TD2 - Suites et sommations

Récurrence

Exercice 1

Démontrer par récurrence la formule de la sommation quadratique de Gauss.

Exercice 2

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

Exercice 3

Montrer que toute application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant n$.

Variations

Exercice 4

Les suites suivantes sont-elles croissantes, décroissantes ou ni l'une ni l'autre ?

1. $u_n = n^2 + 2n + 1$
2. $v_n = \dfrac{2^n}{n}$
3. $w_n = \dfrac{2^n}{n!}$
4. $t_n = \dfrac{-n+1}{n-1}$

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 5

Parmi les suites suivantes déterminer celle qui sont arithmétiques, géométrique ou ni l'une ni l'autre. Préciser la raison lorsque cela est possible.

1. $u_n = 2n + 3$
2. $u_{n+1} = \dfrac{3n+1}{2}$
3. $u_{n+1} = 3^n + 3n$
4. $u_n = n^2 - n$
5. $u_n = 5^{n+3}$
6. $u_n = \dfrac{2}{3^{n+1}}$

Exercice 6

Soit u une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

1. $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31$. Calculer r et u_{100}.
2. $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$. Calculer r et u_{10}.

Exercice 7

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

1. $u_0 = 4$ et $q = 5$. Exprimer u_n en fonction de n.
2. $u_4 = 8$ et $q = 2$. Calculer u_2 et u_6.
3. $u_5 = 64$ et $u_7 = 256$. Calculer q et u_{10}.

Sommation

Exercice 8

Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{n=0}^{2} 3n$
2. $\sum_{k=0}^{3} k^2$
3. $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i}$
4. $\sum_{x=1}^{3} 1 - x$
5. $\sum_{y=0}^{4} 3y - 2$

Exercice 9

Écrire, à l'aide du symbole Σ, les sommes suivantes.

1. $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2$
2. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \cdots + 1982 \times 1983$
3. $3 + 7 + 11 + 15 + \cdots + 43 + 47$
4. $1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + 1024 - 2048$
5. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$
6. $1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11-12+13-14+15$

Exercice 10

Soit (a_k) une suite d'entier tel que $\sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2)$. Calculer en fonction de n les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{6} a_k$
2. $\sum_{k=0}^{n+1} a_k$
3. $\sum_{k=0}^{2n} a_k$
4. $\sum_{k=0}^{n} 1 - a_k$
5. $\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}$
6. $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$

Exercice 11

1. Rappeler la valeur de $\sum_{p=0}^{n} p^2$.
2. En déduire une formule pour $\sum_{p=0}^{n} (2p)^2$.
3. En déduire une formule pour $\sum_{p=0}^{n} (2p+1)^2$.
4. En déduire une formule pour $\sum_{p=0}^{2n+1} (-1)^p p^2$.

Exercice 12

Un bûcheron fou veut raser une forêt de dix mille arbres. Chaque année il coupe cinquante arbre de plus que l'année précédente. Au bout de dix ans il a rasé la forêt. Combien d'arbre a-t-il coupé la première année ?

Exercice 13

Dans un milieu nutritif une paramécie se multiplie par mitose toutes les secondes (la paramécie se divise en 2). En combien de temps le nombre de paramécie sera supérieur à un million ?

Binôme de Newton

Exercice 14

Calculer les expressions suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton.

1. $(1+2x)^4$
2. $(x-2)^5$
3. $(x+1)^6$
4. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$
5. $\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1}$
6. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^n$
7. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k$

Exercice 15

1. Montrer que $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. (a) Appliquer la formule du binôme à $(1+x)^n$.

   (b) En utilisant la formule du produit de somme déterminer les entiers c_k tel que $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k$.
3. Appliquer la formule du binôme à $(1+x)^{2n}$
4. En déduire une valeur de $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

Exercice 16

Quel est le coefficient de x^{17} dans l'expression $(1+x^5+x^7)^{20}$?

Équivalent

Exercice 17

Déterminer un équivalent des suites suivantes (lorsque cela est possible) et en déduire leur limite.

1. $u_n = 1$
2. $u_n = \frac{1}{2^n+1}$
3. $u_n = \frac{1}{2n+1}$
4. $u_n = \frac{-3n+5}{2n+1}$
5. $u_n = \frac{-3\sqrt{n}+5}{2n+1}$
6. $u_n = \frac{-3n+5}{2n^2+1}$
7. $u_n = (-1)^n$
8. $u_n = \frac{1}{1-\frac{n}{n^2+1}} - 1$
9. $u_n = \frac{n^2+1}{n^2-n+1} - 1$
10. $u_n = \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} - 1$
11. $u_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2 - 1$
12. $u_n = \left(\frac{-3n+1}{5n-4}\right)^2$
13. $u_n = \frac{1}{C_{2n}^n}$
14. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
15. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$
16. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$