 | 5 | 9 | X | 8 | X | 7 | X |
| C | X | 6 | X | 9 | X | 8 | X | 6 | X |
| B | X | X | X | 9 | X | 8 | X | 6 | X |
| H | X | X | X | 9 | X | 8 | X | X | X |
| F | X | X | X | 9 | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 6 | 6 | 3 | 6 | 4 | 4 | 5 | 7 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | I | B | C | E | H | F | G | A | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 1 | 4 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AD. On ajoute une arête entre H et G ainsi qu'une arête entre G et I. Par exemple :

ADCEHFIEGHIGBHCIBFCGDIABEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et H ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EICH d'une distance de 6×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{6 \times 100}{50} = 12$ heures.

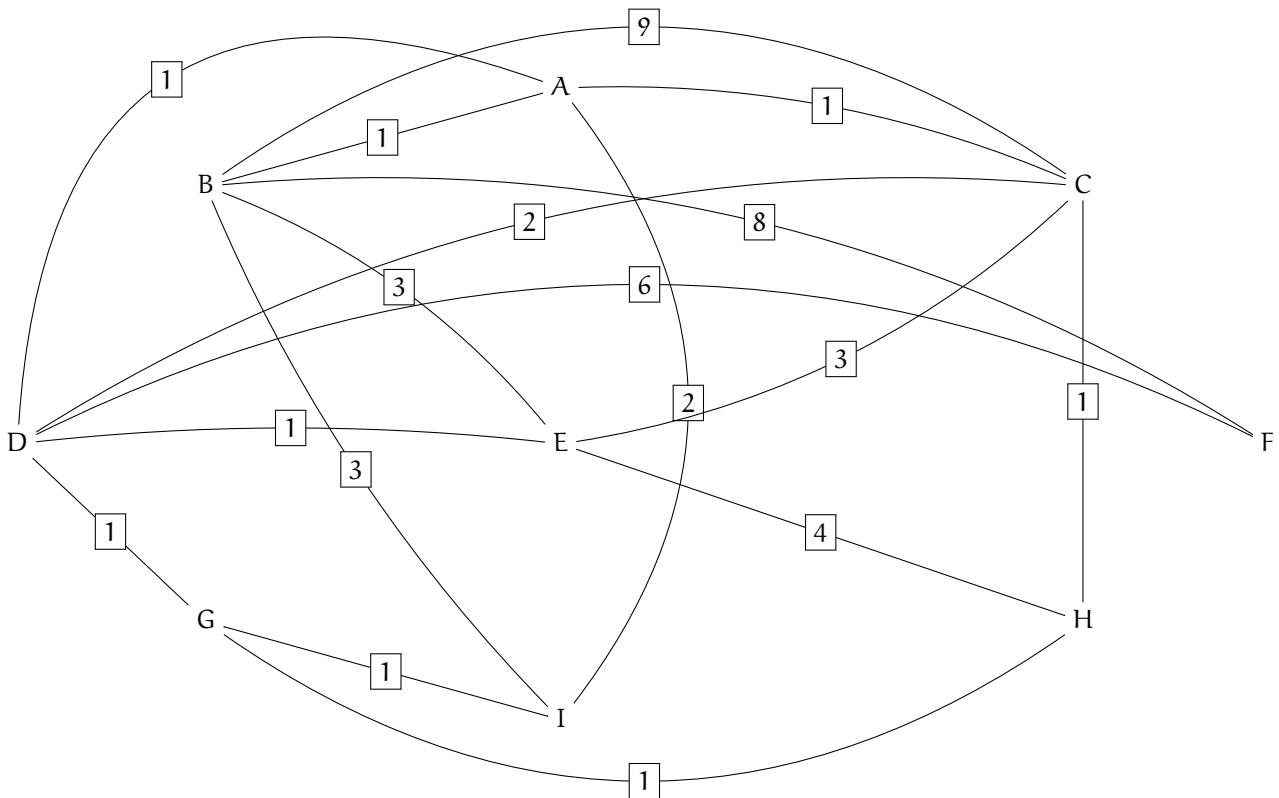
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 134

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| A | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| B | 1 | 0 | 9 | 0 | 3 | 8 | 0 | 0 | 3 |
| C | 1 | 9 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| D | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 6 | 1 | 0 | 0 |
| E | 0 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| F | 0 | 8 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| H | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| I | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 3 | 3 | 1 | X | | | 4 | |
| D | 2 | 3 | 3 | X | X | 7 | 2 | 4 | |
| A | X | 3 | 3 | X | X | 7 | 2 | 4 | 4 |
| G | X | 3 | 3 | X | X | 7 | X | 3 | 3 |
| B | X | X | 3 | X | X | 7 | X | 3 | 3 |
| C | X | X | X | X | X | 7 | X | 3 | 3 |
| H | X | X | X | X | X | 7 | X | X | 3 |
| I | X | X | X | X | X | 7 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 2 | 3 | 3 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | C | D | A | E | G | H | I | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 5 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 4 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BD. On ajoute une arête entre CG. On ajoute une arête entre HI. Par exemple :

ADBECDEHCGHIGDFBIABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île H et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et H ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDGH d'une distance de 3×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{3 \times 100}{50} = 6$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 5 | 3 | 4 | 6 | 6 | 5 | 3 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | E | F | B | G | D | C | H | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 2 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_5 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 5. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 5.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BC. On ajoute une arête entre GH. Par exemple :

AGBFGHFEGCHADBEBEDIFABCEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et G ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EAG d'une distance de 2×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{2 \times 100}{50} = 4$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 3 | 4 | 4 | 6 | 2 | 4 | 5 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | H | I | C | D | G | A | B | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre H et D ainsi qu'une arête entre D et I. Par exemple :

ACDGDIFHDEHIEGBICHABEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :

- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
- Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
- Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
- Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AH\}, \{BE\}, \{CD\}, \{DE\}, \{FD\}, \{GD\}, \{HI\}, \{IE\}$

