

# Algorithme du Simplexe

- On cherche la colonne du pivot (variable entrante) :
  - 1 Si tous les coefficients de la dernière ligne sont négatifs ou nuls : STOP.
  - 2 Sinon on choisit l'indice  $r$  du coefficient  $C_r$  strictement positif le plus grand.
- On cherche la ligne du pivot (variable sortante) :
  - 1 Si tous les  $B_i/A_{i,r}$  sont strictement négatifs ou infini : STOP.
  - 2 Sinon on choisit l'indice  $s$  tel que  $A_{s,r} > 0$  et  $B_s/A_{s,r}$  positif ou nul le plus petit.
- Le pivot est  $A_{s,r}$ . On applique le protocole de Gauss.
- On réitère le processus.

## Exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_3 \leq 10 \\ x_2 + x_3 \leq 15 \\ \text{Max}(x_1 + x_2 + x_3) \end{array} \right.$$

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $e_1$ | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 15 |
| $e_2$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 10 |
| $e_3$ | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 15 |
| Max   | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0  |

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $e_1$ | 0     | 1     | -1    | 1     | -1    | 0     | 5   |
| $x_1$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 10  |
| $e_3$ | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 15  |
| Max   | 0     | 1     | 0     | 0     | -1    | 0     | -10 |

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x_2$ | 0     | 1     | -1    | 1     | -1    | 0     | 5   |
| $x_1$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 10  |
| $e_3$ | 0     | 0     | 2     | -1    | 1     | 1     | 10  |
| Max   | 0     | 0     | 1     | -1    | 0     | 0     | -15 |

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$          | $e_2$          | $e_3$          |     |
|-------|-------|-------|-------|----------------|----------------|----------------|-----|
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | $\frac{1}{2}$  | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  | 10  |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | $\frac{2}{1}$  | $\frac{2}{1}$  | $-\frac{2}{1}$ | 5   |
| $x_3$ | 0     | 0     | 1     | $-\frac{2}{2}$ | $\frac{2}{2}$  | $\frac{2}{2}$  | 5   |
| Max   | 0     | 0     | 0     | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | -20 |

Conclusion : la solution du problème est

$$(x_1, x_2, x_3) = (5, 10, 5)$$

pour un optimum de 20.