

NOM :  
Prénom :  
Groupe :

## Examen

### Mathématiques DEAU - B

- *La calculatrice est autorisée.*
- *Documents et tout moyen de communication sont prohibés.*
- *Ce document est composé du sujet de l'examen ainsi que du support de réponse.*
- *Il ne s'agit en aucun cas d'une feuille de brouillon.*
- *Vous êtes autorisé à pleurer (en silence).*
- *Assurez-vous de ne pas laisser tomber vos larmes sur la copie.*
- *Position fœtale permise.*



**Exercice 1**45  
min

Extrait du Bac S - Antilles Guyane - 2014

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

1. Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ , on considère  $g(x) = 1 - x + e^x$ . Dresser, en justifiant, le tableau de variation de  $g$  (les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues). Donner également le signe de  $g$ .

2

2. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ . Justifier.

1

3. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ .

1

4. En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ . 0.5
5. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminer un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$ . 0.5
6. Démontrer que la droite  $T$  d'équation  $y = 2x + 1$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0. 1
7. Calculer la dérivée de  $H(x) = \frac{x+1}{e^x}$ . 0.5
8. En déduire une fonction  $F$  tel que  $F' = f$ . 0.5

### Exercice 2

1. Montrer que  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ . 15 min 0.5
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1}$ . On pourra poser  $X = x^5$ . 1

### Exercice 3

45  
min

Le but du problème est de tracer l'allure de la fonction  $f(x) = \frac{x-2}{\ln(x)}$ .

**Première partie.** Étude d'une fonction subsidiaire. On considère la fonction  $g(x) = x\ln(x) - x + 2$ .

1. Donner le domaine de définition de  $g$ . 0.5
  
2. Déterminer les limites de  $g$  aux bords de son domaine de définition. 1
  
3. Calculer la dérivé de  $g$ . 1
  
4. Dresser le tableau de variation de  $g$ . 1
  
5. En déduire le signe de  $g$ . 0.5

**Seconde partie.** Étude de  $f$ .

1. Donner le domaine de définition de  $f$ . On remarquera que 1 est une valeur interdite. 0.5
  
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bords de son domaine de définition (aucune justification n'est attendue) 1
  
3. Prouver que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x\ln^2(x)}$ . 1

4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

1

5. Dessiner aussi proprement que faire ce peut, l'allure de  $f$ .

1

#### Exercice 4

10  
min

Dérivez la fonction suivante

$$f(x) = \frac{3(x^2 - 1)\ln(x)}{x}$$

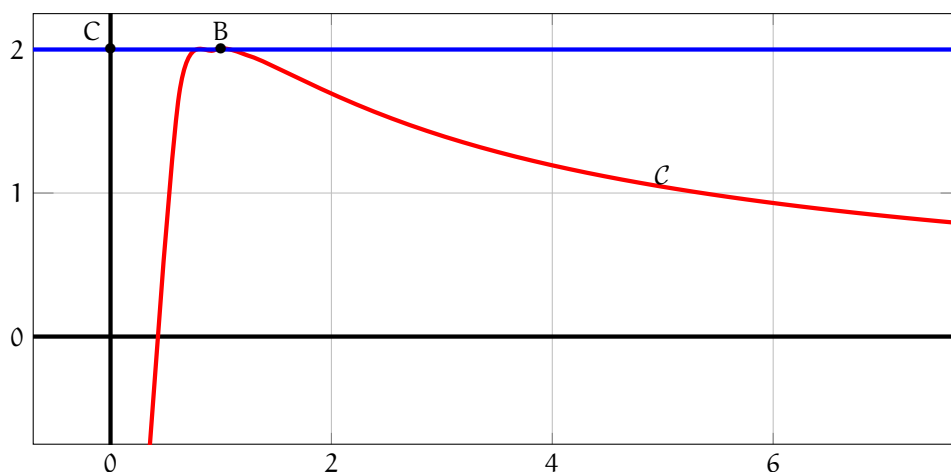
3

### Exercice 5

45  
min

Extrait du Bac S France métropolitaine 2013

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe représentative  $\mathcal{C}$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .



On dispose des informations suivantes :

- les points  $B$  et  $C$  ont pour coordonnées respectives  $(1;2)$  et  $(0;2)$ ;
- la courbe  $\mathcal{C}$  passe par le point  $B$  et la droite  $(BC)$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $B$ ;
- il existe deux nombres réels positifs  $a$  et  $b$  tel que pour tout  $x$  strictement positif

$$f(x) = \frac{a + b \ln(x)}{x}$$

I. (a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de  $f(1)$  et  $f'(1)$ .

0.5

(b) Vérifier que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln(x)}{x^2}$ .

1

(c) En déduire les valeurs de  $a$  et  $b$ .

1.5

2. (a) Justifier que pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x)$  a le même signe que  $-\ln(x)$ . 0.5

(b) Déterminer les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ . On pourra remarquer que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}$ . 1

(c) En déduire le tableau de variation de  $f$ . 1

3. Démontrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]0; 1]$ . Déterminer un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près. 0.5

4. Démontrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution  $\beta$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ . Déterminer un encadrement de  $\beta$  à  $10^{-1}$  près. 0.5



**Exercice 6**15  
min

Résoudre l'équation suivante en précisant le domaine.

$$\ln\left(\frac{x^3 - x}{x - 2}\right) \geq \ln(x^2)$$

4

**Exercice 7** $\infty$   
min

EXAMEN SPÉCIAL D'ADMISSION EN INGÉNIEURIE CIVIL (Faculté Polytechnique de Mons)

La somme des trois chiffres d'un nombre naturel est **17**. En ajoutant le chiffre des dizaines au double du chiffre des centaines on obtient **22**. La différence entre le nombre et celui obtenu en inversant l'ordre des chiffres est **495**.

Quels sont les nombres possibles qui vérifient ces propriétés?

 $\infty$