Mathématiques des transmissions

David Hébert
hebert.iut@gmail.com

2021

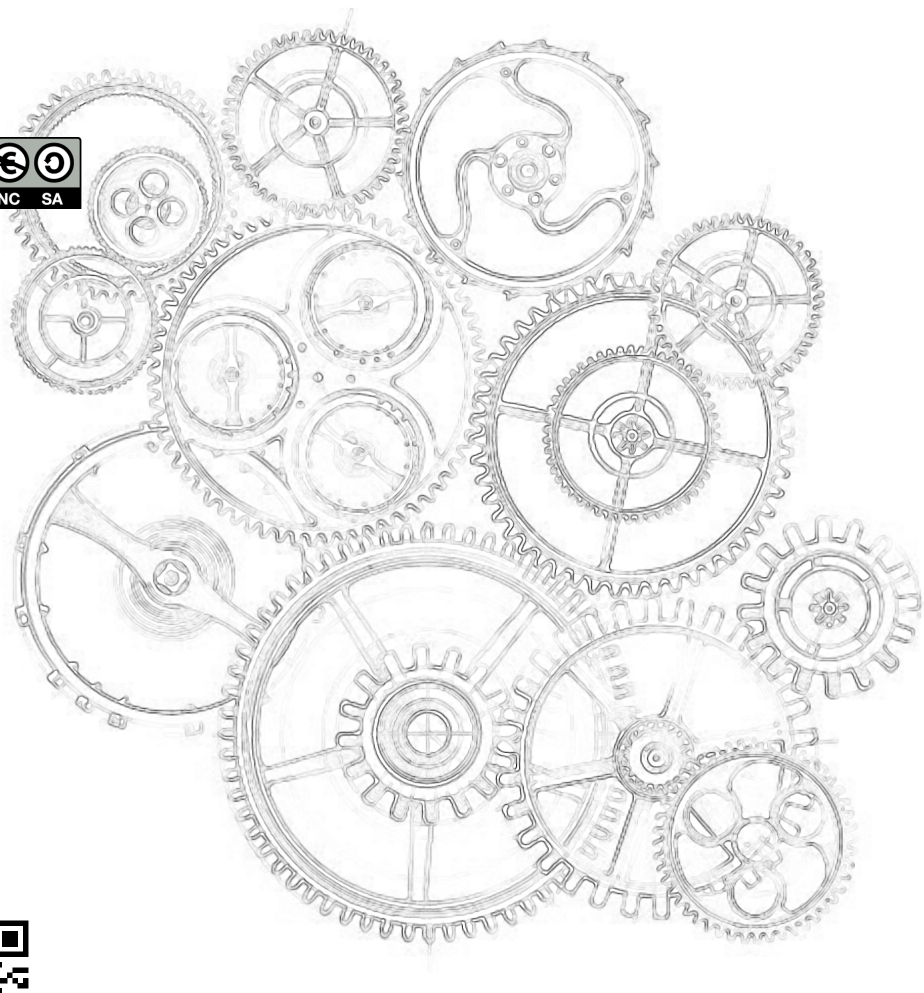
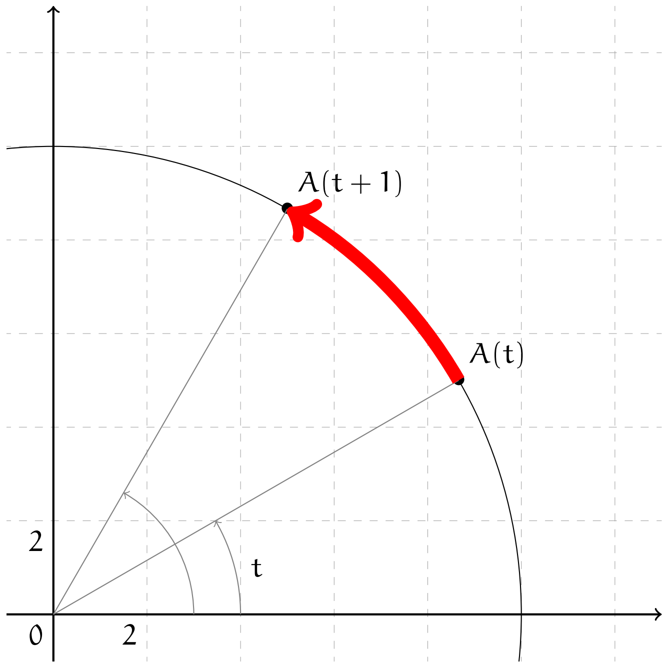


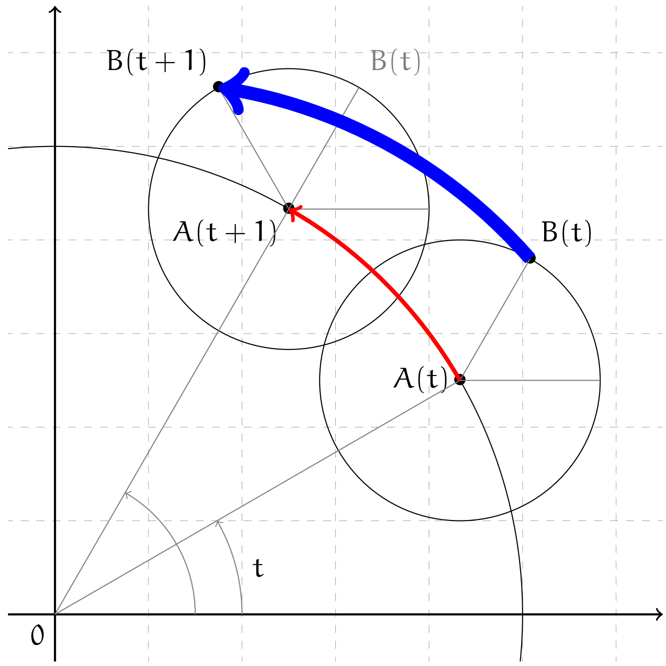
Table des matières

Introduction

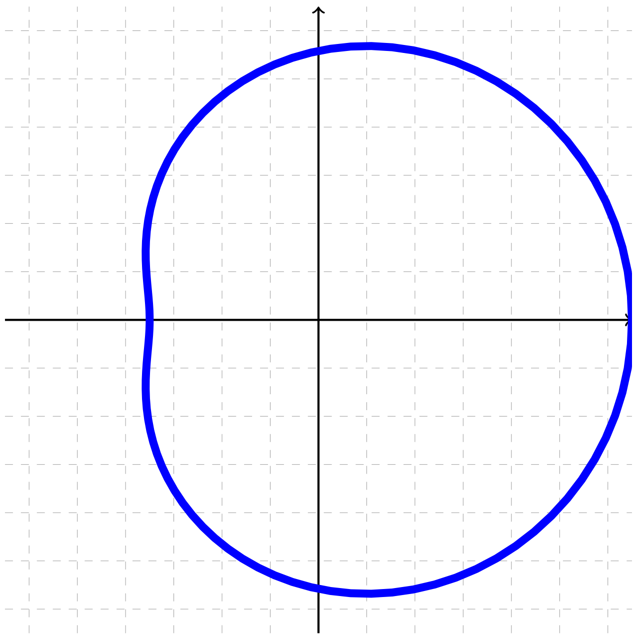
Imaginons un cercle centré en l'origine de rayon 10 et un point qui tourne sur ce cercle à une vitesse constante de 1 (selon l'unité de mesure).

Et imaginons à présent qu'autour de ce point se trouve un cercle de rayon 3 autour duquel gravite un point qui tourne deux fois plus vite.





Observons le dessin que cela fait sur une période entière (entre $[0; 2\pi[$ par exemple) :



Quel magnifique dessin. Cette courbe est appelé une **épicycloïde** ! Mais quelles sont les coordonnées des points de cette courbe.

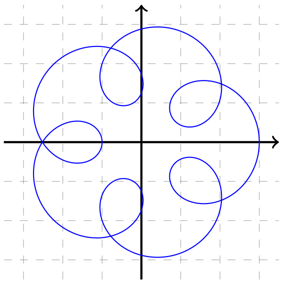
Tout d'abord, les coordonnées du points A sont $(10\cos(t), 10\sin(t))$ (presque par définition des fonctions trigonométriques $\sin$ et $\cos$).

Plaçons nous sur le point $A(t)$. Par rapport à ce point le point $B(t)$ se trouve sur le cercle de rayon 3, mais va deux fois plus vite ; plus savamment dis : sa vitesse angulaire est le double de celle du point $A(t)$. Donc, par rapport au point $A(t)$ les coordonnées de $B(t)$ sont $(3\cos(2t), 3\sin(2t))$.

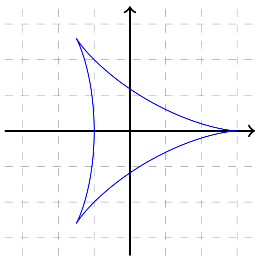
Ainsi de manière absolue, par rapport à l'origine, les coordonnées de cet *épicycloïde*, sont

$$(10\cos(t) + 3\cos(2t), 10\sin(t) + 3\sin(2t))$$

Si on s'amuse à faire varier les rayons et les vitesses angulaires on peut tomber sur de joli dessin :



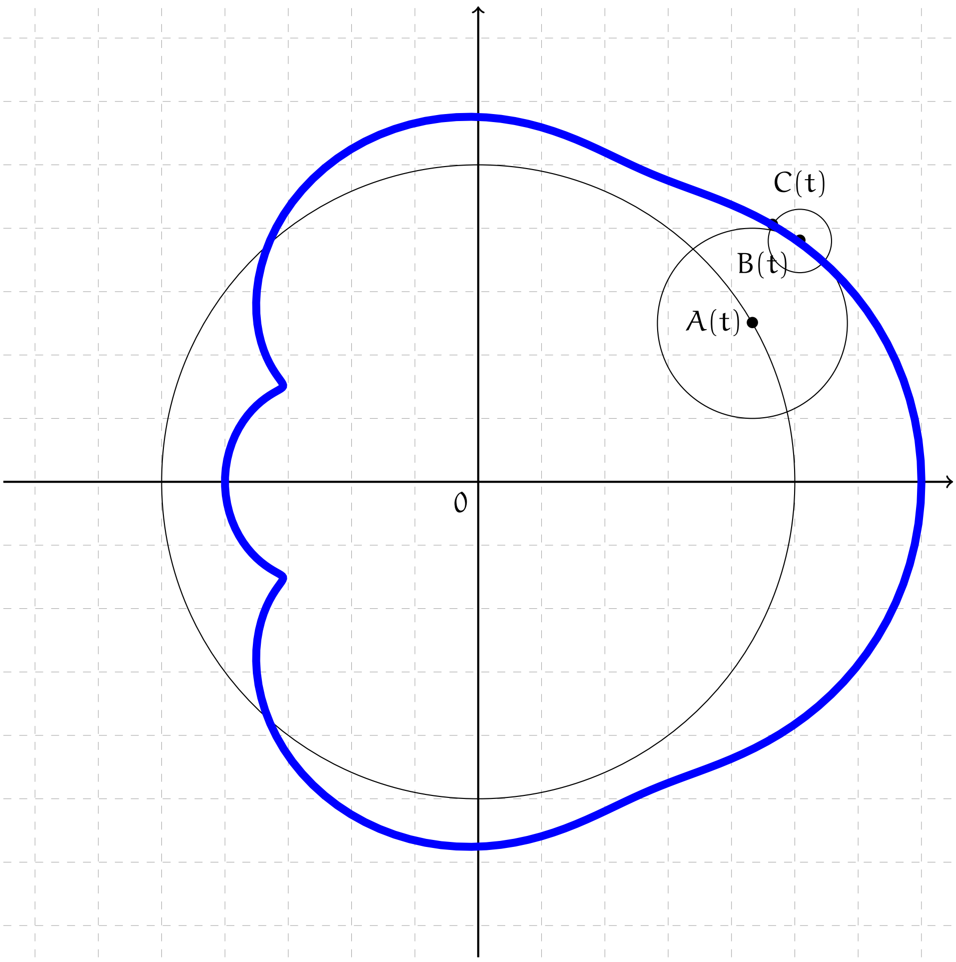
La *ranonculoïde* en forme de fleur.
Le premier cercle de rayon 2 et de vitesse 1.
Le second cercle de rayon 1 et de vitesse 6.



La *deltoïde* en forme de delta.
Le premier cercle de rayon 2 et de vitesse 1.
Le second cercle de rayon 1 et de vitesse -2.

Et pourquoi s'arrêter a deux cercles !

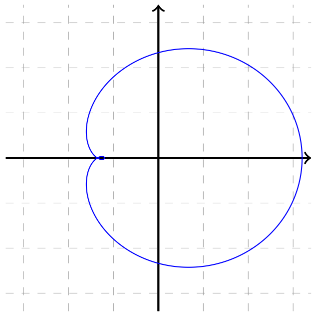
Imaginons qu'un troisième cercle gravite autour du point B, de rayon 1 et de vitesse 5. Voici ce que l'on obtient :



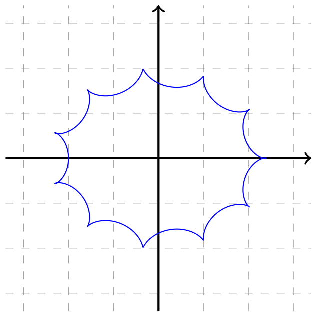
Dont les coordonnées s'obtiennent de la même manière que précédemment :

$$C(t) = (10\cos(t) + 3\cos(2t) + 1\cos(5t), 10\sin(t) + 3\sin(2t) + 1\cos(5t))$$

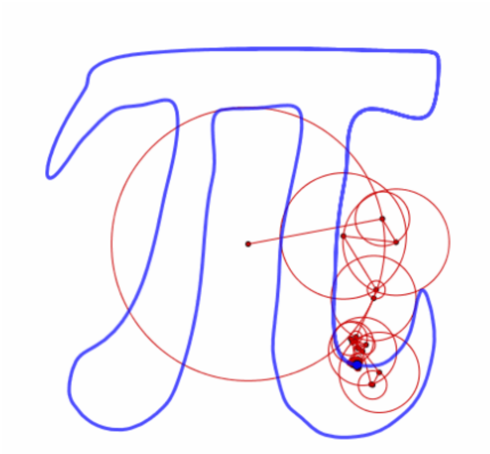
Et la encore, on peut s'amuser à faire varier rayons et vitesse pour obtenir de joli dessin... ou pas !



La *cardioïde* en forme de cœur.
Le premier cercle de rayon 10 et de vitesse 1.
Le second cercle de rayon 5 et de vitesse 2.
Le troisième cercle de rayon 1 et de vitesse -1.



La *trucoïde* en forme de truc.
Le premier cercle de rayon 10 et de vitesse -1.
Le second cercle de rayon 1 et de vitesse 10.
Le troisième cercle de rayon 1 et de vitesse 1.



Vous aurez compris que l'on peut procéder avec autant de cercle que l'on souhaite ! Mais prenons le problème à l'envers.

Etant donné un dessin, peut-on trouver des cercles tournoyant réalisant ce dessin ?

La réponse est oui ! Et c'est ce qui va nous motiver tout au long de ce cours : faire un dessin !

Le concept mathématique qui garantie que cela est possible est une théorie très vaste appelé la

théorie de Fourrier.

Par exemple, si on diminue le nombre de cercle qui approche le dessin, on perd en qualité de la reproduction de cette image. C'est avec ce principe que l'on réalise des compression d'image (on supprime des cercles, cela modifie la qualité mais allège la quantité d'information qu'elle contient).

Vous l'aurez compris, pour arriver à de si magnifique prouesse, il faut de la trigonométrie, beaucoup de trigonométrie... En route !

1. Trigonométrie

1.1 Un nombre un peu spécial

Si l'on observe de plus près le mot trigonométrie de devine de quoi on va parler :

— *tri* pour trois,

— *gono* pour angle (ou coin, c'est la même racine étymologique que *genoux*),

— *métrie* pour mesure

La trigonométrie est la branche des mathématiques qui étudie les triangles. Il s'agit bien de l'objet que vous connaissez depuis l'enfance mais nous le considérerons plus par ses angles que par ses cotés bien que les deux soient très étroitement liés.