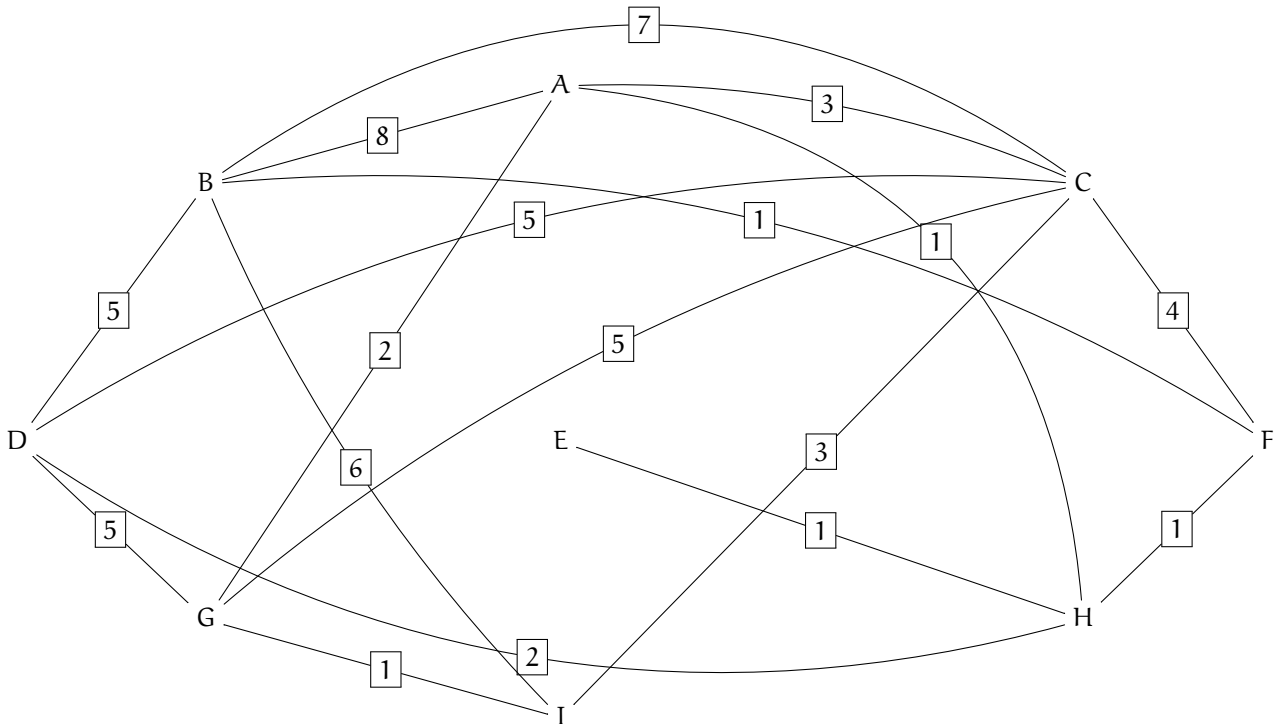
. Son poids est de 13 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{13 \times 100}{50} = 2600$ pièces d'or.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 8 | 3 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| B | 8 | 0 | 7 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| C | 3 | 7 | 0 | 5 | 0 | 4 | 5 | 0 | 3 |
| D | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 2 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| F | 0 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| G | 2 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| H | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 6 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | | | X | | | 1 | |
| H | 1 | | | 2 | X | 1 | | X | |
| A | X | 8 | 3 | 2 | X | 1 | 2 | X | |
| F | X | 1 | 3 | 2 | X | X | 2 | X | |
| B | X | X | 3 | 2 | X | X | 2 | X | 6 |
| D | X | X | 3 | X | X | X | 2 | X | 6 |
| G | X | X | 3 | X | X | X | X | X | 1 |
| I | X | X | 3 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 5 | 6 | 4 | 1 | 3 | 4 | 4 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | C | B | A | D | G | H | F | I | E |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 1 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BE. On ajoute une arête entre FI. Par exemple :

AGCDGIFHDBFCIBEHABCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, la capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 5 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AH\}, \{BF\}, \{CA\}, \{DH\}, \{FH\}, \{GA\}, \{HE\}, \{IG\}$

. Son poids est de 12 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{12 \times 100}{50} = 2400$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 1 | 3 | 5 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | F | A | C | E | G | H | I | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 3 | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | ■ | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre DH. On ajoute une arête entre G et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

AGDEHDFGIFCIADCEABHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AE\}, \{BH\}, \{CD\}, \{DE\}, \{FC\}, \{GF\}, \{HA\}, \{IG\}$

. Son poids est de 14 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{14 \times 100}{50} = 2800$ pièces d'or.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 3 | 3 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | C | H | I | A | F | G | B | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 4 | 4 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 3 | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AE. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

AGECHFGICFEDIAEBHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EBHA d'une distance de 7×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{7 \times 100}{50} = 14$ heures.

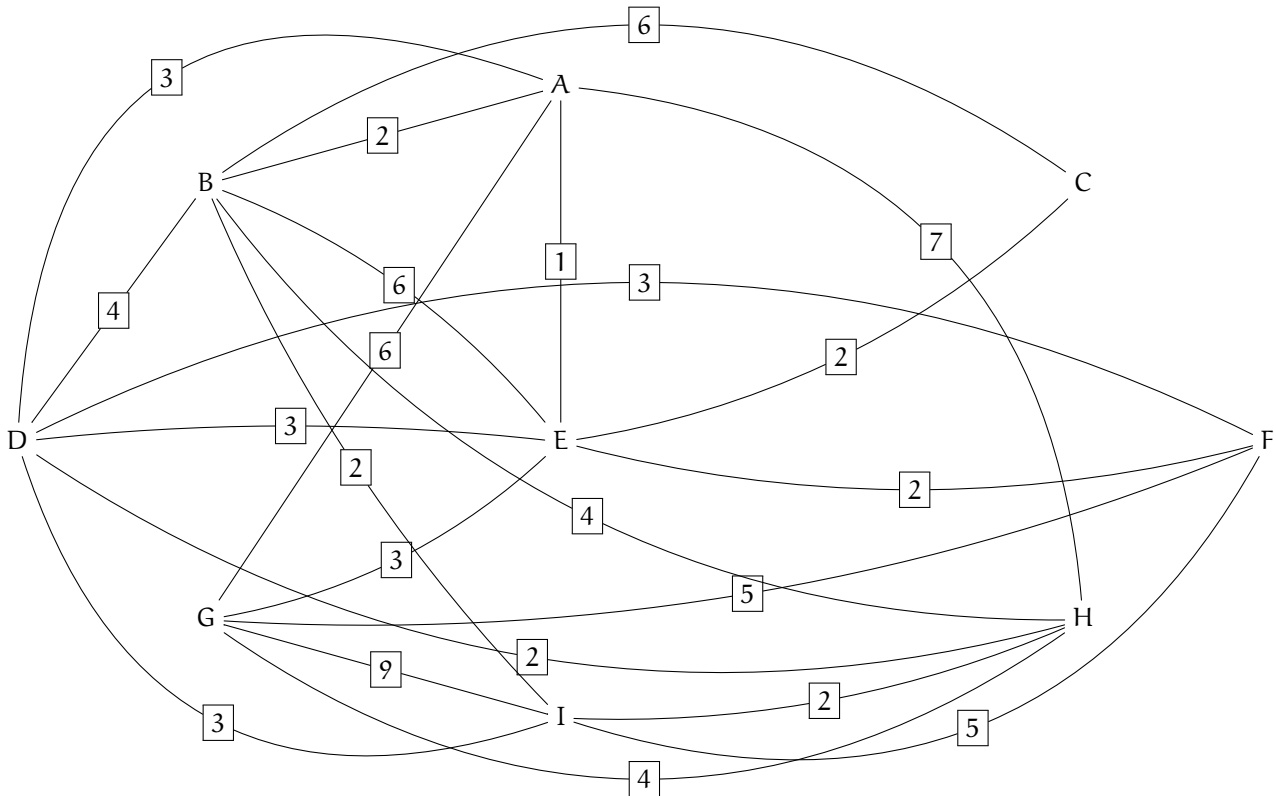
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 140

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 0 | 6 | 7 | 0 |
| B | 2 | 0 | 6 | 4 | 6 | 0 | 0 | 4 | 2 |
| C | 0 | 6 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 3 | 4 | 0 | 0 | 3 | 3 | 0 | 2 | 3 |
| E | 1 | 6 | 2 | 3 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 | 5 | 0 | 5 |
| G | 6 | 0 | 0 | 0 | 3 | 5 | 0 | 4 | 9 |
| H | 7 | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 |
| I | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 5 | 9 | 2 | 0 |