Les angles que vous connaissez sont ceux qui se mesure en degrés. Quatre-vingt-dix degrés pour un angle droit, cent quatre vingt pour un angle plat, trois cents soixante pour un tour complet !

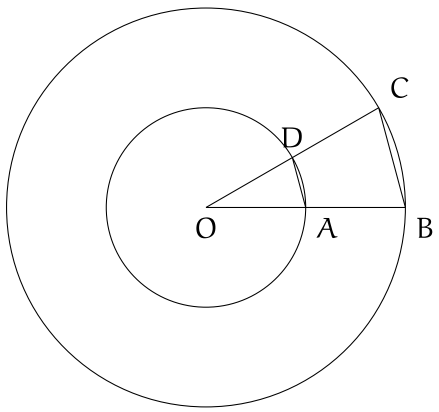
Vous êtes vous demandé d'où venait cette étrange convention ? Pourquoi 360 degrés pour un tour ? On aurait aussi pu convenir que 10 degrés faisait un tour ! La réponse n'est pas très claire mais il semblerait que cette convention trouve ses racines dans l'histoire de l'humanité et aurait la même cause que la raison pour laquelle il y a 60 minutes en une heure ou 60 secondes en une minute : les premiers penseurs de ces mesures viennent d'Amérique du sud et il était coutumier pour nos ancêtres de parler en base soixante plutôt que 10.

Mais à bien des égares, il est apparu nécessaire de convenir d'une autre unité de mesure que les degrés.

Pour la faire naitre, on considère un cercle (qui dit angle dit cercle) et on demande :

Quel est le périmètre d'un cercle ?

Pour tenter d'approcher une réponse, faisons un dessin non pas avec un cercle mais avec deux.



On observe que plus la distance AD est petite plus elle *approche* la longueur de l'arc AD ; on note $\overset{\frown}{AD}$ la longueur de cette arc. De la même manière la longueur de la droite BC est une bonne approximation de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

En utilisant le bon vieux théorème de Thalès, on montre que $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AD}{BC}$. En approchant la taille des arcs par celle des segments et en faisant une petite règle de trois on trouve

$$\overset{\frown}{BC} = \frac{OA}{OB}\overset{\frown}{AD}$$

Revenons à présent à la question du calcul du périmètre d'un cercle. On peut diviser le cercle en *morceau* très petit aussi petit que la longueur $\overset{\frown}{BC}$ (ou $\overset{\frown}{AD}$ suivant le cercle que vous regardez). Donc la somme de tous ces morceaux donnent le périmètre du cercle. Mais la formule déterminée précédemment montre que le périmètre du petit cercle, vu comme la somme de plein de petit morceau d'arc $\overset{\frown}{BC}$, est proportionnelle à la somme de plein de petit morceau $\overset{\frown}{AD}$. En effet le rapport $\dfrac{OA}{OB}$ reste constant en fonction du nombre de morceau. D'ailleurs, nous pouvons être plus précis car OA est en fait le rayon du petit cercle tandis que OB est le rayon du grand ! Si on note r le rayon du petit cercle, p son périmètre et R le rayon du grand cercle, P son périmètre alors la précédente formule s'écrit $p = \dfrac{r}{R}P$. Jouons un peu avec cette formule. On note $D = 2R$ et $d = 2r$ les diamètres des cercles.

$$\begin{aligned} p = \frac{r}{R}P &\iff p = \frac{2r}{2R}P \\ &\iff p = \frac{d}{D}P \\ &\iff \frac{p}{d} = \frac{P}{D} \end{aligned}$$

Nous venons donc d'observer que le rapport du périmètre par le diamètre est toujours égale à la même valeur.

Définition

On note π le rapport du périmètre d'un cercle par son diamètre. Ce nombre ne dépend pas du cercle. On a l'estimation suivante :

$$\pi \simeq 3.141592...$$

Le symbole π se lit *pi* et correspond à la lettre grecque p (pour périmètre). On peut démontrer, avec souffrance, que $\pi \in \mathbb{R}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Le nombre π est une bonne base pour le travail avec les angles.

Définition

On mesure les angles en *radian*. Un tour complet (360 degrés) correspond à 2π.

Puisqu'il y a un rapport proportionnel entre les mesures en degrés et en radian on a les équivalence suivantes.

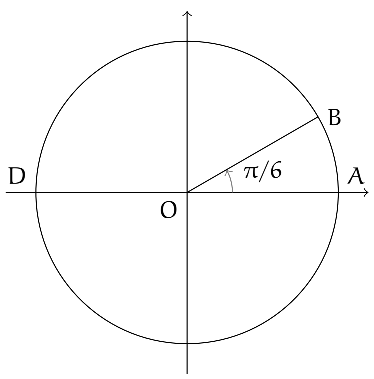
Degrés	0	30	45	60	90	180	360
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

1.2 Le cercle trigonométrique

L'outil centrale de la trigonométrie est le cercle trigonométrique.

Définition

Un **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1.



Lorsque l'on souhaite faire, comprendre, voir de la trigonométrie, on représente un cercle trigonométrique centré en l'origine d'un repère cartésien et on représente l'angle sur lequel on souhaite faire des observations ou calcul. Sur l'exemple on a représenté $\frac{\pi}{6}$.

Définition

Le **sens trigonométrique** ou **sens direct** correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre.

L'angle $\widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$ et l'angle $\widehat{BOA} = -\dfrac{\pi}{6}$.

Qu'en est-il des angles π et $-\pi$. Sur la représentation ci-contre, c'est deux angles aboutissent au même point : le D. On est très fortement amené à penser que *sur le cercle trigonométrique* $\pi = -\pi$. C'est d'ailleurs vrai. Mais attention ! Le nombre réel $\pi \simeq 3.14$ tandis que le nombre réel $-\pi \simeq -3.14$. Ils sont bel et bien différent mais *sur le cercle trigonométrique* ils sont les même. Comme écrire $\pi = -\pi$ pique un peu les yeux on introduit une notation.

Définition

Lorsque l'on travaille sur le cercle, on considère les angles à 2π près. Si deux angles α et β sont égaux sur le cercle trigonométrique on dira qu'ils sont égaux **modulo** 2π on écrira $\alpha = \beta \quad [2\pi]$ ou $\alpha \equiv_{2\pi} \beta$. Cela signifie que $\alpha - \beta = 2\pi \times k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Dans cette définition le nombre k représente le nombre de tour (on rappel qu'un tour correspond à un angle de 2π radian) que l'on fait. Ainsi nous pouvons écrire $\pi \equiv_{2\pi} -\pi$ car $\pi - (-\pi) = 2\pi = 2\pi \times 1$; autrement dit : les angles π et $-\pi$ sont les mêmes à un tour de cercle près.

Autre exemple :

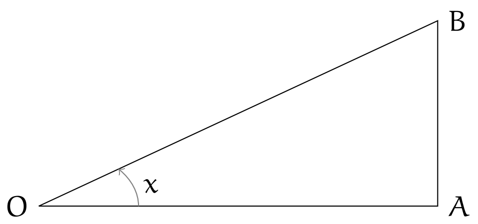
$$\frac{2023\pi}{3} = \frac{(674 \times 3 + 1)\pi}{3} = \frac{674 \times 3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 674\pi + \frac{\pi}{3}$$

En d'autre terme $\frac{2023\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont les mêmes angles à 337 tours près ($337 = 674 \div 2$) : $\frac{2023\pi}{3} \equiv_{2\pi} \frac{\pi}{3}$

1.3 Opérations trigonométriques

Définition

Soit OAB un triangle rectangle en A. Notons x l'angle $\widehat{AOB}$.



- Le **cosinus** de l'angle x est le rapport $\frac{OA}{OB}$.
- Le **sinus** de l'angle x est le rapport $\frac{AB}{OB}$.
- La **tangente** de l'angle x est le rapport $\frac{AB}{OA}$.

Voici un fameux moyen mnémotechnique pour retenir ces formules :

CASSE TOI

Quelques explications s'impose :

- Dans un triangle rectangle le plus grand des cotés est appelé **l'hypoténuse**.
- Le **coté adjacent** à l'angle x est OA. C'est le coté adjacent à l'angle x et l'angle droit.
- Le **coté opposé** à l'angle x est AB. C'est le coté qui est "en face" de l'angle x.

L'angle opposé à x est adjacent à y et inversement.

Le fameux *casse toi* s'écrit **CAH SOH TOA** :

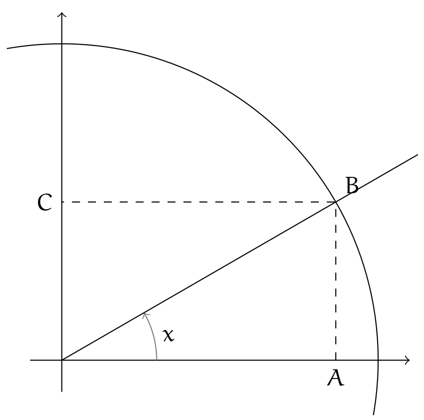
CAH : le **Cosinus** est le rapport du coté **Adjacent** par l'**Hypoténuse**.

SOH : le **Sinus** est le rapport du coté **Opposé** par l'**Hypoténuse**.

TOA : la **Tangente** est le rapport du coté **Opposé** par le coté **Adjacent**.

Nous n'allons pas plus surcharger ce cours déjà très empreinte de géométrie, mais sans trop souffrir et à l'aide du théorème de Thalès, on peut montrer que les longueur des cotés n'importe pas. Seule les mesures des angles sont importants. Puisque c'est ainsi, on va considérer, pour travailler avec ces objets, des triangles rectangles dont l'hypoténuse fait 1, ainsi nous n'aurons plus à utiliser des fractions pour le cosinus et le sinus.

Faisons tout de suite le liens avec le cercle trigonométrique.



En appliquant les formules, on a $\cos(x) = \frac{OA}{OB}$ mais OB est un rayon du cercle trigonométrique, qui est par définition de rayon 1. Donc $\cos(x) = OA$.

De même $\sin(x) = \frac{AB}{OB} = AB = OC$.

Ainsi le cosinus et le sinus d'un angle représentent respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point d'intersection entre le cercle trigonométrique et le droite formant l'angle souhaité avec l'axe des abscisses.

On observe alors que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On va donc mettre cette fonction de coté et nous concentrer sur le deux autres.

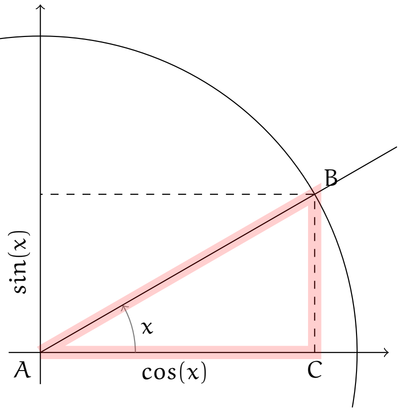
1.4 Formulaire

Proposition Pythagore

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Démonstration.



On a $AC^2 + BC^2 = AB^2$ (théorème de Pythagore) soit encore $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ $\square$

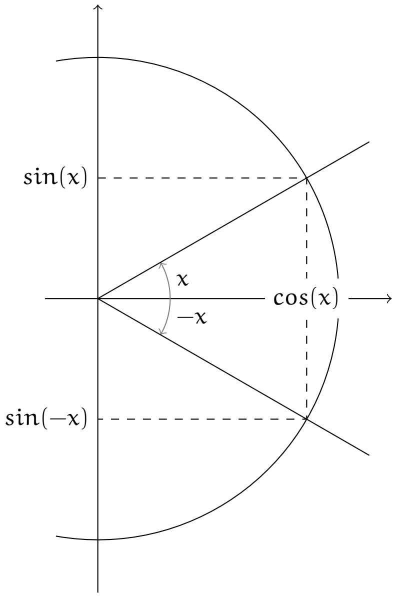
Proposition

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Démonstration.



$\square$

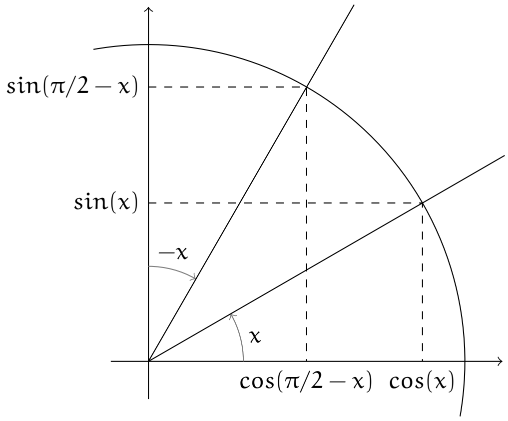
Proposition

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Démonstration.



$\square$

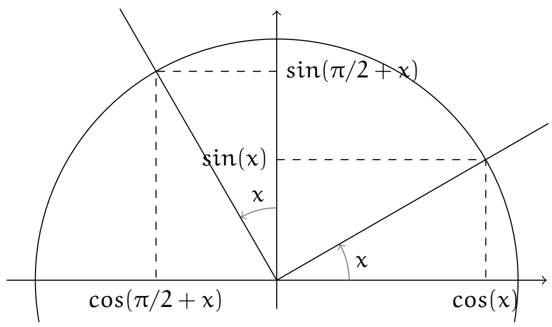
Proposition

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

Démonstration.



$\square$

Proposition

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

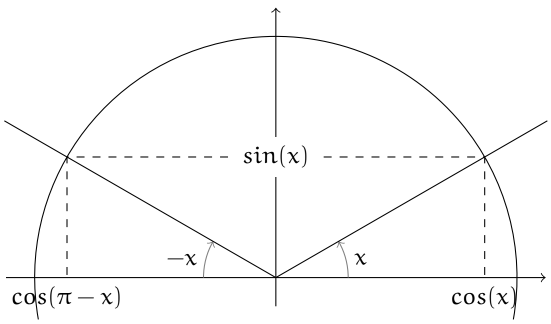
Proposition

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

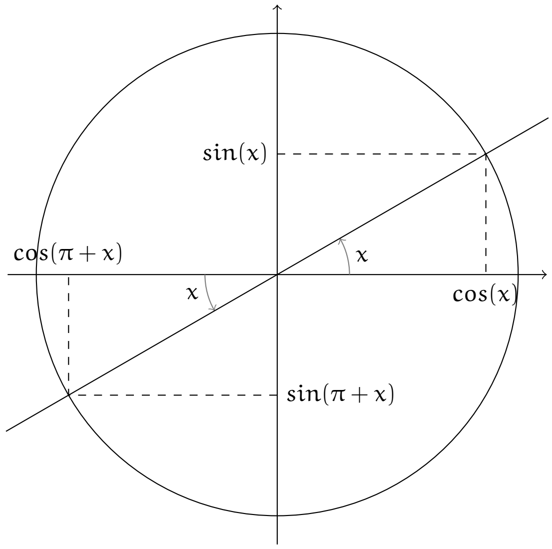
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

Démonstration.



□

Démonstration.



□

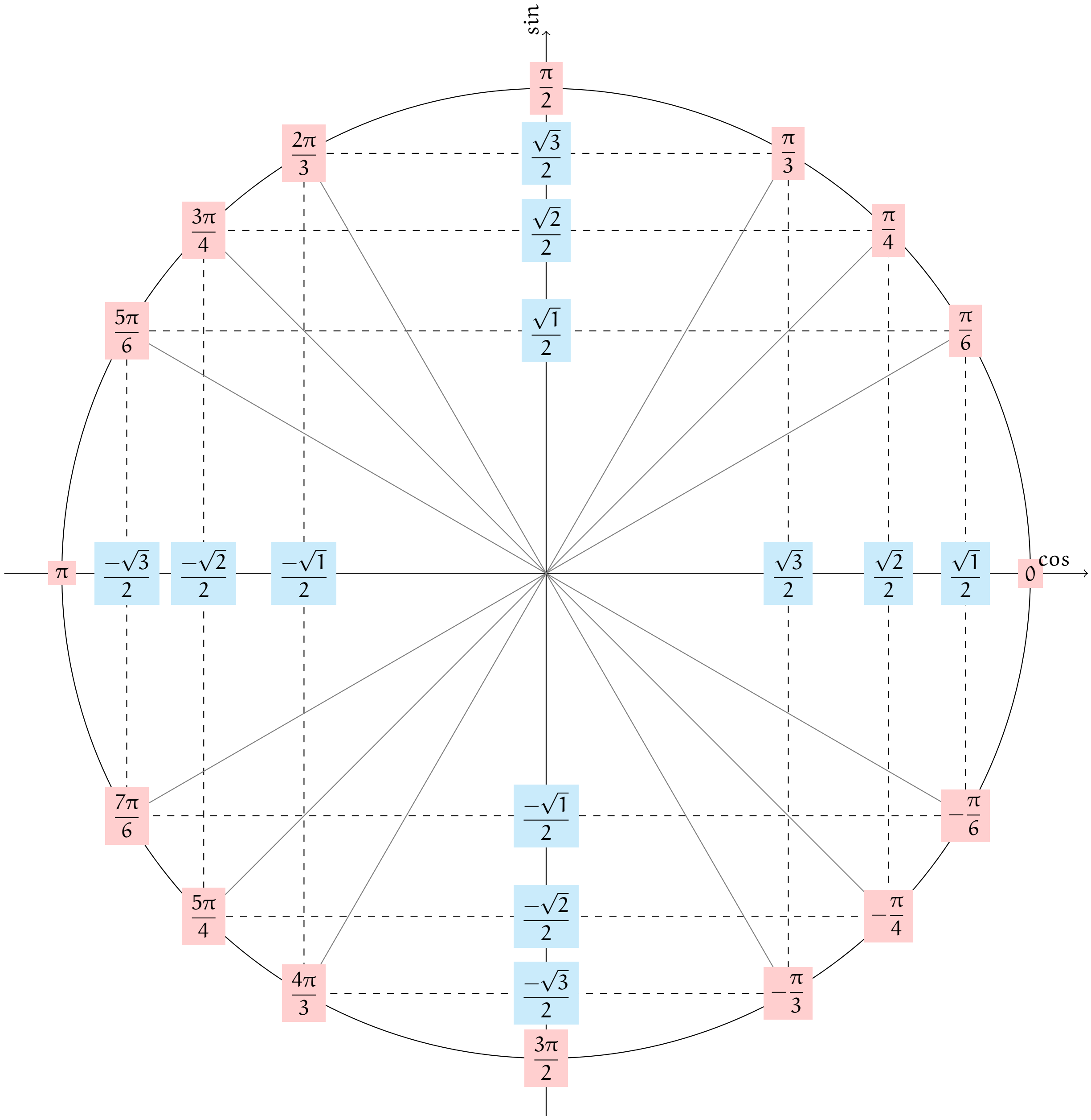
De cette dernière formule on peut observer que $\cos(x + 2\pi) = \cos((x + \pi) + \pi) = -\cos(x + \pi) = \cos(x)$; de même pour le sinus. On savait cependant déjà que $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ puisque $x \equiv_{2\pi} x + 2\pi$.

Proposition

x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstration. Par de petits jeu géométrique on peut déterminer ces valeurs. Ce n'est pas très difficile mais pas vraiment pertinent. □

En jumelant ces derniers résultats avec les précédents, on peut déterminer le cosinus et le sinus de bien plus de valeurs.



Formules de duplication

Vous pensiez avoir tranquillement survécu à ces quelques formules de trigonométrie ? Que nenni !

Théorème

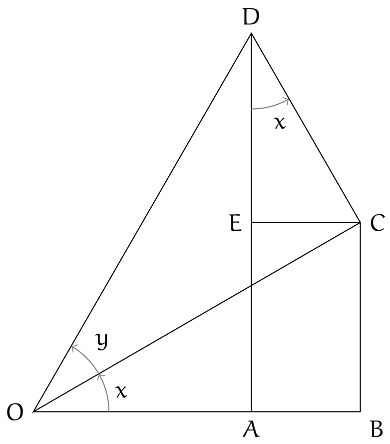
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

Démonstration.

On considère OBC et OCD des triangles rectangles respectivement en B et C tel que $\widehat{BOC} = x$ et $\widehat{COD} = y$. On projette le point D sur la droite (OB) que l'on nomme A et on projette le point C sur la droite (AD) que l'on nomme E. Un résultat bien connu sur les triangles semblables permet de justifier que $\widehat{CDE} = x$. Sur un dessin tout devrait s'éclairer.



Faisons de la trigonométrie dans cette figure :

Dans le triangle OBC **:** $\cos(x) = \dfrac{OB}{OC}$ et $\sin(x) = \dfrac{BC}{OC}$.

Dans le triangle DEC **:** $\cos(x) = \dfrac{DE}{DC}$ et $\sin(x) = \dfrac{EC}{DC}$

Dans le triangle OCD **:** $\cos(y) = \dfrac{OC}{OD}$ et $\sin(y) = \dfrac{DC}{OD}$

Dans le rectangle ABCE **:** $EC = AB$ et $EA = BC$

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \frac{OA}{OD} \\
&= \frac{OB-AB}{OD} \\
&= \frac{OB-EC}{OD} \\
&= \frac{OB}{OD} - \frac{EC}{OD} \\
&= \frac{OB}{OC} \times \frac{OC}{OD} - \frac{EC}{DC} \times \frac{DC}{OD} \\
&= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \frac{AD}{OD} \\
&= \frac{AE+ED}{OD} \\
&= \frac{BC+ED}{OD} \\
&= \frac{BC}{OD} + \frac{ED}{OD} \\
&= \frac{BC}{OC} \times \frac{OC}{OD} + \frac{ED}{DC} \times \frac{DC}{OD} \\
&= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

□

Corollaire

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) - \sin(x-y)\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Démonstration. On ne va pas toutes les démontrer. Elles se déduisent des formules précédentes. Par exemple puisque $\cos(-y) = \cos(y)$ et $\sin(-y) = -\sin(y)$ alors en remplaçant X par x et Y par $-y$ dans la formule $\sin(X+Y) = \sin(X)\cos(Y) + \cos(X)\sin(Y)$ on trouve $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$.

Autre exemple, en prenant $x = y$ dans la formule $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ on obtient $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. Sachant que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ on en déduit que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$; ce qui donne $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$ soit encore $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$. □

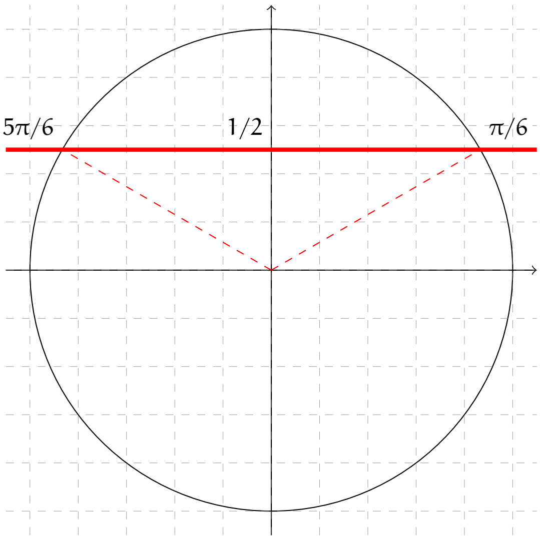
Dans la vie de tous les jours, on n'apprend pas toutes ces formules ! Il faut savoir que ces formules existent, sans forcement connaitre par cœur la formule.

1.5 Équations et inéquations trigonométriques

Équations trigonométriques

On cherche à résoudre des équations de la forme $\cos(x) = 0.7$ ou $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Raisonnons sur cette dernière. Pour résoudre ces équations faisant intervenir des sinus ou cosinus est l'éternel *cercle trigonométrique*. **Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses et le sinus sur l'axe des ordonnées**.



Su le cercle trigonométrique, on voit que l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ admet deux solutions, dont le formulaire nous souffle qu'il s'agit de $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Voilà, c'est fini... Ah ! Non ! Car sur le cercle trigonométrique l'angle $\frac{\pi}{6}$ et l'angle $\frac{13\pi}{6}$ sont positionnés au même endroit. Précisément $\frac{\pi}{6} \equiv_{2\pi} \frac{13\pi}{6}$. En d'autre terme on a fait un tour de cercle puisque $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$.

Pourquoi s'arrêter à un tour, on pourrait en faire 2 ou 1983, le sinus vaudrait toujours $\frac{1}{2}$. Une manière élégante (pompeuse) d'écrire toutes les solutions est donc la suivante

Les solutions de l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sont de la forme $x_{1,k} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $x_{2,k} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Imaginons à présent que l'on souhaite trouver toutes les solutions de l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ avec $x \in \left[16\pi; \frac{33\pi}{2}\right[$. Puisque nous avons trouver toutes les solutions (dans $\mathbb{R}$), le problème revient à trouver quel $k \in \mathbb{Z}$ il faut choisir.

Prenons la première forme $x_{1,k}$. Il s'agit donc de trouver k pour avoir $x_{1,k} \in \left[16\pi; \frac{33\pi}{2}\right[$.

$$\begin{aligned}
x_{1,k} \in \left[16\pi; \frac{33\pi}{2}\right[\quad &\Leftrightarrow \quad 16\pi \leqslant x_{1,k} \leqslant \frac{33\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 16\pi \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant \frac{33\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 16\pi - \frac{\pi}{6} \leqslant 2k\pi \leqslant \frac{33\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{95\pi}{6} \leqslant 2k\pi \leqslant \frac{98\pi}{6} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{95}{6} \leqslant 2k \leqslant \frac{98}{6} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{95}{12} \leqslant k \leqslant \frac{98}{12}
\end{aligned}$$

A l'aide de la calculatrice, on observe que $\frac{95}{12} \simeq 7.92$ et $\frac{98}{12} \simeq 8.17$. Or, k doit être un nombre entier. Le seul nombre entier entre 7.92 et 8.17 est le nombre 8. Il faut donc choisir le nombre $k = 8$. Dans ce cas la solution est

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2 \times 8\pi = \frac{97\pi}{6}$$

Prenons à présent la seconde forme $x_{2,k}$ et raisonnons de la même manière.

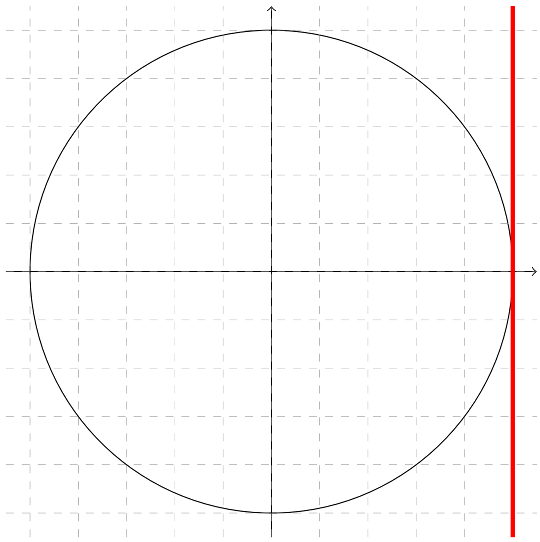
$$\begin{aligned}
x_{2,k} \in \left[16\pi; \frac{33\pi}{2}\right[\quad &\Leftrightarrow \quad 16\pi \leqslant x_{2,k} \leqslant \frac{33\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 16\pi \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant \frac{33\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 16\pi - \frac{5\pi}{6} \leqslant 2k\pi \leqslant \frac{33\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{91\pi}{6} \leqslant 2k\pi \leqslant \frac{94\pi}{6} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{91}{6} \leqslant 2k \leqslant \frac{94}{6} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{91}{12} \leqslant k \leqslant \frac{94}{12}
\end{aligned}$$

Mais $\frac{91}{12} \simeq 7.58$ et $\frac{94}{12} \simeq 7.83$. Dans ce cas, il n'existe aucun nombre entier k satisfaisant cette inéquation.

En conclusion,

$$\left.\begin{array}{r} \sin(x) = \frac{1}{2} \\ x \in \left[16\pi; \frac{33\pi}{2}\right[\end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{97\pi}{6}$$

Prenons un autre exemple et cherchons à résoudre l'équation $\cos(x) = 1$. Exactement comme précédemment, on utilise le cercle trigonométrique pour *voir* ce qui se passe.



Su le cercle trigonométrique, on voit que l'équation $\cos(x) = 1$ admet une unique solution à savoir $x = 0$.

Comme précédemment, on peut "tourner", ce qui se traduit par l'ajout de $+2k\pi$.

En conclusion l'équation $\cos(x) = 1$ admet pour solution

$$x_k = 2k\pi$$

Le même type de manipulation permet, si l'intervalle est spécifié, de trouver des solutions spécifiques.

Que dire de l'équation $\cos(x) = 1.01$? On observe sur le dessin, qu'il n'y a, dans ce cas, aucune intersection entre la droite $x = 1.01$ et le cercle trigonométrique et donc l'équation $\cos(x) = 1.01$ n'admet aucune solution.

Faisons un cours de mathématiques avec un théorème (que nous venons de démontrer en partie par les exemples précédent).

Théorème — Équation en sinus

L'équation $\sin(x) = a$ **pour** $a \in]-1;1[$ admet deux solutions sur $]-\pi;\pi[$ notées x_1 et x_2.

Toutes les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x_{1,k} = x_1 + 2k\pi, \qquad \text{et} \qquad x_{2,k} = x_2 + 2k\pi$$

pour $k \in \mathbb{Z}$.

L'équation $\sin(x) = 1$ admet pour solutions $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

L'équation $\sin(x) = -1$ admet pour solutions $-\frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

L'équation $\sin(x) = a$ **pour** $a \notin [-1;1]$ n'admet aucune solution réelle.

Théorème — Équation en cosinus

L'équation $\cos(x) = a$ **pour** $a \in]-1;1[$ admet deux solutions sur $]-\pi;\pi[$ notées x_1 et x_2.

Toutes les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x_{1,k} = x_1 + 2k\pi, \qquad \text{et} \qquad x_{2,k} = x_2 + 2k\pi$$

pour $k \in \mathbb{Z}$.

L'équation $\cos(x) = 1$ admet pour solutions $2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

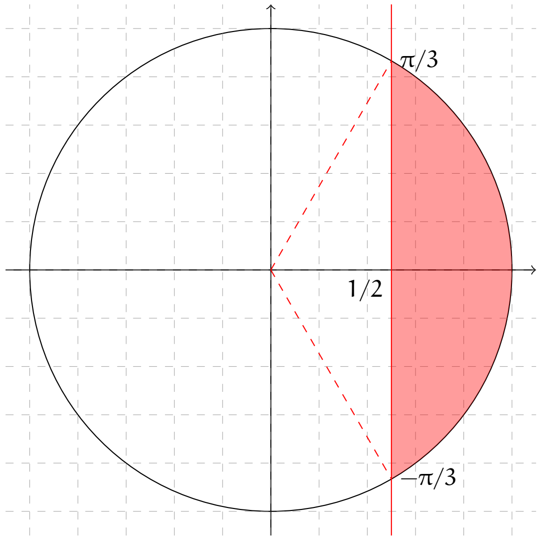
L'équation $\cos(x) = -1$ admet pour solutions $\pi + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

L'équation $\cos(x) = a$ **pour** $a \notin [-1;1]$ n'admet aucune solution réelle.

Dans la pratique on n'utilise pas ces théorèmes mais plutôt la méthode décrite dans les exemples précédents (le cercle trigonométrique est votre meilleur ami !).

Inéquations trigonométriques

A présent on cherche à résoudre une inéquation de la forme $\cos(x) \geqslant \frac{1}{2}$. Encore une fois, un dessin éclaire la situation.