0.5 2

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | 6 | 2 | 3 | X | 2 | 3 | | |
| A | X | 2 | 2 | 3 | X | 2 | 3 | 7 | |
| B | X | X | 2 | 3 | X | 2 | 3 | 4 | 2 |
| C | X | X | X | 3 | X | 2 | 3 | 4 | 2 |
| F | X | X | X | 3 | X | X | 3 | 4 | 2 |
| I | X | X | X | 3 | X | X | 3 | 2 | X |
| H | X | X | X | 2 | X | X | 3 | X | X |
| D | X | X | X | X | X | X | 3 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 6 | 2 | 6 | 6 | 4 | 5 | 5 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | D | E | A | G | H | I | F | C |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 4 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 3 | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 4 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 5 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 5 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 5. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre A et I. On ajoute une arête entre G et C ainsi qu'une arête entre C et H. Par exemple :

AHBIADBEDFEGHIGABCGFIDHCEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 5. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 5 (couleur 5)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$$\{AE\}, \{BA\}, \{CE\}, \{DH\}, \{FE\}, \{GE\}, \{HI\}, \{IB\}$$

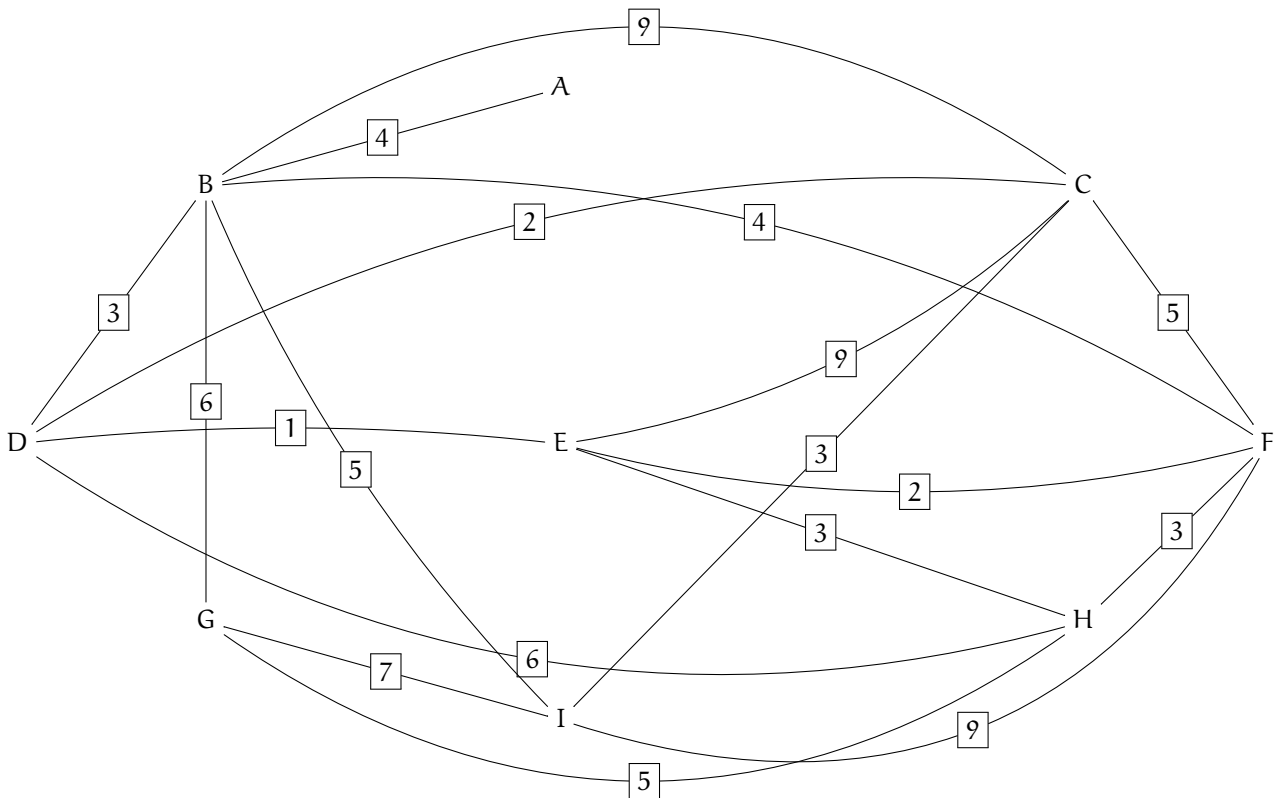
. Son poids est de 16 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{16 \times 100}{50} = 3200$ pièces d'or.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | 4 | 0 | 9 | 3 | 0 | 4 | 6 | 0 | 5 |
| C | 0 | 9 | 0 | 2 | 9 | 5 | 0 | 0 | 3 |
| D | 0 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| E | 0 | 0 | 9 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| F | 0 | 4 | 5 | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 9 |
| G | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 7 |
| H | 0 | 0 | 0 | 6 | 3 | 3 | 5 | 0 | 0 |
| I | 0 | 5 | 3 | 0 | 0 | 9 | 7 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | | 9 | 1 | X | 2 | | 3 | |
| D | | 4 | 3 | X | X | 2 | | 3 | |
| F | | 4 | 3 | X | X | X | | 3 | 11 |
| C | | 4 | X | X | X | X | | 3 | 6 |
| H | | 4 | X | X | X | X | 8 | X | 6 |
| B | 8 | X | X | X | X | X | 8 | X | 6 |
| I | 8 | X | X | X | X | X | 8 | X | X |
| A | X | X | X | X | X | X | 8 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 1 | 6 | 5 | 4 | 4 | 5 | 3 | 4 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | B | C | F | D | E | H | I | G | A |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 1 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AC. On ajoute une arête entre FG. Par exemple :

ABGFHGFICIBDCEDHEFBCA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDAB d'une distance de 8×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{8 \times 100}{50} = 16$ heures.

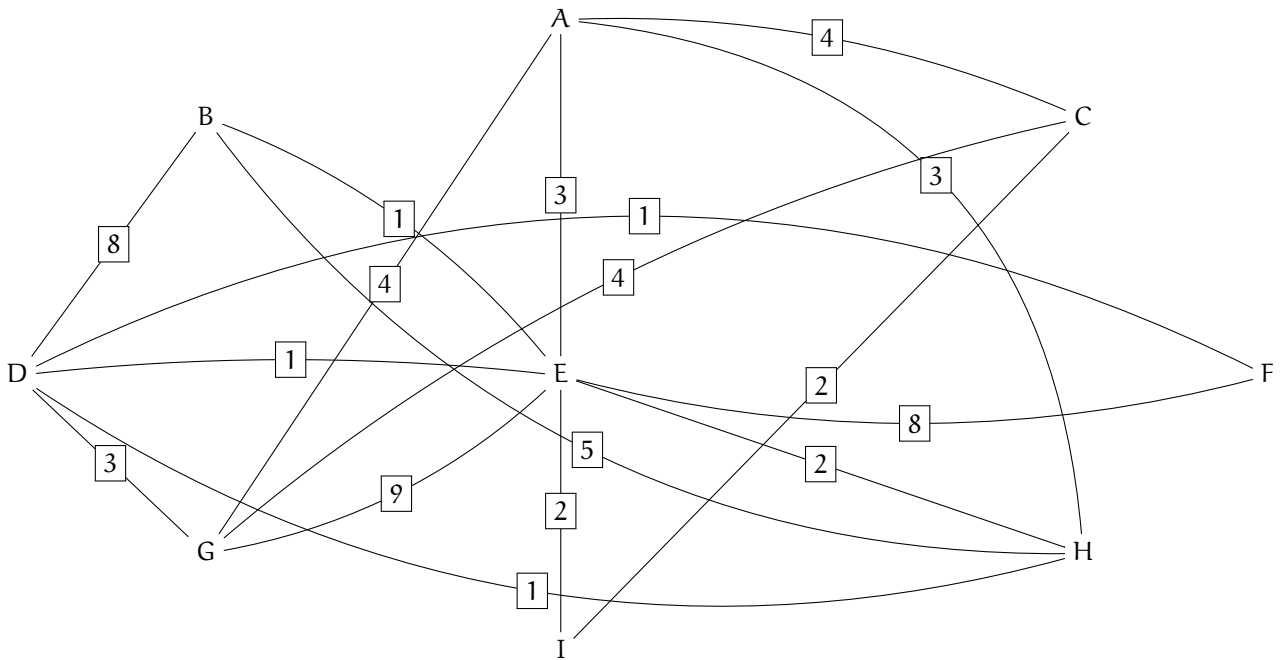
Contrôle Graphe & Langages Correction du sujet 142

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 | 4 | 3 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 8 | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| C | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 |
| D | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| E | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 8 | 9 | 2 | 2 |
| F | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 4 | 0 | 4 | 3 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 3 | 5 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 3 | 1 | | 1 | X | 8 | 9 | 2 | 2 |
| B | 3 | X | | 1 | X | 8 | 9 | 2 | 2 |
| D | 3 | X | | X | X | 2 | 4 | 2 | 2 |
| F | 3 | X | | X | X | X | 4 | 2 | 2 |
| H | 3 | X | | X | X | X | 4 | X | 2 |
| I | 3 | X | 4 | X | X | X | 4 | X | X |
| A | X | X | 4 | X | X | X | 4 | X | X |
| C | X | X | X | X | X | X | 4 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 3 | 3 | 5 | 7 | 2 | 4 | 4 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | D | A | G | H | B | C | F | I |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 7 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | 1 | ■ | 3 | 2 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | 2 | ■ | ■ | 2 | 1 | ■ | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BC. On ajoute une arête entre D et C ainsi qu'une arête entre C et E. Par exemple :

AGCIEBHACBDGHEHDEFDCEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île C et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

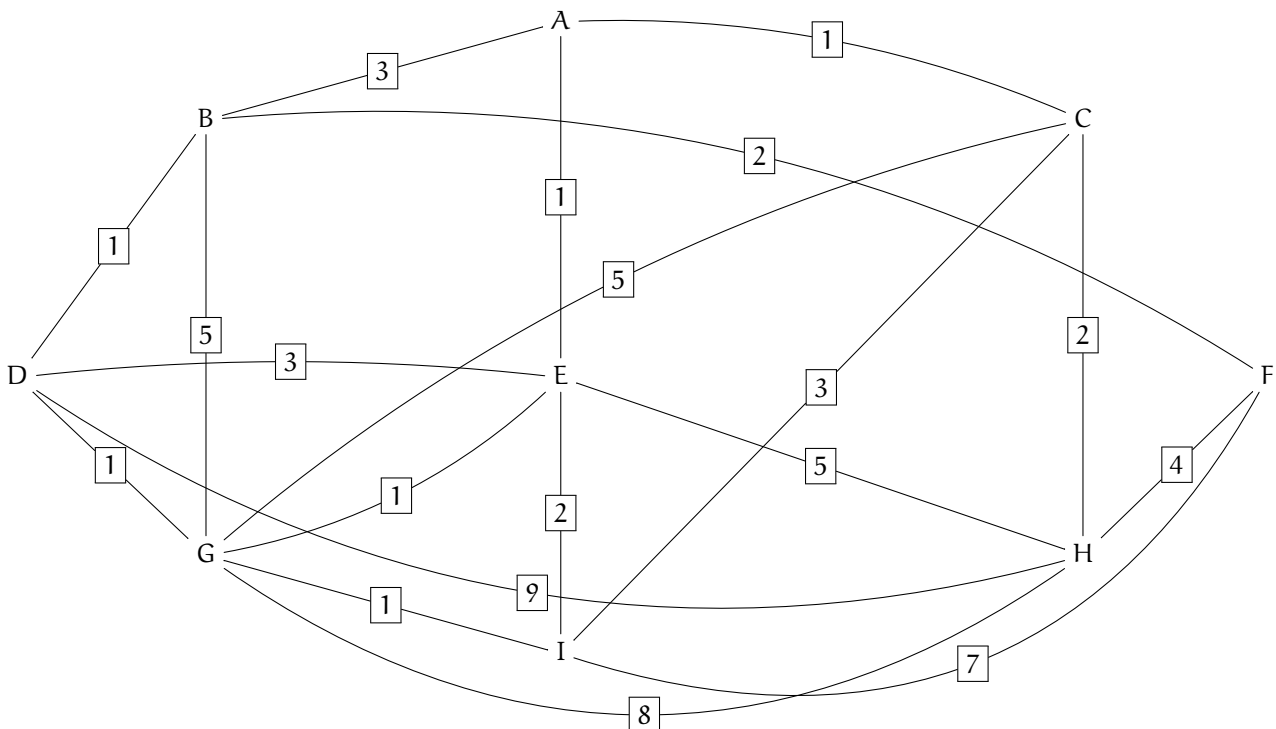
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et C ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EIC d'une distance de 4×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Conton, $\frac{4 \times 100}{50} = 8$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 |
| C | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 2 | 3 |
| D | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 9 | 0 |
| E | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | 5 | 2 |
| F | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 7 |
| G | 0 | 5 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 8 | 1 |
| H | 0 | 0 | 2 | 9 | 5 | 4 | 8 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 7 | 1 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | | | 3 | X | | 1 | 5 | 2 |
| A | X | 4 | 2 | 3 | X | | 1 | 5 | 2 |
| G | X | 4 | 2 | 2 | X | | X | 5 | 2 |
| C | X | 4 | X | 2 | X | | X | 4 | 2 |
| D | X | 3 | X | X | X | | X | 4 | 2 |
| I | X | 3 | X | X | X | 9 | X | 4 | X |
| B | X | X | X | X | X | 5 | X | 4 | X |
| H | X | X | X | X | X | 5 | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 3 | 6 | 5 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | G | E | H | B | C | D | I | A | F |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | ■ | 3 |
| DSAT ₄ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | ■ | ■ |
| DSAT ₅ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | ■ |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 | 3 | ■ | ■ |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | 3 | ■ | ■ |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | ■ | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AF. On ajoute une arête entre E et B ainsi qu'une arête entre B et H. Par exemple :

ACHEICGBEGDHBFBHGIFABDEA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île F et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et F ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EGDBF d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 3 | 2 | 2 | 5 | 4 | 2 | 3 | 5 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | I | F | B | H | A | C | D | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 | 1 | ■ |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 2 | 2 | 3 | 3 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. On ne peut malheureusement rien conclure. Désolé :-)

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EH. On ajoute une arête entre B et A ainsi qu'une arête entre A et I. Par exemple :

AFHIFDCEGIABHEIBE A

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliées par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et B ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EGIB d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Conton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 6 | 5 | 2 | 1 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | A | B | E | F | G | H | C | I | D |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | 3 | ■ | ■ | 1 | 1 | ■ | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | ■ | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BD. On ajoute une arête entre E et G ainsi qu'une arête entre G et H. Par exemple :