Sur le dessin, il apparait clairement que touts les angles de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ ont leur cosinus supérieur ou égale à $\frac{1}{2}$. Exactement comme précédemment, il faut "penser" à tourner.

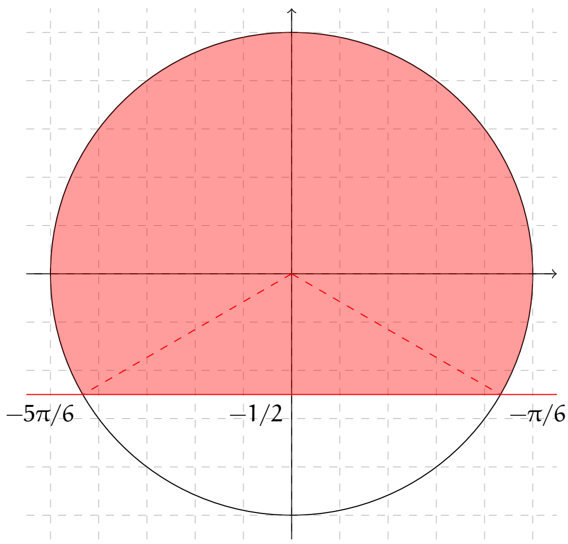
En conclusion, toutes les solution réelles sont des intervalles de la forme

$$\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$$

pour $k \in \mathbb{Z}$.

Attention, lorsque l'on décrit un intervalle $[a; b]$ il faut que $a < b$.

Prenons à présent l'inéquation $\sin(x) > -\frac{1}{2}$.



A l'aide du dessin on serait tenté d'écrire qu'un intervalle solution est $\left]-\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}\right[$ mais dans ce cas, la borne inférieur de cet intervalle est plus grande que la borne supérieur. C'est une erreur. Il faut soit écrire $\left]-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right[$ où $\left]-\frac{13\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}\right[$ pour respecter les intervalles.

2.1 Les signaux sinusoïdaux

Retour aux épicycloïde

Revenons à nos épicycloïdes (*cf.* Introduction). Le but est de décrire un dessin quelconque à l'aide de cercle.

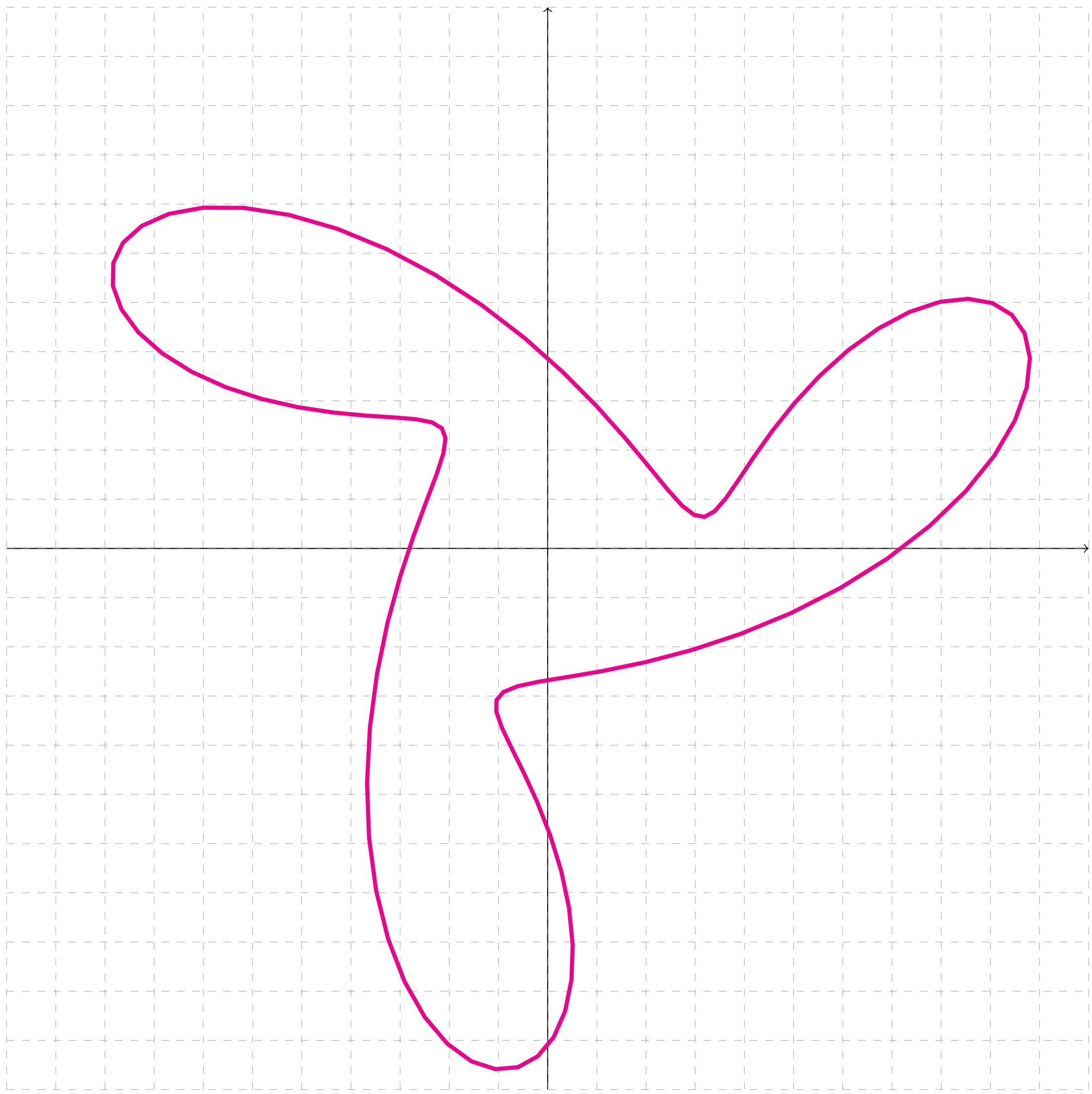
Nous avions observé que si un point $M(t)$ gravite autour d'un cercle de rayon a_3 à une vitesse n_3, que ce cercle gravite lui même autour d'un cercle de rayon a_2 à une vitesse $n2$ qui gravite lui même autour d'un cercle de rayon a_1 à une vitesse n_1 alors les expressions de l'abscisse et de l'ordonnée de ce point sont données par les formules :

$$x(t) = a_1\cos(n_1t) + a_2\cos(n_2t) + a_3\cos(n_3t)$$
$$y(t) = a_1\sin(n_1t) + a_2\sin(n_2t) + a_3\sin(n_3t)$$

La **théorie de Fourrier** que nous explorerons plus tard nous garantie que l'on peut peut trouver des coefficients a_n, appelé coefficient de Fourrier, tel que les coordonnés des points $M(t)$ s'expriment par les élégantes formules

$$\begin{array}{lllllll} x(t) = & a_0 + & a_1\cos(1t)+ & a_2\cos(2t)+ & a_3\cos(3t)+ & a_4\cos(4t)+ & \cdots \\ y(t) = & & a_1\sin(1t)+ & a_2\sin(2t)+ & a_3\sin(3t)+ & a_4\sin(4t)+ & \cdots \end{array}$$

Prenons l'exemple de la *handspineroïde*[1]



1. Exemple tiré de la vidéo de *Eljj* disponible sur `https://www.youtube.com/watch?v=uazPP0ny3XQ`

ABRACADABRA ! Boite magique : coefficient de Fourrier ! On trouve que

$$x(t) = 6\cos(t) + 1.5\cos(2t) + 2\cos(4t) + 2.6\sin(2t)$$
$$y(t) = 6\sin(t) - 1.5\sin(2t) + 2\sin(4t) + 2.6\cos(2t)$$

Zut flute et crotte ! Pour avoir nos jolis cercles qui tournent il faut que

1. l'expression de l'abscisse ne comporte que des cosinus, ce qui n'est pas le cas ici.
2. l'expression de l'ordonnée ne comporte que des sinus, ce qui n'est pas le cas ici
3. les mêmes coefficients apparaissent pour les même vitesse angulaire de l'abscisse et de l'ordonnée, ce qui n'est pas le cas ici (le coefficient en x du cercle de vitesse 2 est $+1.5$ tandis qu'il est de -1.5 en y).

Donc... c'est pas bon. Mais la théorie de Fourrier est implacable. C'est la réponse.
Nous avons développé quelques compétences en trigonométrie. Utilisons les !

$$\begin{aligned}
x(t) &= 6\cos(t) + 1.5\cos(2t) + 2\cos(4t) + 2.6\sin(2t) \\
&= 6\cos(t) + 1.5\cos(2t) + 2.6\sin(2t) + 2\cos(4t) \\
&= 6\cos(t) + 3(0.5\cos(2t) + 0.87\sin(2t)) + 2\cos(4t) \\
&= 6\cos(t) + 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2t) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2t)\right) + 2\cos(4t) \\
&= 6\cos(t) + 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos(4t)
\end{aligned}$$

Magnifique mais limite magique. Quelle idée de factoriser par 3 ? Et comme par hasard $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \simeq 0.87$. Mais si on change les valeur comment on fait ?

En fait on peut montrer que

$$\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) = A'\cos(\omega t + \varphi') = A\sin(\omega t + \varphi)$$

On peut même déterminer A et φ en fonction de α et β mais pour comprendre ce principe nous aurons besoin de Arctan et de la forme polaire des nombres complexes. PAS DE PANIQUE ! Nous aurons le temps d'y arriver.

Quoi qu'il en soit nous retrouvons un objet bien familier : le **signal sinusoïdale**. Ce sont des fonctions de la forme

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

où

A désigne l'amplitude : la fonction $\sin$ oscille entre -1 et 1. Pour amplifier ce signal on le multiplie par un réel A de sorte qu'il oscille entre $-A$ et A.

ω désigne la pulsation : c'est le nombre de fois que le signal se répète sur un intervalle de temps 1. Elle est définie par $\omega = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période du signal.

φ désigne la phase : c'est le décalage du signal par rapport à l'origine ; une avance ou un retard de $-\frac{\varphi}{\omega}$.

Formes algébriques des épicycloïdes

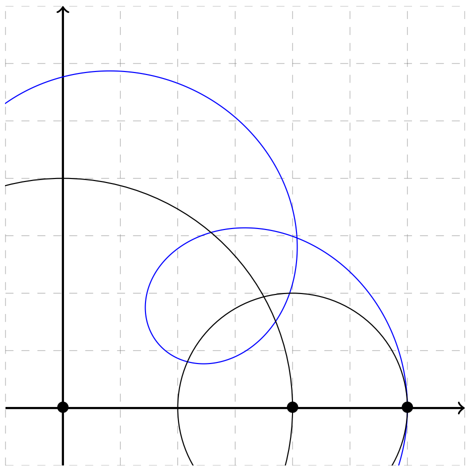
Nous avons un petit peu menti lorsque nous avons décrit la forme algébrique des épicycloïdes. Nous avons en effet dis que les coordonnées sont de la forme

$$\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + a_1\cos(1t) + a_2\cos(2t) + a_3\cos(3t) + a_4\cos(4t) + \cdots \\
y(t) &= a_1\sin(1t) + a_2\sin(2t) + a_3\sin(3t) + a_4\sin(4t) + \cdots
\end{aligned}$$

Mais comme nous venons de le voir, ce n'est pas tout à fait le cas, puisque des phases interviennent. La véritable forme est donc

$$
\begin{array}{llllll}
x(t) = & a_0 + & a_1\cos(1t+\varphi_1) + & a_2\cos(2t+\varphi_2) + & a_3\cos(3t+\varphi_3) + & a_4\cos(4t+\varphi_4) + \cdots \\
y(t) = & & a_1\sin(1t+\varphi_1) + & a_2\sin(2t+\varphi_2) + & a_3\sin(3t+\varphi_3) + & a_4\sin(4t+\varphi_4) + \cdots
\end{array}
$$

A quoi correspondent ces phases dans le jeu des cercles tournoyant.

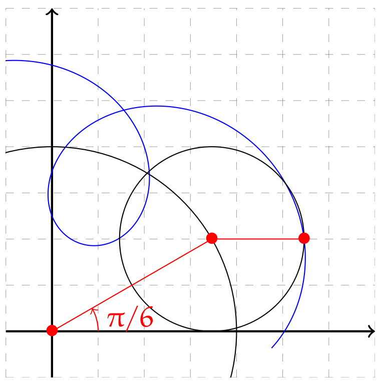


Prenons la *ranonculoïde* définie avec deux cercles : un de rayon 2 et de vitesse 1 et un de rayon 1 et de vitesse 6.

C'est à dire que l'équation algébrique de cette courbe est

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2\cos(t) + \cos(6t) \\
y(t) &= 2\sin(t) + \sin(6t)
\end{aligned}
$$

Lorsque nous avions dessiné cette courbe, et toutes les courbes que nous avions décrites, nous avions fait une hypothèse (cachée) qui est qu'au départ (à l'instant $t = 0$), tous les cercles sont alignés sur l'axe des abscisses.



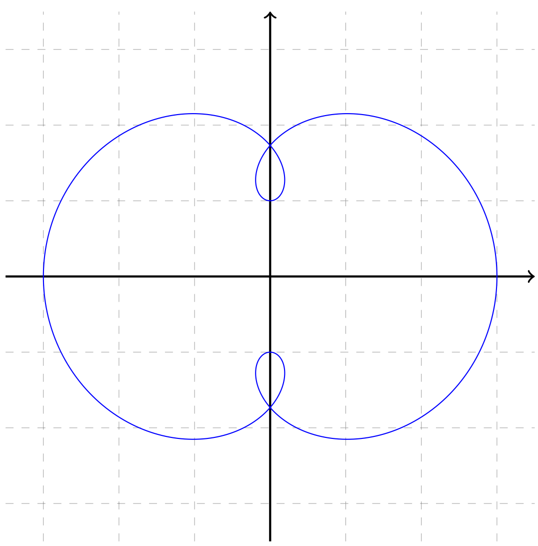
Rajouter une phase, correspond donc à faire en sorte que le point de départ ne soit pas aligné avec l'abscisse. Rajoutons au premier cercle une phase de $\frac{\pi}{6}$.

C'est à dire que l'équation algébrique de cette nouvelle courbe est

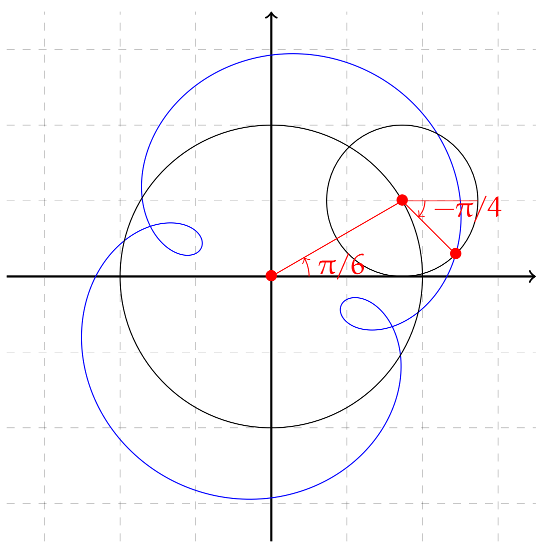
$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos(6t) \\
y(t) &= 2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin(6t)
\end{aligned}
$$

Voici une épicycloïde sans et avec phases.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2\cos(t) + \cos(3t) \\
y(t) &= 2\sin(t) + \sin(3t)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) \\
y(t) &= 2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$



Nos problématiques étaient les suivantes :

1. Que l'expression de l'abscisse ne comporte que des cosinus, ce qui n'est pas le cas ici.
2. Que l'expression de l'ordonnée ne comporte que des sinus, ce qui n'est pas le cas ici
3. Que les mêmes coefficients apparaissent pour les même vitesse angulaire de l'abscisse et de l'ordonnée, ce qui n'est pas le cas ici (le coefficient en x du cercle de vitesse 2 est $+1.5$ tandis qu'il est de -1.5 en y).

La trigonométrie avancé nous permettra de résoudre les deux premiers points et les nombres complexes résoudrons le troisième.