AFBGEHGIBEFGACEABDHA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

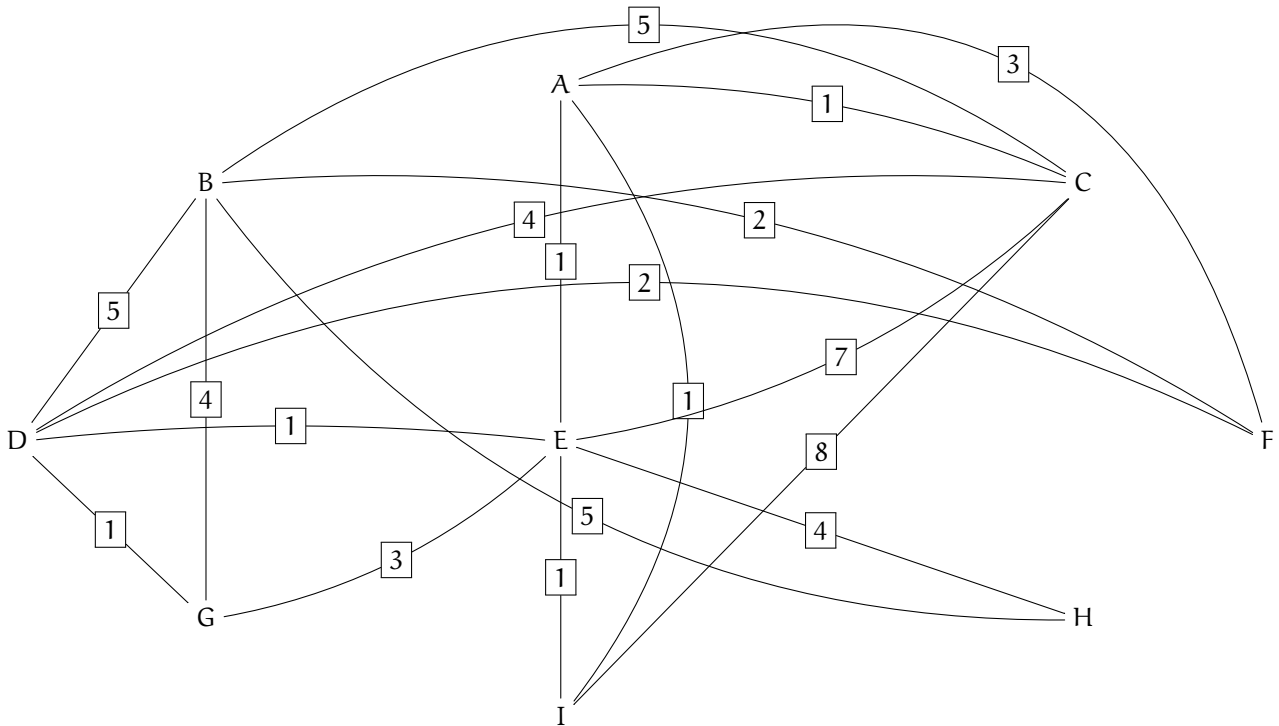
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et G ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EABG d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| B | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 2 | 4 | 5 | 0 |
| C | 1 | 5 | 0 | 4 | 7 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| D | 0 | 5 | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| E | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 0 | 3 | 4 | 1 |
| F | 3 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 0 | 4 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 5 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 1 | 0 | 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 1 | | 7 | 1 | X | | 3 | 4 | 1 |
| A | X | | 2 | 1 | X | 4 | 3 | 4 | 1 |
| D | X | 6 | 2 | X | X | 3 | 2 | 4 | 1 |
| I | X | 6 | 2 | X | X | 3 | 2 | 4 | X |
| C | X | 6 | X | X | X | 3 | 2 | 4 | X |
| G | X | 6 | X | X | X | 3 | X | 4 | X |
| F | X | 5 | X | X | X | X | X | 4 | X |
| H | X | 5 | X | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 3 | 3 | 2 | 3 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | E | B | C | D | A | F | G | I | H |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre BI. On ajoute une arête entre CF. On ajoute une arête entre D et A ainsi qu'une arête entre A et G. Par exemple :

AFBHEIBGDFCIAECDEGACBDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 2, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h, en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

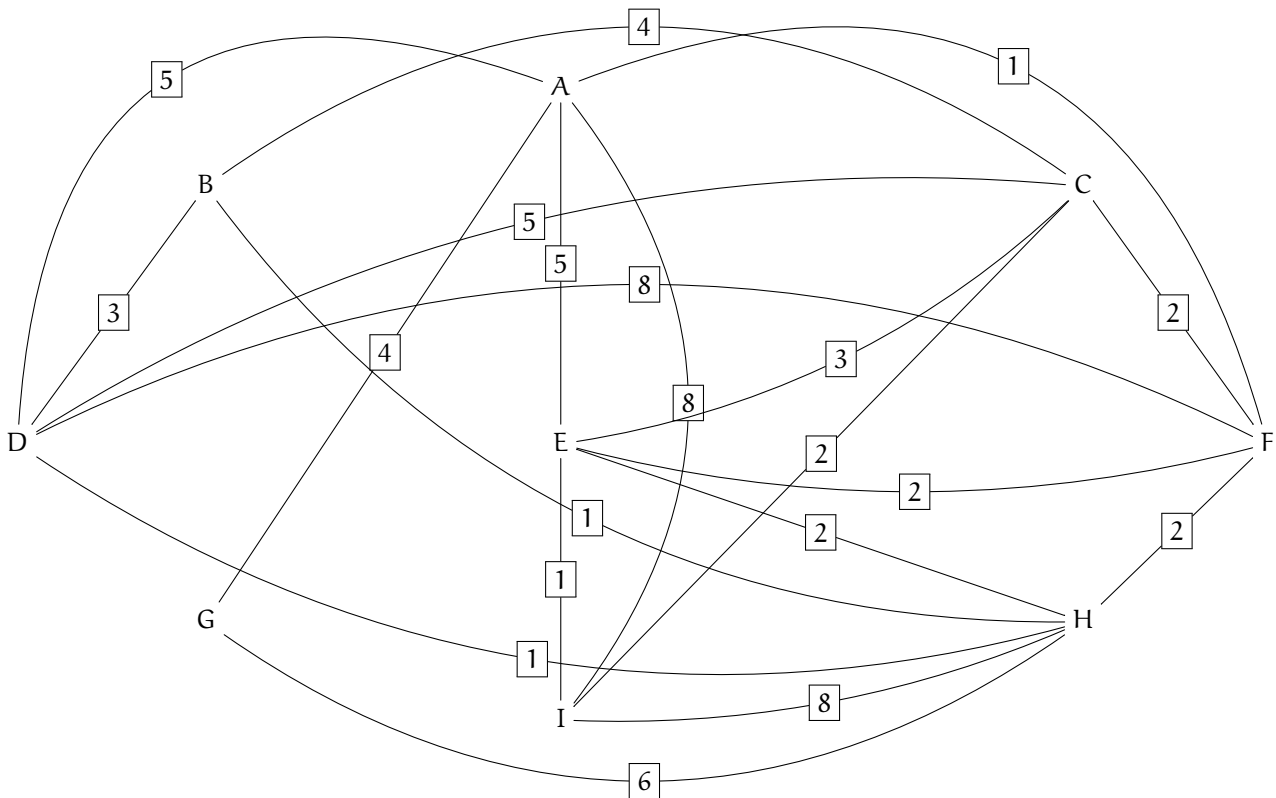
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et B ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EDFB d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 1 | 4 | 0 | 8 |
| B | 0 | 0 | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C | 0 | 4 | 0 | 5 | 3 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| D | 5 | 3 | 5 | 0 | 0 | 8 | 0 | 1 | 0 |
| E | 5 | 0 | 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| F | 1 | 0 | 2 | 8 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| G | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| H | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 6 | 0 | 8 |
| I | 8 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|----|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 5 | | 3 | | X | 2 | | 2 | 1 |
| I | 5 | | 3 | | X | 2 | | 2 | X |
| F | 3 | | 3 | 10 | X | X | | 2 | X |
| H | 3 | 3 | 3 | 3 | X | X | 8 | X | X |
| A | X | 3 | 3 | 3 | X | X | 7 | X | X |
| B | X | X | 3 | 3 | X | X | 7 | X | X |
| C | X | X | X | 3 | X | X | 7 | X | X |
| D | X | X | X | X | X | X | 7 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | 6 | 4 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | H | A | C | D | E | F | I | B | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 5 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | ■ | 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | ■ | 3 | 3 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 4 | 3 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre DE. On ajoute une arête entre C et G ainsi qu'une arête entre G et F. Par exemple :

AGCIAEHFGHIECFABDEFDHCDA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brelaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brelaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île G et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et G ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EFAG d'une distance de 7×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{7 \times 100}{50} = 14$ heures.

Contrôle Graphe & Langages

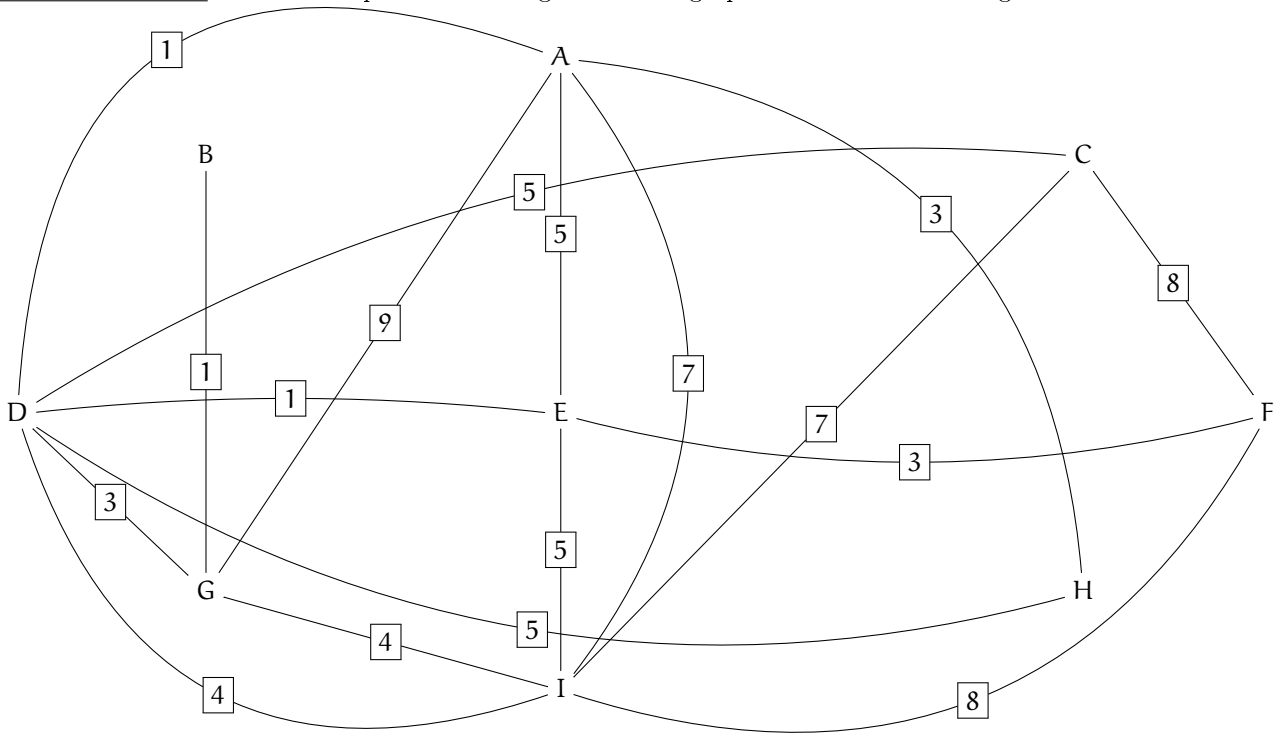
Correction du sujet 148

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaitre la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Prim (initialisé en E de préférence), comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 9 | 3 | 7 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 8 | 0 | 0 | 7 |
| D | 1 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 3 | 5 | 4 |
| E | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 5 |
| F | 0 | 0 | 8 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| G | 9 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| H | 3 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 7 | 0 | 7 | 4 | 5 | 8 | 4 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 5 | | | 1 | X | 3 | | | 5 |
| D | 1 | | 5 | X | X | 3 | 3 | 5 | 4 |
| A | X | | 5 | X | X | 3 | 3 | 3 | 4 |
| F | X | | 5 | X | X | X | 3 | 3 | 4 |
| G | X | 1 | 5 | X | X | X | X | 3 | 4 |
| B | X | X | 5 | X | X | X | X | 3 | 4 |
| H | X | X | 5 | X | X | X | X | X | 4 |
| I | X | X | 5 | X | X | X | X | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 1 | 3 | 6 | 4 | 3 | 4 | 2 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | I | A | E | G | C | F | H | B |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | 3 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 4 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 4. De plus on observe que \mathcal{K}_4 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 4. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 4.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre C et A ainsi qu'une arête entre A et F. Par exemple :

AFCIDHAEFIEDGIACDABGA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".
- Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 4. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 2 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)
- Il y a 1 pirate dans le groupe 4 (couleur 4)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), décide d'illuminer certaines voies de navigation en installant des "bateaux phares" (qui sont de simples épaves enflammées). Elle impose les contraintes suivantes :
- Chaque île doit avoir au moins une voie illuminée menant à elle.
 - Il y a un "bateau phare" tous les 50 kilomètres.
 - Chaque "bateau phare" coûte 100 pièces d'or
 - Il doit être possible, à partir de n'importe quelle île, d'atteindre n'importe quelle autre en n'empruntant que des voies de navigation illuminées.

Bien sûr, la reine souhaite que ça coûte le moins cher possible. Quelles sont les voies devant être enflammées et quel sera le coût ?

1

L'énoncé revient à chercher un arbre couvrant de poids minimal ce qui a été fait précédemment. L'arbre est donc formé des arêtes

$\{AD\}, \{BG\}, \{CD\}, \{DE\}, \{FE\}, \{GD\}, \{HA\}, \{ID\}$

. Son poids est de 21 ce qui représente la centaine de kilomètres à éclairer. Le prix sera donc de $100 \times \frac{21 \times 100}{50} = 4200$ pièces d'or.