Commençons par s'armer d'outils pour appréhender les deux premiers points à l'aide des fonctions réciproques.

2.2 Les fonctions réciproques

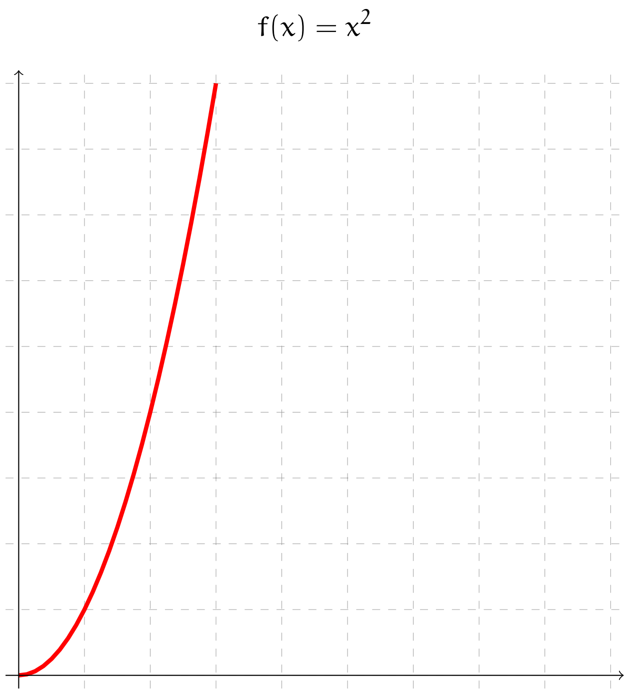
Revenons à des maths moins piquantes [2].

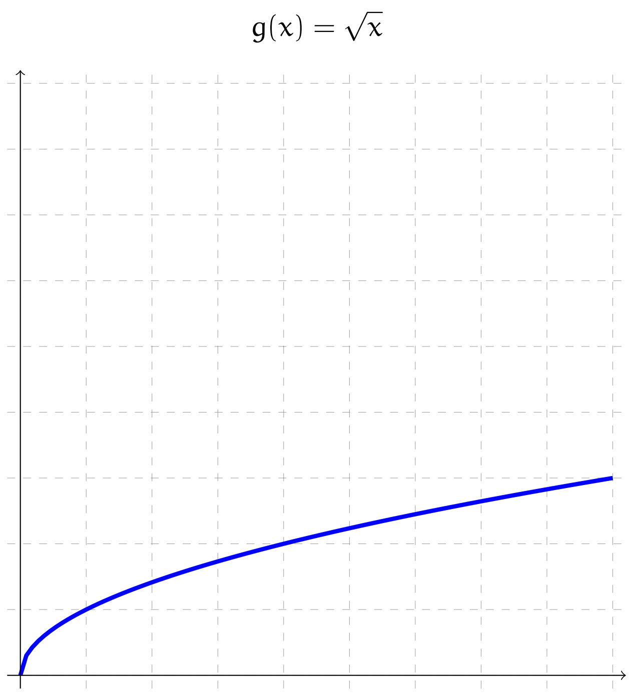
Prenons une bonne vielle fonction : $f(x) = x^2$. On sait que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il n'y a aucune contrainte à prendre n'importe quelle nombre réelle (tandis que la fonction inverse $\frac{1}{x}$ possède une valeur interdite par exemple).

Au lieu de la regarder sur $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ regardons la uniquement sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$. Comme pour la trigonométrie, un dessin est souvent bien plus éloquent. La visualisation des fonctions passent par la représentation cartésienne (graphique).

En tant que fonction de $\mathbb{R}_+$, la représentation graphique est naturellement cette demi-parabole.

Faisons de même avec la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.





Un œil aguerrie observera que les deux courbes sont très ressemblante. En fait l'une est l'autre en inversant l'axe des abscisse et l'axe des ordonnée. La raison principale est que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\sqrt{x}^2 = x, \qquad \sqrt{x^2} = x$$

soit encore

$$f(g(x)) = x, \qquad g(f(x)) = x$$

Quand deux fonctions f et g vérifie cette propriété on dit qu'elle sont réciproque l'une de l'autre.

2. Soyons honnête, la trigonométrie, ça pique... fort

Définition

Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ tel que d'une part pour tout $x \in X$, $g(f(x)) = x$ et d'autre part pour tout $y \in Y$, $f(g(y)) = y$ alors on dira que f et g sont des **fonctions réciproques** l'une de l'autre.

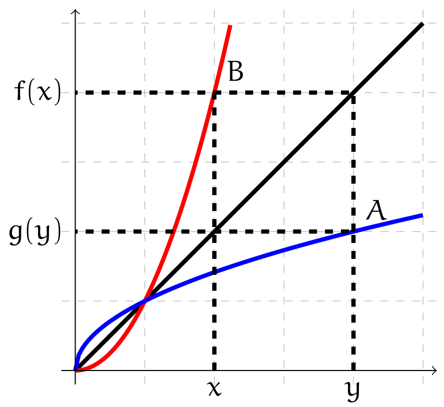
En d'autre terme, la fonction carré ($\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$) et la fonction racine carré (sur les même domaines) sont réciproques l'une de l'autre.

L'observation de symétrie (inversion des axes) est dans ce cas toujours vraie.

Proposition

Soient f et g des fonctions réciproques l'une de l'autre alors les courbes représentatives de ces fonctions sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Démonstration.



Considérons un point x sur l'axe des abscisse. Puisque les fonctions f et g sont réciproque $g(f(x)) = x$; autrement dit l'image par g de $y = f(x)$ est x. Ainsi les coordonnées du point A sont $(y, g(y)) = (f(x), x)$.

Pour montrer que la symétrie, il s'agit d'observer que les coordonnée du milieu du segment $[AB]$ a la même valeur pour son abscisse et son ordonnée.

Le milieu a pour coordonnés

$$\left(\frac{x+y}{2}; \frac{f(x)+g(y)}{2}\right) = \left(\frac{x+f(x)}{2}; \frac{f(x)+x}{2}\right)$$

□

Nous avons la définition. Nous avons une caractéristique géométrique. Mais nous ne savons toujours pas comment trouver une réciproque ni même si cela est possible.

Dans la pratique, il est très difficile de trouver une forme explicite d'une réciproque. Dans de rare cas cela est possible mais globalement impossible sans un ordinateur.

Pratiquement, on pose $f(x) = y$ et on cherche à résoudre cette équation d'inconnue x. La solution, unique si elle existe, s'exprime en fonction de y. Cette fonction de y est la fonction réciproque.

La question reviens donc à se demander : quand pouvons nous demander à un ordinateur d'essayer de faire des calcul ?

Autrement dis : comment garantir que l'on peut trouver une réciproque ?

Théorème

Une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle J admet une fonction réciproque.

Démonstration. C'est une conséquence du corolaire des valeurs intermédiaire qui stipule qu'une fonction f strictement monotone admet une unique solution à l'équation (pour inconnue x) $f(x) = a$. □

Prenons par exemple le polynôme $P(x) = x^2 - 4x+3$. Une étude rapide de fonction montre qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]2; +\infty[$ à valeur dans l'intervalle $]-1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ à valeur dans $]-1; +\infty[$.

Dans ce cas très particulier, on peut trouver la fonction réciproque de ce polynôme. Comme suggéré plus haut, on pose $P(x) = y$ et on cherche à résoudre cette équation en x.

L'équation $x^2 - 4x + 3 = y$ est équivalente à $x^2 - 4x + 3 - y = 0$. Comme il s'agit d'un polynôme de degrés 2, on le résout par le calcul du discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3-y) = 4+4y$. Puisque $y \in]-1; +\infty[$, ce discriminant est strictement positif.

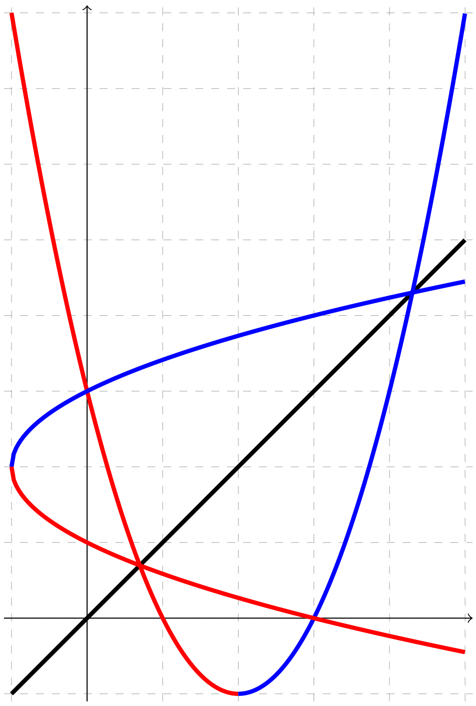
Il existe donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{4(1+y)}}{2} \qquad x_2 = \frac{4-\sqrt{4(1+y)}}{2}$$

Ce que quelques manipulation algébrique simplifient en

$$x_1 = 2+\sqrt{1+y} \qquad x_2 = 2-\sqrt{1+y}$$

Quelle solution choisir ? Tout dépend de quelle morceau du polynôme on cherche à trouver la réciproque. En effet ce polynôme est monotone sur deux intervalle. Si c'est le morceau strictement croissant (sur $]2;+\infty[$) alors la réciproque sera x_1 sur l'intervalle complémentaire ça sera x_2.



2.3 Les fonctions trigonométriques réciproques

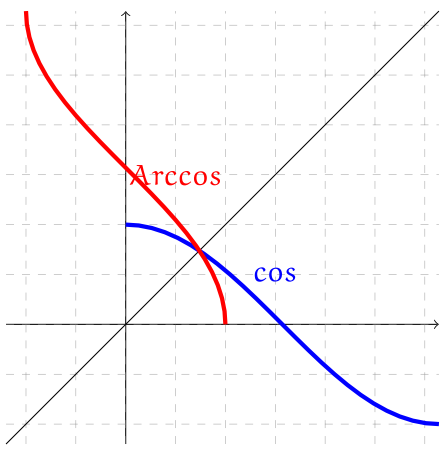
Nous souhaitons résoudre l'équation $\cos(x) = 0.1$. D'après ce que nous avons vu dans le chapitre sur les équations trigonométrique, cette équations admet deux solutions sur $[-\pi, \pi]$ dont toutes les solutions réelles se déduisent par des tours de cercles ($+2k\pi$).

Dans les exemples que nous avons traités, cela tombait toujours sur des valeurs dont nous connaissions l'expression. Mais dans ce cas nous ne connaissons par la valeur de x tel que $\cos(x) = 0.1$.

Elle(s) existe(nt) mais nous ne savons pas les exprimer.

Utilisons les fonctions réciproques.

Définition La fonction Arccos



La fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ à valeur dans $[-1; 1]$. Elle admet donc une fonction réciproque notée Arccos.

$$\begin{aligned} \cos : [0;\pi] &\longrightarrow [-1;1] \\ \mathrm{Arccos} : [-1;1] &\longrightarrow [0;\pi] \end{aligned}$$

En particulier

$$\forall x \in [0;\pi], \mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x$$

$$\forall y \in [-1;1], \cos(\mathrm{Arccos}(y)) = y$$

En d'autre terme l'arc cosinus d'une valeur a entre -1 et 1 est un angle ϑ nécessairement entre 0 et π qui vérifie $\cos(\vartheta) = a$.

Par exemple, en s'appuyant sur les valeurs connue du cosinus, on a $\mathrm{Arccos}(0.5) = \dfrac{\pi}{3}$.

Voyons à présent comment résoudre l'équation $\cos(x) = 0.1$. On sait qu'il existe deux solutions. L'une d'elle, celle entre 0 et π est $\mathrm{Arccos}(0.1)$. L'autre est son opposé, c'est à dire $-\mathrm{Arccos}(0.1)$. En conclusion, toutes les solutions réelles de l'équation $\cos(x) = 0.1$ sont

$$x_{1,k} = \mathrm{Arccos}(0.1) + 2k\pi, \qquad x_{2,k} = -\mathrm{Arccos}(0.1) + 2k\pi$$

Comment calculer $\mathrm{Arccos}(0.1)$? Une seule solution : la calculatrice ! Elle nous donne $\mathrm{Arccos}(0.1) \simeq 1.47$

On peut d'ailleurs enrichir le théorème donnant toutes les solutions d'une équation trigonométrique en cosinus.

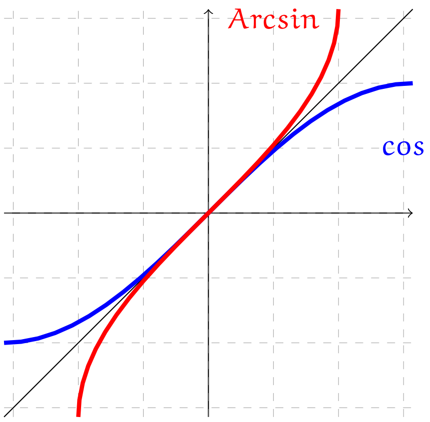
Corollaire

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = a \in]-1;1[$ sont de la forme

$$x_{1,k} = \text{Arccos}(a) + 2k\pi, \qquad x_{2,k} = -\text{Arccos}(a) + 2k\pi$$

Tout ce qui viens d'être fait pour le cosinus a son pendant pour le sinus.

Définition La fonction Arcsin



La fonction $\sin$ est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ à valeur dans $[-1;1]$. Elle admet donc une fonction réciproque notée Arcsin.

$$\begin{array}{rcl} \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1;1] \\ \text{Arcsin} : [-1;1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}$$

En particulier

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$$

$$\forall y \in [-1;1], \sin(\text{Arcsin}(y)) = y$$

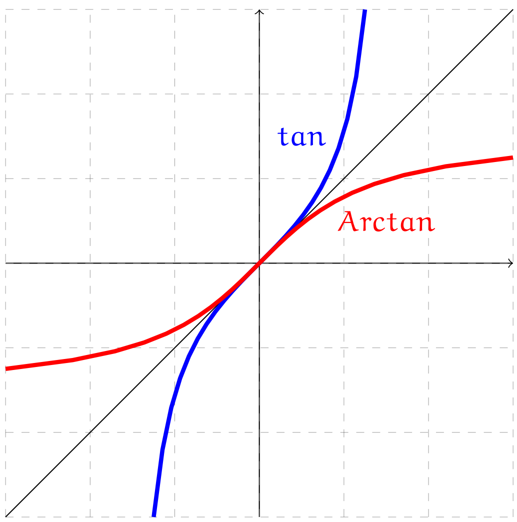
Corollaire

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x) = a \in]-1;1[$ sont de la forme

$$x_{1,k} = \text{Arcsin}(a) + 2k\pi, \qquad x_{2,k} = \pi - \text{Arcsin}(a) + 2k\pi$$

Nos avions laisser de coté la fonction tangente mais on peut aussi considérer sa fonction réciproque.