Contrôle Graphe & Langages

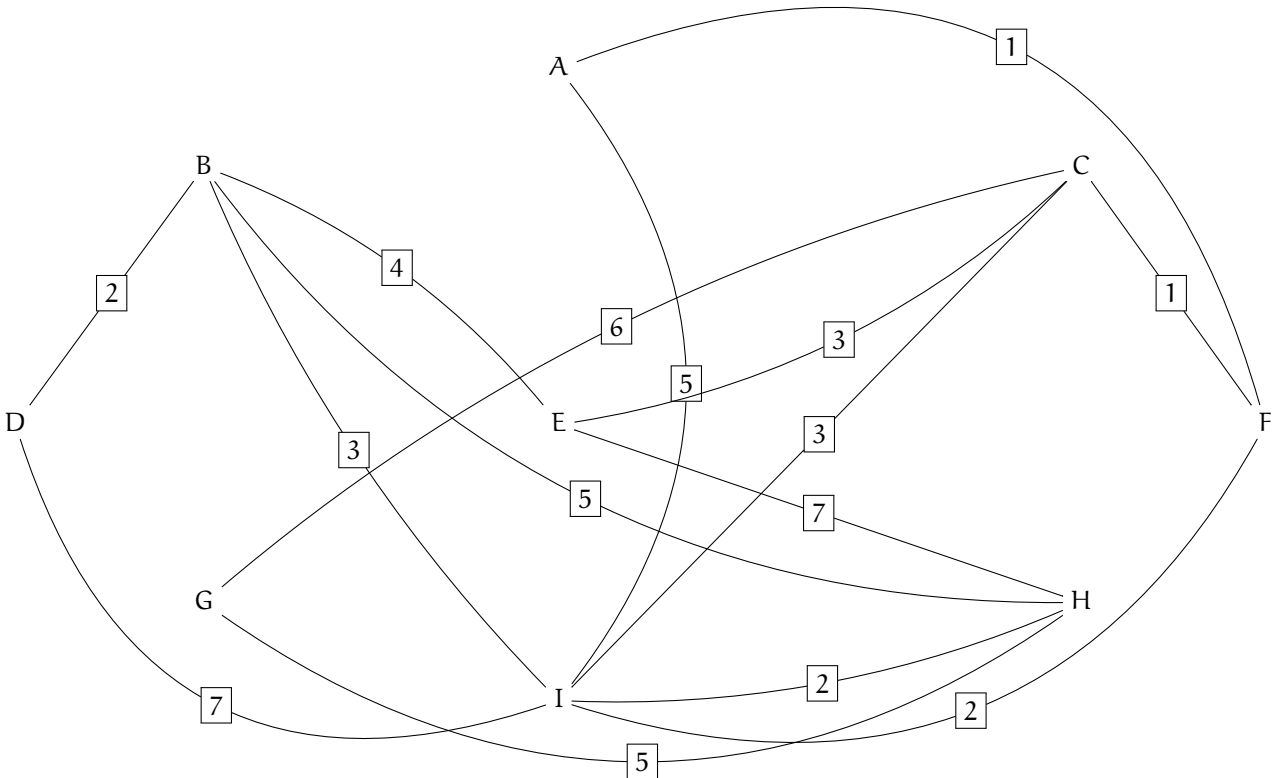
Correction du sujet 149

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

1. Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
2. Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| B | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 0 | 0 | 5 | 3 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 6 | 0 | 3 |
| D | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| E | 0 | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| F | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| G | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| H | 0 | 5 | 0 | 0 | 7 | 0 | 5 | 0 | 2 |
| I | 5 | 3 | 3 | 7 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | | 4 | 3 | | X | | | 7 | |
| C | | 4 | X | | X | 4 | 9 | 7 | 6 |
| B | | X | X | 6 | X | 4 | 9 | 7 | 6 |
| F | 5 | X | X | 6 | X | X | 9 | 7 | 6 |
| A | X | X | X | 6 | X | X | 9 | 7 | 6 |
| D | X | X | X | X | X | X | 9 | 7 | 6 |
| I | X | X | X | X | X | X | 9 | 7 | X |
| H | X | X | X | X | X | X | 9 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 2 | 4 | 4 | 2 | 3 | 3 | 2 | 4 | 6 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | I | B | C | H | E | F | A | D | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | 2 | 2 | ■ | 1 | 1 | 1 | 2 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | 2 | 3 | ■ | 1 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | 2 | ■ | ■ | 1 | 1 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 2 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 |
| Coul | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre EF. Par exemple :

AFCGHICEBHEFIBDIA

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorer les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 3 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 1, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Sparrow qui réside sur l'île A et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

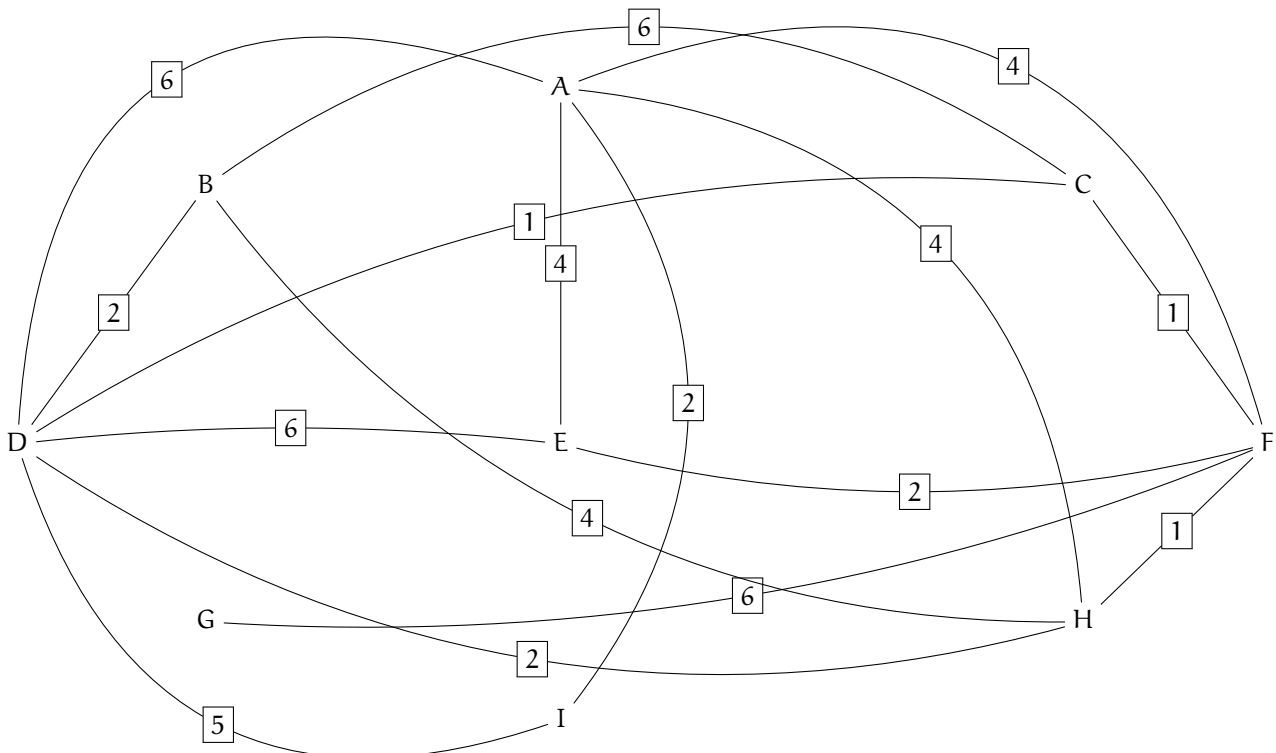
Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et A ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est ECFA d'une distance de 5×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{5 \times 100}{50} = 10$ heures.

La qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront pris en compte dans l'évaluation.

L'archipel de la Baie des naufragés

La Baie des naufragés est une île forteresse, bastion des seigneurs pirates. Elle peut subir un siège pendant plusieurs années ! Cette île est entourées par 8 îles plus petite et un peu moins imprenables. Chacune de ces îles est sous l'autorité d'un *seigneur pirate* - il y a 9 seigneurs pirates, un par île, le roi des pirates étant dans la baie des naufragés.

Certaines voies de navigation ne sont jamais utilisées à cause des dangers qu'elles représentent (Kraken, Maelstrom, Salazar, etc). La situation se modélise par un graphe métrique dont les sommets représentent les îles de l'archipel, les arêtes les voies de navigation utilisées par les pirates et la métrique la distance entre les îles correspondantes en centaine de kilomètre. Voici une représentation sagittale de ce graphe. La baie des naufragés est le sommet E.



Première partie. Résultats préliminaires

- Donner la représentation matricielle du graphe. On pourra faire apparaître la métrique dans la matrice.
- Compléter ce tableau en appliquant l'algorithme de Dijkstra partant de E, comme nous l'avons vu en cours.

0.5

2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 6 | 4 | 4 | 0 | 4 | 2 |
| B | 0 | 0 | 6 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| C | 0 | 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| D | 6 | 2 | 1 | 0 | 6 | 0 | 0 | 2 | 5 |
| E | 4 | 0 | 0 | 6 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| F | 4 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 6 | 1 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| H | 4 | 4 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| I | 2 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Som | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | | | | | 0 | | | | |
| E | 4 | | | 6 | X | 2 | | | |
| F | 4 | | 3 | 6 | X | X | 8 | 3 | |
| C | 4 | 9 | X | 4 | X | X | 8 | 3 | |
| H | 4 | 7 | X | 4 | X | X | 8 | X | |
| A | X | 7 | X | 4 | X | X | 8 | X | 6 |
| D | X | 6 | X | X | X | X | 8 | X | 6 |
| B | X | X | X | X | X | X | 8 | X | 6 |
| I | X | X | X | X | X | X | 8 | X | X |

3. (a) Compléter le tableau suivant en indiquant le degré de chaque sommet. 0.5

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| $d^{+1}(\bullet)$ | 5 | 3 | 3 | 6 | 3 | 5 | 1 | 4 | 2 |

- (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz. 2

| Som | D | A | F | H | B | C | E | I | G |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DSAT ₁ | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₂ | ■ | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| DSAT ₃ | ■ | 2 | ■ | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| DSAT ₄ | ■ | ■ | ■ | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₅ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| DSAT ₆ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 2 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₇ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 3 | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₈ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 2 | 1 |
| DSAT ₉ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | 1 |
| Coul | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |

- (c) Quelle est la valeur exacte du nombre chromatique de ce graphe. 1

D'après l'algorithme de Brelaz, nous avons déterminé une coloration à 3 couleurs. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est inférieur à 3. De plus on observe que \mathcal{K}_3 est un sous graphe de ce graphe. Ceci implique que le nombre chromatique du graphe est majoré par 3. Ceci implique que nécessairement le nombre chromatique de ce graphe est exactement 3.

Seconde partie. L'histoire.

1. Sparrow, le capitaine Jack Sparrow, a découvert que la compagnie des indes prépare un sale coup dans l'archipel. Il décide de tendre un piège à lord Cutler Beckett, capitaine de la compagnie des indes dans le pacifique, responsable du mauvais coup en préparation, en plaçant des mines sur les voies de navigation. Bien que Sparrow puisse se souvenir quelle voie de navigation il a piégé, l'abus de rhum ne lui permet pas de souvenir ou il a posé les mines. Pour éviter de faire exploser son navire (le black pearl), il décide de ne passer qu'une et une seule fois par chaque voie. Il veut partir de son île, la A et revenir à son île. A cette fin, il peut même éventuellement affronter des dangers et donc emprunter des voies de navigation dangereuses (des arêtes inexistantes). Expliquer quel trajet Sparrow doit suivre. 2

L'énoncé revient à se demander s'il existe, dans ce graphe, un circuit eulérien (partant de A, mais puisque c'est un circuit, le point de départ n'importe pas).

D'après le cours, un tel circuit existe si tous les sommets sont de degrés paire. Ce qui n'est pas le cas ici. Il y a des sommets de degrés impaire. On va donc rajouter à ces sommets des degrés (via l'ajout d'arête) pour répondre à la question. Voici par exemple une solution. On ajoute une arête entre AB. On ajoute une arête entre CE. On ajoute une arête entre F et B ainsi qu'une arête entre B et G. Par exemple :

AHBDEFBGFHFDIAECFABCD A

2. Bien que les îles appartiennent exclusivement aux seigneurs pirates qui y vivent, les voies de navigation n'appartiennent à personne (ou tout le monde). Ceci a créé des tensions parmi les seigneurs pirates de sorte que deux seigneurs dont les îles sont reliés par une voie de navigation se détestent royalement. Royale, c'est ce dont il est question aujourd'hui puisque les seigneurs pirates sont tous réunis à la baie des naufragés pour élire un nouveau roi. Chaque seigneur nomme un seigneur et en général il se choisit lui-même ce qui rend l'élection assez compliquée. Mais un des seigneurs pirates, le capitaine Elisabeth Swan, a réussi à convaincre tous les seigneurs de voter au moins pour un pirate qu'ils ne détestent pas ce qui a donné naissance à des groupes de pirates "qui ne se détestent pas".

Combien de ces groupes existe-t-il au minimum ? Quel groupe a la plus de chance d'avoir le roi des pirates ?

1

Deux seigneurs pirates partageant une même voie de navigation ne peuvent pas être dans le même groupe. Si on associe à chaque groupe une couleur, l'énoncé revient donc à se demander avec combien de couleurs au minimum on peut colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Cela a été résolu précédemment, par l'application de l'algorithme de Brélaz. La réponse est 3. De plus la coloration proposée par l'algorithme de Brélaz nous indique que :

- Il y a 2 pirates dans le groupe 1 (couleur 1)
- Il y a 3 pirates dans le groupe 2 (couleur 2)
- Il y a 4 pirates dans le groupe 3 (couleur 3)

Comme il y a plus de pirates dans le groupe 3, il est probable que le futur roi soit dans ce groupe.

3. Le nouveau roi des pirates, qui est en fait une reine (Elisabeth Swan), réside maintenant sur l'île de la baie des naufragés (E). Elle désire envoyer un message au capitaine Barbossa qui réside sur l'île B et va pour se faire, utiliser un "perroquet voyageur" nommé *monsieur Coton*. Ce perroquet, très bien informé de la situation et des dangers, ne volera qu'au-dessus des voies de navigation. Sachant qu'il vole à 50km/h en combien de temps minimum arrivera-t-il à destination ? Quel est le chemin qu'il empruntera ?

1

Il s'agit de trouver le plus court chemin entre E et B ce que nous avons déjà traité par l'algorithme de Dijkstra. Le chemin est EFCDB d'une distance de 6×100 km. A 50km/h, il faudra à monsieur Coton, $\frac{6 \times 100}{50} = 12$ heures.