Définition La fonction Arctan



La fonction $\tan$ est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque notée Arctan.

$$\begin{array}{rcl} \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & [-1;1] \\ \text{Arctan} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{array}$$

En particulier

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(y)) = y$$

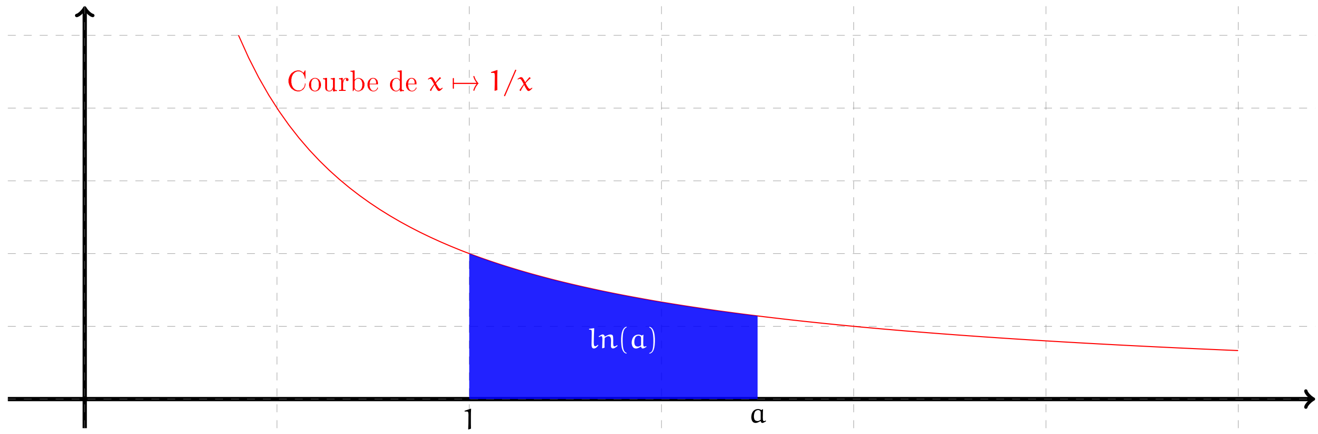
2.4 Logarithme

Définition et premières propriétés

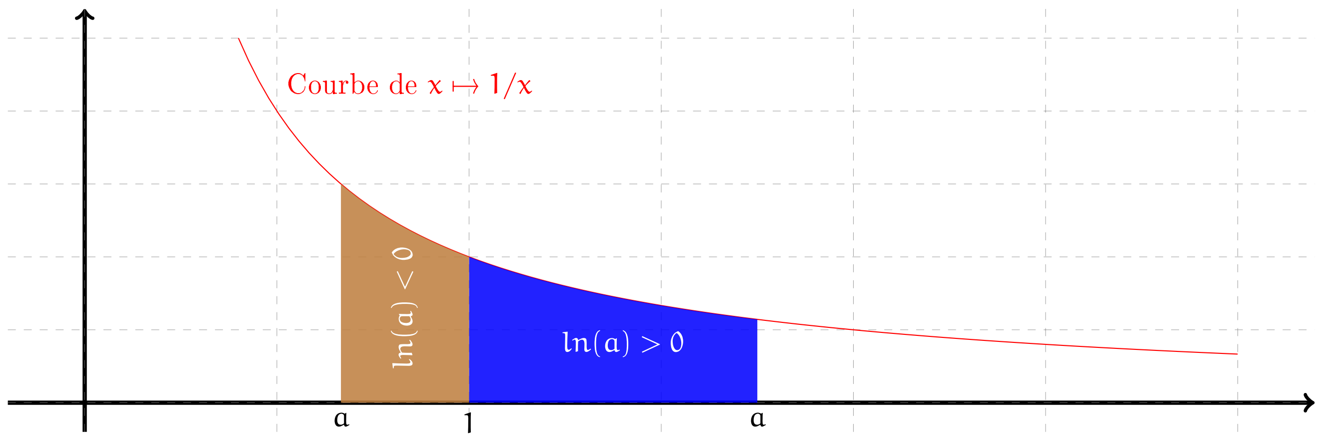
Définition

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\ln(a)$ appelé le **logarithme népérien** de a, l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite $x = 1$, $x = a$ et la courbe représentative de la fonction inverse.

En dessin cela donne :



L'aire dont on parle est une aire *algébrique* c'est à dire avec un signe : on regarde toujours l'aire entre $x = 1$ et $x = a$ dans cet ordre de sorte que si $a < 1$ alors l'aire sera considérée négative.



Proposition

1. Le nombre réel $\ln(a)$ n'est défini que si $a \in]0; +\infty[$.
2. Si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$.
3. $\ln(1) = 0$.
4. Si $a > 1$ alors $\ln(a) > 0$.

Ces propriétés se déduisent trivialement d'une lecture géométrique du logarithme.

Croissances comparées

Théorème

Soient a et b deux nombres réelles strictement positifs alors

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration. Admise □

Corollaire

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

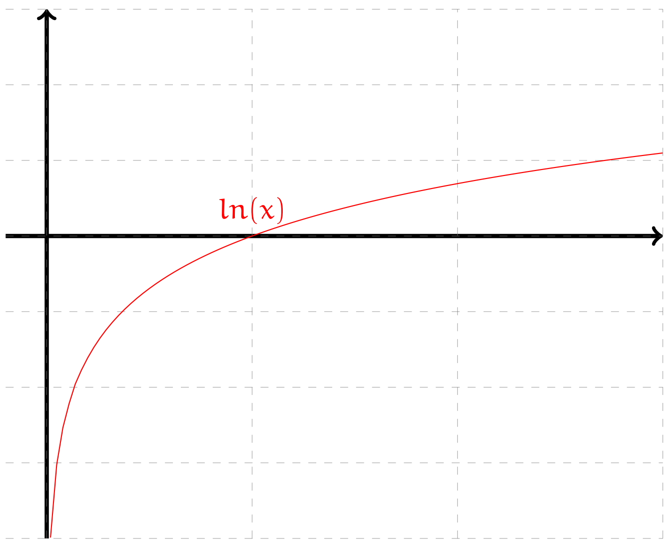
1. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
3. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.
4. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.

Démonstration.

1. $\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$.
2. C'est la formule précédente pour $a = 1$ (sachant que $\ln(1) = 0$).
3. $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}^2) = \ln(a)$
4. $\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n}) = \underbrace{\ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n}$

□

Ce qu'il faut retenir



1. $\mathcal{D} =]0; +\infty[$
2. Si $x \in]0, 1[, \ln(x) < 0$
3. $\ln(1) = 0$
4. Si $x \in]1, +\infty[, \ln(x) > 0$
5. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
6. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
7. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$
8. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Trailer : Exponentielle

La fonction logarithme est strictement croissante et prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ (car ses limites sont $-\infty$ et $+\infty$). Elle est aussi continue par construction (en tant qu'aire). On peut donc lui appliquer le **théorème des valeurs intermédiaires**. D'après ce théorème l'équation $\ln(x) = 0$ admet une unique solution, d'ailleurs on la connait : c'est 1.

Grâce à ce théorème on peut en déduire que si $\ln(a) = \ln(b)$ alors nécessairement $a = b$.

L'équation $\ln(x) = 1$ admet aussi une unique solution. A l'aide de la calculatrice on trouve que $x = 2.71828$. On note ce nombre e.

Qu'en est-il de l'équation $\ln(x) = 2$. Elle admet aussi une unique solution dont on peut déterminer une approximation numérique... mais on peut procéder autrement :

$$\begin{aligned} \ln(x) = 2 &\Leftrightarrow \ln(x) = 2 \times 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 2 \times \ln(e) \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(e^2) \qquad \text{Propriété du logarithme} \\ &\Leftrightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

Et si on remplaçait le 2 par un 3, un -1 ou n'importe quel nombre réel... Tiens tiens... Il se passe quelque chose de marrant.

2.5 Exponentielle

Définition et premières propriétés

Il est indispensable d'avoir assimiler le cours sur les logarithmes pour pouvoir suivre ce cours sur les exponentielles. Ici tout sera beaucoup plus rapide que le précédent chapitre. Pas que nous souhaitons bâcler le travail mais plutôt que nous allons entièrement nous appuyer sur la fonction logarithme, raison pour laquelle nous insistons sur son assimilation.

D'ailleurs à la fin du cours sur le logarithme, avec l'aide du théorème des valeurs intermédiaire, nous avions observer que l'équation $\ln(x) = 1$ admettait une unique solution que l'on note e et dont la valeur approchée, estimée à l'aide d'un ordinateur, est 2.71828.

Qu'en est-il de manière générale de l'équation $\ln(x) = a$ pour n'importe quelle nombre réel a ? D'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe une unique solution.

Définition

Pour tout nombre réel a on note $\exp(a)$ l'unique solution de l'équation $\ln(x) = a$. On l'appel *exponentielle* de a. C'est la fonction réciproque du logarithme népérien.

On a immédiatement les propriétés suivantes.

Proposition

1. Quelque soit le réel a, $\exp(a) > 0$.
2. $\exp(0) = 1$.
3. Si $a < 0$ alors $\exp(a) < 1$.
4. Si $a > 0$ alors $\exp(a) > 1$.
5. Pour tout $x > 0$ alors $\exp(\ln(x)) = x$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $\ln(\exp(x)) = x$.

Démonstration.

1. Puisque $\ln(\exp(a)) = a$, le nombre $\exp(a)$ appartient au domaine de définition de $\ln$ qui est $]0; +\infty[$. Dis autrement $\exp(a) > 0$.
2. Puisque $\ln(1) = 0 = \ln(\exp(0))$ alors $\exp(0) = 1$.
3. Si $a < 0$ alors $\ln(\exp(a)) = a < 0 = \ln(1)$ donc $\exp(a) < 1$.
4. Si $a > 0$ alors $\ln(\exp(a)) = a > 0 = \ln(1)$ donc $\exp(a) > 1$.
5. C'est une conséquence de la réciprocité entre le $\ln$ et le $\exp$.
6. C'est une conséquence de la réciprocité entre le $\ln$ et le $\exp$.

$\square$

Croissances comparées

Théorème

Quelque soit les nombres réels a et b :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \ln(\exp(a+b)) &= a+b \\ &= \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) \\ &= \ln(\exp(a)\times\exp(b)) \quad \text{Propriété du logarithme} \end{aligned}$$

Puisque $\ln(\exp(a+b)) = \ln(\exp(a)\times\exp(b))$ alors $\exp(a+b) = \exp(a)\times\exp(b)$ □

Corollaire 2.5.1

Soient a et b deux nombres réels.

1. $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
2. $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
3. $\exp\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\exp(a)}$
4. $(\exp(a))^n = \exp(na)$

Démonstration. Il suffit, encore une fois de repasser par la fonction logarithme. □

De $\exp(x)$ à e^x

Tout est dans le titre. On observe que les formules et propriétés de l'exponentielle sont étrangement similaire à celle des puissances. Par exemple d'un coté on $\exp(a+b) = \exp(a)\times\exp(b)$ et d'un autre coté $10^{n+m} = 10^n 10^m$... du coup on se demande si il n'y a pas un liens entre nos familières puissances et l'exponentielle. La réponse est oui par une très simple observation :

$$\ln(\exp(x)) = x = x \times 1 = x \times \ln(e) = \ln(e^x)$$

d'après les règles de calcul sur le logarithme. Cette égalité implique donc que $\exp(x) = e^x$ et ce pour tous les x réel. Autant 10^n n'était définie que pour des n entiers autant $e^x = \exp(x)$ est définie pour tous les nombres réels !

D'ailleurs on pourrait s'amuser à définir 10^x pour n'importe quel x réelle. Tenté ? Allez on y va ! Grâce à cette formule de réciprocité entre $\ln$ et $\exp$, on peut écrire que $10^x = \exp(\ln(10^x))$ sauf que le logarithme gère très bien les puissances : $\ln(10^x) = x\ln(10)$. On a $10^x = \exp(x\ln(10))$ et l'exponentielle ne soufre d'aucun problème de définition. Ca y est ! On a défini 10^x. Pourquoi s'arrêterait-on en si bon chemin ?

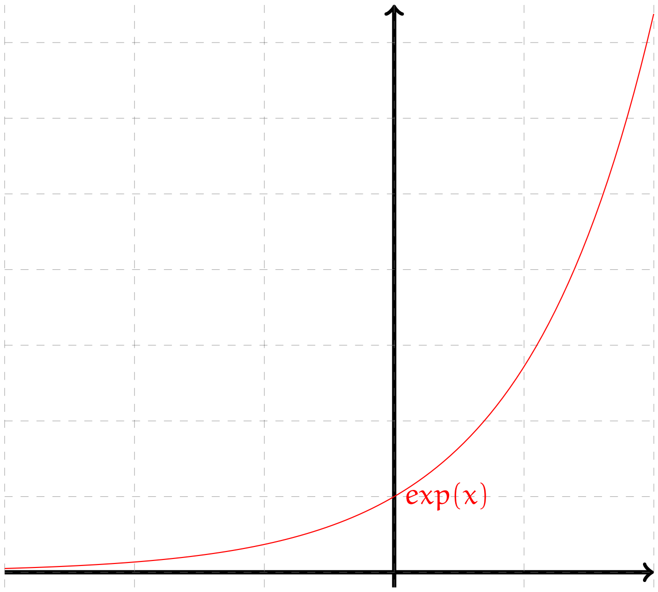
Définition

Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On défini a^b par la formule :

$$a^b = \exp(b\ln(a)) = e^{b\ln(a)}$$

Le calcul quant à lui se fait à l'aide d'une calculatrice, mais à présent des expressions comme $2^{\sqrt{2}}$ ont un sens.

Ce qu'il faut retenir



1. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
2. Si $x < 0, \exp(x) < 1$
3. $\exp(0) = 1$
4. Si $x > 0, \exp(x) > 1$
5. $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
6. $\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a-b)$
7. $\exp(a)^n = \exp(na)$
8. $\sqrt{\exp(a)} = \exp\left(\dfrac{1}{2}a\right)$

3. Les nombres complexes

3.1 Un nombre imaginaire

On pourrait donner plein d'histoire racontant la naissance des nombres complexes qui s'utilisent presque partout (mécanique classique, quantique ou céleste etc). On peut aussi et plus simplement rester dans un univers mathématico-mathématique et poser une définition, base de travail.

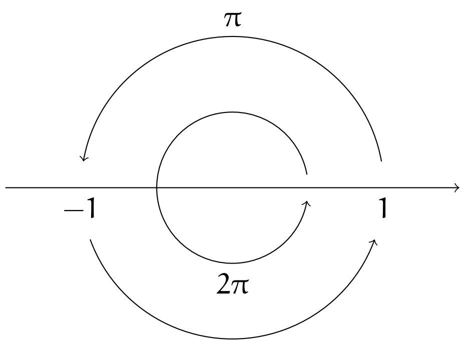
Définition

On note i le nombre vérifiant $i^2 = -1$.

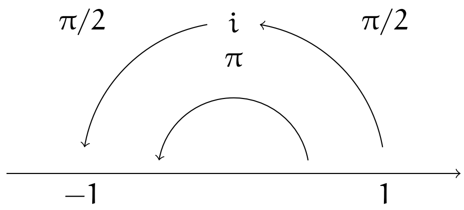
Cette définition suffit ! Mais *en vrai*, il faudrait, pour ne pas créer de faille spatio-temporelle dans l'univers des mathématiques, le définir plus proprement ou plutôt nous assurer que cette définition est cohérente. L'un des premiers penseurs de cet étrange nombre est Gauss (encore) et la *création* qu'il en a fait en son temps et ce que nous en avons fait avec notre technologie[3] en font une définition très cohérente (pour faire peur : on note i la classe de X dans l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$).

Bref ! On a dans notre poche un nombre qui au carré vaut -1. Évidemment ce nombre n'est pas réel, puisque les nombres réels sont tous positifs lorsqu'ils sont au carré. Mais alors qu'est-ce que ce i ? Où est-il ?

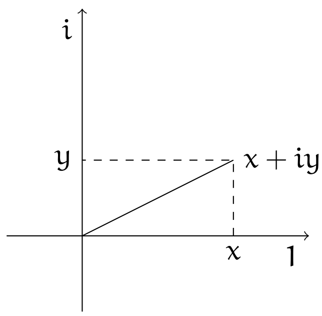
Regardons de plus près l'opération *mettre au carré*. Lorsque l'on met au carré le nombre -1 on obtient 1. C'est à dire que sur l'axe des nombres réels, le nombre -1 *passe de l'autre coté du* 0. Le nombre -1 fait un angle de π par rapport à l'axe des nombres réels et le fait qu'il se retrouve *de l'autre coté du* 0 peut se traduire par *on a doublé son angle*. Double... carré... on voit le nombre 2 et c'est assez satisfaisant.



Voyons maintenant le nombre i. Au carré, il vaut -1. Cela équivaut, avec notre considération géométrique, à dire que l'angle que fait le nombre i lorsqu'il est doublé fait π (pour arriver au -1). Un petit dessin montre que ce nombre est donc en dehors de l'axe des nombres réels (heureusement) !



Le nombre i est donc *ailleurs* que sur l'axe des nombres réel, sur un autre axe que l'on place généralement perpendiculaire à celui des nombres réels et que l'on nomme l'**axe des imaginaires**. Un nombre complexe est alors un point non plus sur la droite (réelle) mais dans le plan (complexe).



Définition

Un **un nombre complexe** est une expression

$$z = x + iy$$

pour deux nombres réels x et y appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** du nombre z notée $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
On note

$$\mathbb{C}$$

l'ensemble des nombres complexes.

3. Des outils mathématiques sont des éléments de la technologie

Attention ! La partie imaginaire d'un nombre complexe est réelle ! Par exemple la partie imaginaire du nombre $3-2i$ est -2 et sa partie réelle est 3.

3.2 Algèbre complexe

Les calculs dans l'ensemble des nombres complexes se fait exactement comme dans celui des nombres réelles à ceci près que i vérifie $i^2=-1$.

Proposition

Soient z et z' deux nombres complexes alors

$$\mathrm{Re}(z\pm z')=\mathrm{Re}(z)\pm\mathrm{Re}(z')$$

$$\mathrm{Im}(z\pm z')=\mathrm{Im}(z)\pm\mathrm{Im}(z')$$

Démonstration. Soit $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$. Il s'agit de voir que $\mathrm{Re}(z\pm z')x\pm x'$ et $\mathrm{Im}(z\pm z')=y\pm y'$

$$\begin{aligned} z+z' &= (x+iy)\pm(x'+iy') \\ &= x+iy\pm x'\pm iy' \\ &= x\pm x'+iy\pm iy' \\ &= (x\pm x')+i(y\pm y') \end{aligned}$$

□

Proposition

Soit z un nombre complexe et $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{Re}(\lambda z)=\lambda\mathrm{Re}(z),\qquad \mathrm{Im}(\lambda z)=\lambda\mathrm{Im}(z)$$

Démonstration. Soit $z=x+iy$. Il s'agit de voir que $\mathrm{Re}(\lambda z)=\lambda x$ et $\mathrm{Im}(\lambda z)=\lambda y$

$$\begin{aligned} \lambda z &= \lambda(x+iy) \\ &= \lambda x+\lambda(iy) \\ &= \lambda x+i(\lambda y) \end{aligned}$$

□

Ces deux propositions montre que les nombres complexes ont une structure *linéaire*. Pour l'addition on additionne les parties réelles ; respectivement pour la partie imaginaire. De même pour la multiplication réelle.

Les choses se "compliquent" pour la multiplication et la division. Bien qu'en fait il ne s'agit que d'opérations algébriques classique avec la règle $i^2=-1$.

Proposition

Soient z et z' deux nombres complexes.

$$\mathrm{Re}(zz')=\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z')-\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$$

$$\mathrm{Im}(zz')=\mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z')+\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z')$$

Démonstration. Posons $z=x+iy$ et $z'=x'+y'$.

$$\begin{aligned} zz' &= (x+iy)(x+iy) \\ &= xx'+ixy'+iyx'+iyiy' \\ &= xx'+ixy'+iyx'+\underbrace{i^2}yy' \\ &= xx'+ixy'+iyx'-yy' \\ &= xx'-yy'+ixy'+iyx' \\ &= xx'-yy'+i(xy'+yx') \end{aligned}$$

□

Dans la pratique on n'utilise pas ces formules, on le redémontre, en développant ou factorisant au besoin. Ces formules montrent *simplement* qu'on peut faire comme si i était une variable x ou avec la règle imaginaire $i^2=-1$.

Par exemple, si $z_1 = 3 + \frac{i}{2}$ et $z_2 = 1 - i$ alors

$$\begin{aligned} 2z_1 - z_2^2 &= 2(3 + \frac{i}{2}) - (1-i)^2 \\ &= (6+i) - (1^2 - 2 \times 1 \times i + i^2) \\ &= (6+i) - (1 - 2i - 1) \\ &= (6+i) - (-2i) \\ &= 6 + i + 2i \\ &= 6 + 3i \end{aligned}$$

Pour la division de nombre complexe, il faut faire un peu plus d'effort mais sans plus de difficulté.

3.3 Nombre complexe conjugué

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appel **nombre complexe conjugué** à z le nombre noté $\bar{z}$, défini par

$$\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$$

En d'autre terme le nombre conjugué associé à un nombre complexe z est le même que z en changeant uniquement le signe de la partie imaginaire. Par exemple $\overline{7 + i\sqrt{2}} = 7 - i\sqrt{2}$.

Lemme : Quelque que soit $z \in \mathbb{C}$,

$$z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x+iy)\overline{(x+iy)} \\ &= (x+iy)(x-iy) \\ &= (x)^2 - (iy)^2 \qquad \text{Identité remarquable} \\ &= x^2 - i^2y^2 \\ &= x^2 - (-1)y^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

□

Proposition

Soient z et z' des nombres complexes.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')}{\mathrm{Re}(z')^2 + \mathrm{Im}(z')^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z')}{\mathrm{Re}(z')^2 + \mathrm{Im}(z')^2}$$

Démonstration. Cela découle de l'observation

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$$

et des résultats précédents. □

Encore une fois, la formule n'est là que pour démontrer la méthode. En aucun cas on l'applique en tant que tel. On la redémontre. Par exemple

$$\begin{aligned} \frac{3 - \frac{i}{2}}{2+i} &= \frac{\left(3 - \frac{i}{2}\right)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{6 - 3i - i - \frac{i^2}{2}}{2^2 - i^2} \\ &= \frac{6 - 3i - i + \frac{1}{2}}{4+1} \\ &= \frac{\frac{13}{2} - 4i}{5} \\ &= \frac{13}{10} - \frac{4}{5}i \end{aligned}$$

Le nombre conjugué est cohérent avec les calculs dans l'ensemble des nombres complexe.

Théorème

Soient z et z' des nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

1. $\overline{z \pm z'} = \overline{z} \pm \overline{z'}$
2. $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
4. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition □

Proposition

Un nombre $z \in \mathbb{C}$ est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.

Démonstration. Si $z = \overline{z}$ alors $x + iy = x - iy$ et en identifiant la partie imaginaire $y = -y$ ce qui équivaut à $y = 0$ et x est réel. □

Définition

On dira qu'un nombre est **imaginaire pure** si $z = -\overline{z}$.

3.4 Racine carré complexe

Le fait d'avoir un *nombre* dont le carré vaut -1, qui est un nombre négatif, nous donne un nouvel outil d'extraction de racine carré.

En effet, par définition de racine carré, trouver $\sqrt{-1}$ c'est trouver un nombre z, qui aujourd'hui peut donc être complexe, vérifiant $z^2 = -1$. Nous avons donc une jolie solution : i... mais ce n'est pas la seule. Il y a aussi $-i$. Donc $\sqrt{-1}$ vaut à la fois i et $-i$. Ce n'est pas du tout satisfaisant ! Il faut donc donner un cadre un peu plus propre pour obtenir un concept plus cohérent.

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$. Les **racines carrés** de z sont des nombres Z vérifiant $Z^2 = z$.

Si $z \neq 0$, il y a toujours deux racines carrées.

Voyons à présent comment, dans la pratique, on détermine les racines carrées d'un nombre complexe.

Proposition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe alors et Z une racine carré de z alors

$$\mathrm{Re}(Z) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}$$

$$\mathrm{Im}(Z) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}$$

Le signe à choisir étant déterminé par le signe de y. Précisément

Si $y > 0$ alors $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ sont de même signe

Sinon $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ sont de signe différent.

Démonstration. Posons $Z = a + ib$. Par définition $Z^2 = z$ c'est à dire $(a + ib)^2 = x + iy$ soit $(a^2 - b^2) + 2i(ab) = x + iy$. En particulier, en comparant les parties imaginaires on a $2ab = y$. Cette égalité montre que si $y > 0$ alors nécessairement a et b sont de même signe et de signe différent sinon. Quant à la partie réelle elle permet d'obtenir la formule

$$a^2 - b^2 = x$$

D'un autre coté puisque $Z^2 = z$ alors $\overline{Z}^2 = \overline{z}$ et donc $(Z\overline{Z})^2 = z\overline{z}$ ce qui équivaut à $(a^2+b^2)^2 = x^2+y^2$ et puisque ces carrés sont positifs on a

$$a^2 + b^2 = \sqrt{x^2+y^2}$$

En sommant les deux égalités trouvées on arrive à $2a^2 = \sqrt{x^2+y^2} + x$ soit $a = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}$. La différence permet de trouver b. □

Par exemple déterminons les racine carrés de $z = 3-2i$. On cherche donc $Z = a+ib$ tel que $Z^2 = z$ soit $(a^2-b^2)+i(2ab) = 3-2i$. En identifiant partie réelle et partie imaginaire on en déduit que $a^2-b^2 = 3$ et $2ab = -2$ soit encore $ab = -1$. D'autre part en passant par la forme conjuguée on a $a^2+b^2 = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$. Ainsi $2a^2 = \sqrt{13}+2$ et $a = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}}$ et de même $b = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}}$. Puisque $ab = -1$ alors a et b sont de signe différent. Ainsi les deux racines de $3-2i$ sont

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}$$

$$Z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}$$

Théorème

Si le discriminant d'un polynôme à coefficient réelle ax^2+bx+c est négatif alors le polynôme admet deux racines complexes conjuguées.

Démonstration. Si $\Delta < 0$ est le discriminant alors il admet deux racines carrées dont les calculs amènent à $Z_1 = i\sqrt{-\Delta}$ et $Z_2 = -i\sqrt{-\Delta}$. En appliquant alors les formules classique on trouve deux racines au polynôme ax^2+bx+c :.

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a},$$

qui sont bien des nombres complexes conjuguées. □

Considérons par exemple l'équation $x^2+x+1 = 0$. Son discriminant vaut -3. Alors ce polynôme admet z et $\overline{z}$ comme solution où $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

On peut aussi considérer des polynômes où les coefficients sont complexe. Il suffit de raisonner exactement comme dans le cas réel en extrayant les deux racines carrés complexe (qui ne sont plus conjugués en général).

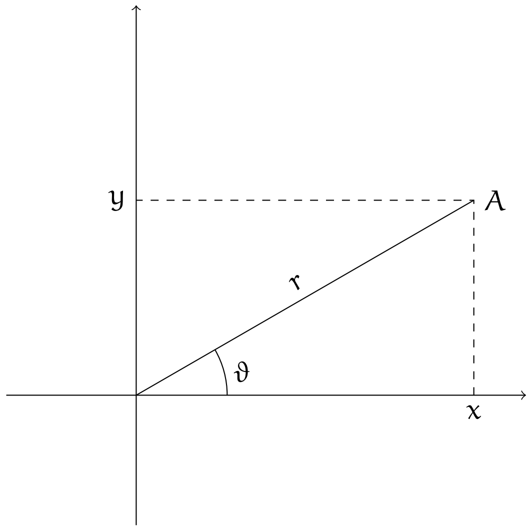
En particulier, tous les polynômes admettent des racines [4]

3.5 Forme polaire

Pour représenter un point dans le plan nous avons besoin de deux informations (principalement parce qu'une plan est un objet de dimension 2). Nous avons étudier tout au long de l'année une seule méthode de coordination : les coordonnées cartésienne. Pour placer un point nous donnons son abscisse et son ordonnée. Inversement : étant donnée un point du plan, il possède une abscisse et une ordonnée.

Mais il existe une autre manière de représenter un point du plan qui vient principalement de l'astronomie (Gauss était astronome de formation et non mathématicien...). Pour représenter un point dans le plan nous avons besoin de savoir uniquement quel angle il fait avec l'axe des ordonnée et à quelle distance il se trouve de l'origine.

4. Cela s'appelle le théorème de d'Alembert-Gauss... oui encore Gauss. Ce n'est pas pour rien qu'on l'appel *le prince des mathématiques*.



Définition

1. On appel **coordonnées cartésiennes** d'un point A du plan la donnée d'un couple (x, y) où x est **l'abscisse**, y **l'ordonnée** représentant respectivement la projection de A sur l'axe $(0x)$ et $(0y)$.
2. On appel **coordonnées polaires** d'un point A du plan la donnée d'un couple (r, ϑ) où r est **le module**, ϑ **l'argument** représentant respectivement la distance de $0A$ et l'angle $(0x; 0A)$ (mesuré en radian).

La trigonométrie va nous permettre de passer de l'un à l'autre.

Proposition

Soit A un point du plan de coordonnées cartésienne (x, y) et de coordonnée polaire (r, ϑ) alors

$$x = r\cos(\vartheta), \qquad y = r\sin(\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \vartheta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer les définitions de sinus et cosinus dans le triangle du schéma précédent pour obtenir les deux premières formules ainsi que la dernière. Quand à la troisième, il s'agit du théorème de Pythagore. $\square$

Revenons dans l'ensemble des nombres complexes que nous avions ponctuellement délaissé. Un nombre complexe c'est $x + iy$ où x et y représentent les coordonnées cartésiennes du point du plan. D'après la proposition précédente on a $x + iy = (r\cos(\vartheta)) + i(r\sin(\vartheta)) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$, (x, y) les coordonnées cartésiennes qu'il défini et (r, ϑ) ses coordonnées polaires. On note $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ son module et $\arg(z) = \vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ son argument.

Proposition

Soient z et z' des nombres complexes et λ un nombre réel strictement positif.

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|z|^2 = z\bar{z}$
4. $|\lambda z| = \lambda|z|$ et $|-\lambda z| = \lambda|z|$
5. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

1. $\arg(zz') \equiv_{2\pi} \arg(z) + \arg(z')$
2. $\arg(\bar{z}) \equiv_{2\pi} -\arg(z)$
3. $\arg(\lambda) \equiv_{2\pi} 0$ et $\arg(-\lambda) \equiv_{2\pi} \pi$
4. $\arg(\lambda z) \equiv_{2\pi} \arg(z)$
5. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv_{2\pi} \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration. Soient $z = x + iy = r(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$ et $z' = x' + iy' = r'(\cos(\vartheta') + i\sin(\vartheta'))$ alors

$$\begin{aligned} zz' &= [r(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))][r'(\cos(\vartheta') + i\sin(\vartheta'))] \\ &= rr'(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))(\cos(\vartheta') + i\sin(\vartheta'))) \\ &= rr'(\underbrace{\cos(\vartheta)\cos(\vartheta') - \sin(\vartheta)\sin(\vartheta')} + i\underbrace{(\cos(\vartheta)\sin(\vartheta') + \cos(\vartheta')\sin(\vartheta))}) \\ &= rr'(\cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta')) \end{aligned}$$

Cette formule montre que $|zz'| = rr' = |z||z'|$ et $\arg(zz') \equiv_{2\pi} \vartheta + \vartheta' \equiv_{2\pi} \arg(z) + \arg(z')$.

On a également $\bar{z} = r(\cos(\vartheta) - i\sin(\vartheta)) = r(\cos(-\vartheta) + i\sin - (\vartheta))$. Cette formule montre que $|\bar{z}| = r = |z|$ et $\arg(\bar{z}) \equiv_{2\pi} -\vartheta \equiv_{2\pi} -\arg(z)$.

Les formules 3 sont des conséquences triviales des définitions.

Les formules 4 se déduisent des formules 1.

Finalement $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \dfrac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$.

Puisque $|z'|^2$ est un nombre réel strictement positif alors $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z||\overline{z'}|}{|z'|^2} = \dfrac{|z||z'|}{|z'|^2} = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

De même $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv_{2\pi} \arg\left(\dfrac{z\overline{z'}}{|z'|^2}\right) \equiv_{2\pi} \arg(z\overline{z'}) \equiv_{2\pi} \arg(z) + \arg(\overline{z'}) \equiv_{2\pi} \arg(z) - \arg(z')$ □

Ces formules montrent que essentiellement le module se comporte comme une racine carré (ce qui est évident au vu de la formule) et que l'argument se comporte comme un logarithme. Cette observation motive la définition suivante.

Définition

Soit ϑ un angle défini modulo 2π. On pose $e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$

La proposition précédente montre que cette notation est cohérente avec ce que nous connaissions de l'exponentielle. Nous retrouvons entre autre $e^{i\vartheta}e^{i\vartheta'} = e^{i(\vartheta+\vartheta')}$ et $\dfrac{1}{e^{i\vartheta}} = e^{-i\vartheta} = \overline{e^{i\vartheta}}$.

Par exemple $2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Corollaire

Tout nombre complexe z peut s'écrire

$$z = re^{i\vartheta}$$

où $r = |z|$ et $\vartheta \equiv_{2\pi} \arg(z)$. On appel cette forme la **forme polaire** du nombre complexe.

Déterminons la forme polaire de $z = 1 - i\sqrt{3}$. Pour commencer on a facilement $|z| = 2$. D'après les formules permettant de passer de coordonnées cartésiennes à polaire on a $\cos(\vartheta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\vartheta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Parce qu'on connait bien notre trigonométrie on sait que le seul angle (modulo 2π) avec cette valeur de cosinus et sinus et $-\dfrac{\pi}{6}$. Finalement

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Corollaire Formules d'Euler

Soit ϑ un angle défini modulo 2π.

$$\cos(\vartheta) = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}, \qquad \sin(\vartheta) = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition de l'exponentielle complexe. □

3.6 Parenthèse géométrique

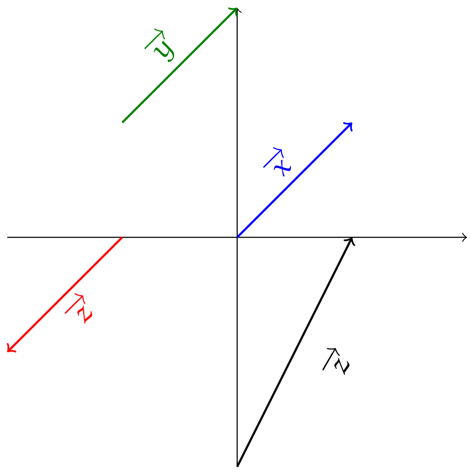
Vecteurs

Nous commençons par quelques rappels, qui peuvent ne pas en être, de géométrie plane. Nous sommes volontairement sibyllin, l'objectif de ce cours n'étant pas d'introduire des éléments de géométrie mais plutôt de voir comment les nombres complexes s'utilisent dans ce cadre. L'un des outils les plus fameux est le *vecteur*. C'est un objet de la géométrie caractérisé par :

- une direction,
- un sens,
- une norme (taille).

Ces objets existent à peu près partout en géométrie. Nous nous cantonnerons à donner les détails uniquement dans le plan (qui deviendra plus tard le plan complexe, mais qui pourra être vu dans ce paragraphe comme le repère classique). Gardons en tête qu'en dimension 3, les vecteurs existent aussi. L'objectif de rester dans le plan et de faire le lien entre les éléments de géométrie et la construction *géométrique* des nombres complexes.

Détaillons les 3 caractères qui définissent un vecteurs. Il faut penser les vecteurs comme des flèches inflexibles mais que l'on peut déplacer.



Dans la représentation ci-contre

- $\vec{x} = \vec{y}$ car les vecteurs sont orientés dans la même direction, ont le même sens et la même taille.
- $\vec{x} \neq \vec{z}$ car bien que ces vecteurs aient la même taille et la même direction ils ne sont pas orienté dans le même sens. Dans cas on a alors $\vec{x} = -\vec{z}$
- $\vec{x} \neq \vec{t}$ car ces deux vecteurs n'ont ni la même taille ni la même direction.

Dans la pratique, si A et B deux points du plan de coordonnées cartésiennes respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. On note $\|\overrightarrow{AB}\|$ sa norme et le théorème de Pythagore permet de montrer que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Un outils fameux du calcul vectoriel est la relation de Chasles (que nous avons déjà vu dans le cadre du calcul intégrale) :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Précisons à présent le liens avec les nombres complexes.

Affixe

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note M le point du plan (d'origine O) de coordonnée cartésienne $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$. On dit que z est l'**affixe du point** M et également l'**affixe du vecteur** $\overrightarrow{OM}$.

Proposition

Soient A et B des points du plan complexe d'affixe respective a et b alors $b - a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. Cela découle de la relation de Chasles puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ □

En particulier, toutes les opérations connues sur les vecteurs se transposent avec le langage des affixes.

Corollaire

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ des vecteurs du plan complexe d'affixe respective z et z'.

1. L'affixe de $\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{u'}$ est $z \pm z'$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors l'affixe de $\lambda\overrightarrow{u}$ est λz
3. En particulier $(\lambda = -1)$, l'affixe de $-\overrightarrow{u}$ est $-z$.
4. En particulier $(\lambda = 0)$, l'affixe de $\overrightarrow{0}$ est 0.
5. $||\overrightarrow{u}|| = |z|$.
6. L'angle entre $\overrightarrow{u}$ et l'axe des abscisse est $\arg(z)$.

Transformation affine du plan complexe

On s'intéresse dans ce chapitre aux transformations du plan complexe. En d'autre terme aux fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Elles sont très nombreuses et parfois assez difficile à appréhender. Ici on ne s'intéressera qu'au transformation affine, c'est à dire à définir et étudier toutes les transformation

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az + b \end{array}$$

pour deux nombres complexes a et b.

De la même manière que dans le cas réelle les droites $f(x) = ax + b$ sont dirigées par a (le coefficient directeur), les valeurs de a de la transformation $f(z) = az + b$ dirigent la nature de la transformation. Dans la suite de ce paragraphe on va discuter suivant les valeurs du nombre complexe a la nature de $f(z) = az + b$.

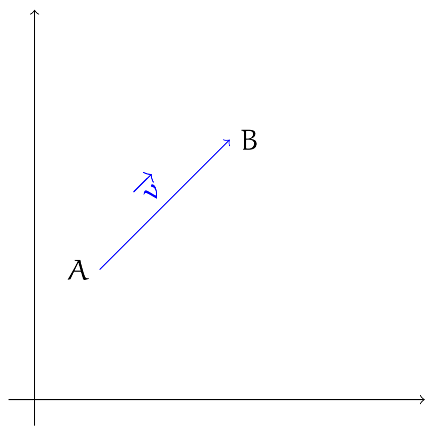
Les translations.

Définition

Si $a = 1$ alors la transformation $f(z) = az + b$ du plan complexe est appelée une **translation**.

Si f est une translation alors elle est de la forme $f(z) = z + b$. Le **vecteur de translation** a pour affixe b.

Par exemple $f(z) = z + \dfrac{1}{2} + i$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ d'affixe $\dfrac{1}{2} + i$. Le point A d'affixe $1 + i$ est transformé en B d'affixe $\dfrac{3}{2} + 2i$



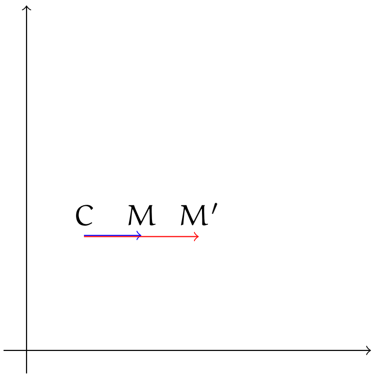
Les homothéties.

Définition

Si $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ alors la transformation $f(z) = az + b$ du plan complexe est appelée une **homothétie**.

Si f est une homothétie alors elle est de la forme $f(z) = az + b$ pour un certain réel $a \neq 1$ (b pouvant être complexe). Le **rapport de l'homothétie** est le nombre a et le **centre de l'homothétie** est l'unique point fixe de f. Précisément c'est le point C d'affixe $c = \dfrac{b}{1 - a}$ (obtenu en résolvant l'équation $f(z) = z$).

Par exemple $f(z) = 2z - \frac{1}{2} - i$ est une homothétie de rapport 2 et de centre C d'affixe $\frac{1}{2} + i$. Géométriquement pour n'importe quelle point M d'affixe z, le point M' d'affixe $f(z)$ est caractérisé par la relation $\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}$



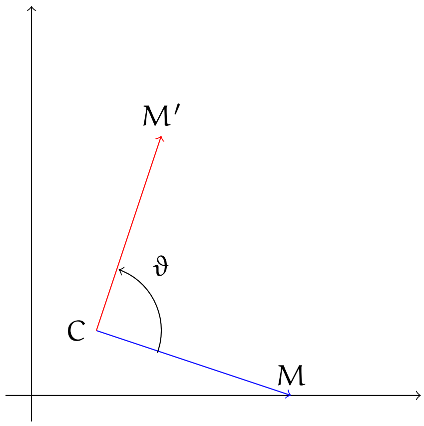
Les rotations.

Définition

Si $a \in \mathbb{C} - \{1\}$ tel que $|a| = 1$ alors la transformation $f(z) = az + b$ du plan complexe est appelée une **rotation**.

Par exemple $f(z) = iz+1$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (car $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$) et de centre C d'affixe $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{|1+i|^2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.

En passant par la forme polaire des nombres complexe, on observe qu'un nombre complexe de module 1 est de la forme $e^{i\vartheta}$. Si f est une rotation alors elle est de la forme $f(z) = e^{i\vartheta}z + b$. L'**angle de la rotation** est le nombre ϑ (modulo 2π) et le **centre de la rotation** est l'unique point fixe de f. Précisément c'est le point C d'affixe $c = \frac{b}{1 - e^{i\vartheta}}$ (obtenu en résolvant l'équation $f(z) = z$).



Les similitudes.

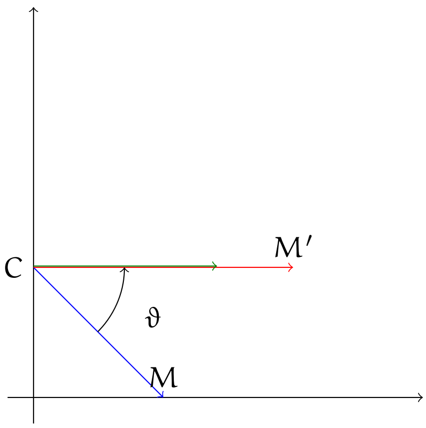
Définition

Si $a \in \mathbb{C} - \{1\}$ tel que $|a| \neq 1$ alors la transformation $f(z) = az + b$ du plan complexe est appelée une **similitude**.

Par exemple $f(z) = (1+i)z + 1$ est une similitude puisque $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Son rapport est $\sqrt{2}$, son angle est $\frac{\pi}{4}$ et son centre est C d'affixe $c = \frac{1}{1-(1+i)} = \frac{1}{-i} = i$

En passant par la forme polaire des nombres complexe, on observe que $a = re^{i\vartheta}$. Si f est une similitude alors elle est de la forme $f(z) = re^{i\vartheta}z + b$. L'**angle de la similitude** est le nombre ϑ (modulo 2π), le **rapport de la similitude** est le nombre r et le **centre de la similitude** est l'unique point fixe de f. Précisément c'est le point C d'affixe $c = \frac{b}{1-a}$ (obtenu en résolvant l'équation $f(z) = z$).

On peut voir toute similitude comme une rotation (d'angle ϑ) suivit d'une homothétie (de rapport r).



Ca y est nous y sommes !

Nous avons tout ce qu'il nous faut pour chercher à faire tournoyer des cercles pour obtenir n'importe quelle dessin.

Reprenons l'exemple de la handspineroïde. Grâce à la mystérieuse théorie de Fourrier, nous obtenions des équations des abscisses et des ordonnées. Nous avions :

$$x(t) = 6\cos(t) + 1.5\cos(2t) + 2\cos(4t) + 2.6\sin(2t)$$
$$y(t) = 6\sin(t) - 1.5\sin(2t) + 2\sin(4t) + 2.6\cos(2t)$$

Commençons par essayer de simplifier $1.5\cos(2t) + 2.6\sin(2t)$ à l'aide des formules d'Euler.

$$\begin{aligned}
1.5\cos(2t) + 2.6\sin(2t) &= 1.5\left(\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2}\right) + 2.6\left(\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}\right) \\
&= e^{2it}\left(\frac{1.5}{2} + \frac{2.6}{2i}\right) + e^{-2it}\left(\frac{1.5}{2} - \frac{2.6}{2i}\right) \\
&= ae^{2it} + \overline{a}e^{-2it} \\
&= ae^{2it} + \overline{ae^{2it}} \\
&= 2\mathrm{Re}(ae^{2it})
\end{aligned}$$

où $a = \dfrac{1.5}{2} + \dfrac{2.6}{2i} = \dfrac{1.5}{2} - \dfrac{2.6}{2}i$. Or tout nombre complexe peut s'écrire sous forme polaire. $a = re^{i\vartheta}$ avec $r = \sqrt{\left(\dfrac{1.5}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{2.6}{2}\right)^2} \simeq 1.5$ et $\vartheta = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{-\frac{2.6}{2}}{\frac{1.5}{2}}\right) \simeq -\dfrac{\pi}{3}$. Ainsi $a \simeq 1.5e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Alors $ae^{2it} \simeq 1.5e^{2it - i\frac{\pi}{3}}$. Donc $2\mathrm{Re}(ae^{2it}) \simeq 3\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

D'ailleurs en remplaçant les valeurs numérique par des variables on viens de démontrer le résultat suivant.

Proposition

Soient a et b des nombres réels tel que $a \neq 0$.

$$a\cos(X) + b\sin(X) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(X + \mathrm{Arctan}\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$$

Ainsi l'apparition mystérieuse du $-\dfrac{\pi}{3}$ n'est finalement pas si mystérieuse.

De même avec le sinus.

Proposition

Soient a et b des nombres réels tel que $a \neq 0$.

$$a\cos(X) + b\sin(X) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin\left(X + \mathrm{Arctan}\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

Démonstration. Tout simplement parce que $\sin\left(X + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(X)$ □

Ceci étant on arrive à

$$x(t) = 6\cos(t) + 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos(4t)$$
$$y(t) = 6\sin(t) + 3\sin\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\sin(4t)$$

Le problème pour obtenir une joli épicycloïde c'est que l'on souhaite que les x et y aient la même forme l'un en cosinus l'autre en sinus.

Pas de soucis, passons dans l'ensemble des nombres complexes et posons $z(t) = x(t) + iy(t)$.

On a alors

$$z(t) = 6e^{it} + \boxed{\left(3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + 3i\sin\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)\right)} + 2e^{4it}$$

On souhaite donc que la partie encadrée soit sous la forme $re^{\omega t+\varphi}$. Ce qui est toujours possible car il existe la forme polaire.

Voici le théorème salvateur :

Théorème Demi-somme

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Démonstration. Exercice ! □

Appliquons immédiatement ce résultat dans notre cas en posant $\alpha = 2t - \frac{\pi}{3}$ et $\beta = 2t + \frac{2\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + 3i\sin\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) &= 3\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} + 3i\frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2i} \\
&= 3\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} + 3\frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \\
&= \frac{3}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} + e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{-i\alpha} - e^{-i\beta}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + 2i\sin\left(\frac{-\alpha+\beta}{2}\right) e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Or $\frac{\alpha+\beta}{2} = 2t + \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + 3i\sin\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{3}{2}\left(2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) e^{2it+i\frac{\pi}{6}} + 2i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-2it-i\frac{\pi}{6}}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(2ie^{-2it-i\frac{\pi}{6}}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-2it-i\frac{\pi}{6}}\right) \\
&= 3e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-2it-i\frac{\pi}{6}} \\
&= 3e^{-2it-i\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

Finalement nous avons trouver l'expression épicycloïdique !

$$z(t) = 6e^{it} + 3e^{-2it-i\frac{\pi}{3}} + 2e^{4it}$$

Autrement : le premier cercle est de rayon 6 et de vitesse 1 sans phase. Le second cercle est de rayon 3 et de vitesse -2 avec $\frac{\pi}{3}$ comme phase. Le dernier cercle est de rayon 2 et de vitesse 4 sans phase.