

# Représentations des graphes et modélisation

## Exercice 1

Donner la représentation sagittale et matricielle des graphes suivants (on prendra garde à l'orientation).

1.  $\text{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d\}$  et  $\text{Arc}(\mathcal{G}) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, d)\}$
2.  $\text{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d\}$  et  $\text{Ar}(\mathcal{G}) = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
3.  $\text{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e\}$  et  $\text{Arc}(\mathcal{G}) = \{(a, b), (a, d), (b, e), (c, c), (c, a), (c, e), (d, e), (e, e)\}$
4.  $\text{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e, f\}$  et  $\text{Ar}(\mathcal{G}) = \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$
5.  $\text{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$  et  $\text{Arc}(\mathcal{G}) = \{(a, k), (c, j), (d, c), (e, g), (g, f), (h, e), (i, d), (j, i), (k, b), (l, a)\}$

## Exercice 2

Pour résoudre un problème particulièrement difficile, on utilise 11 algorithmes, numérotés de 1 à 11.

- L'algorithme 10 nécessite les résultats de l'algorithme 11.
- L'algorithme 7 nécessite les résultats des algorithmes 10, 9 et 8.
- L'algorithme 5 nécessite les résultats des algorithmes 6 et 7.
- L'algorithme 4 nécessite les résultats de l'algorithme 7.
- L'algorithme 2 nécessite les résultats des algorithmes 3, 4 et 5.
- L'algorithme 1 nécessite les résultats des algorithmes 2 et 7.

Représenter la situation à l'aide d'un graphe. On donnera la représentation sagittale et matricielle. Challenge : pour la représentation sagittale, faire en sorte que les arcs du graphes ne se coupent pas (on parle de graphe planaire).

## Exercice 3

Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation "être diviseur strict de". On donnera la représentation sagittale et matricielle. Challenge : pour la représentation sagittale, faire en sorte que les arcs du graphes ne se coupent pas.

## Exercice 4

Représenter la situation à l'aide d'un graphe.

1. **Pierre, papier, ciseaux.** Le papier enveloppe la pierre. La pierre casse les ciseaux. Les ciseaux coupent le papier.
2. **Pierre, papier, ciseaux, lézard, Spock.**
  - Le papier enveloppe la pierre
  - La pierre écrase le lézard
  - Le lézard empoisonne Spock
  - Spock casse les ciseaux
  - Les ciseaux décapitent le lézard
  - Le lézard mange le papier
  - Le papier réfute Spock
  - Spock vaporise la pierre
  - La pierre casse les ciseaux
  - Les ciseaux coupent le papier.



## Exercice 5

Construire un graphe non orienté dont les sommets sont les lettres (non accentuées) du mot "mathématiques" et dont les arêtes représentent la relation "est à côté de la lettre" dans le mot "mathématiques". On donnera la représentation sagittale et matricielle. Challenge : pour la représentation sagittale, faire en sorte que les arcs du graphes ne se coupent pas.

### Exercice 6

Construire un graphe dont les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets étant reliés si les faces correspondantes ont une arête commune. Challenge...

### Exercice 7

Construire le graphe dont les sommets sont les sous-ensembles à deux éléments de  $\{1, 2, 3, 4\}$ , deux sommets étant reliés si leur intersection est non vide. Challenge ...

### Exercice 8

Construire un graphe représentant la situation suivante : trois pays envoient chacun deux espions à une conférence, chacun devant entrer en contact avec tous les espions des autres pays.

### Exercice 9

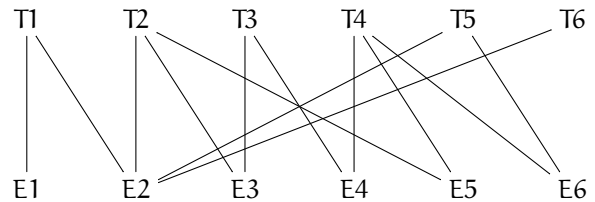
Le conseil d'administration d'une entreprise est composé de 7 personnes. Chacune de ces personnes influence un certain nombre de ses collègues :

- André influence Béatrice, Carole et Gaston.
- Béatrice n'influence personne.
- Carole influence Gaston et Fabienne.
- Daniel influence André et Béatrice.
- Étienne n'influence personne.
- Fabienne influence tout le monde sauf Étienne.
- Gaston influence Daniel.

Représenter la situation à l'aide d'un graphe. Challenge...

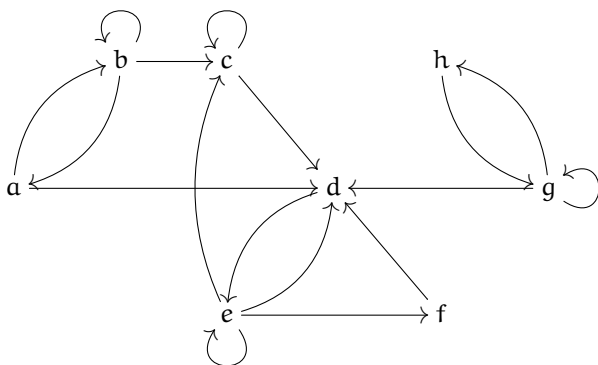
### Exercice 10

Dans le graphe ci-contre (on parle de graphe bi-parti), les sommets T1 à T6 représentent des travailleurs et les sommets E1 à E6 des emplois. Une arête relie un travailleur à un emploi si le travailleur a les qualifications nécessaires pour occuper cet emploi. Comment affecter les emplois aux travailleurs afin de minimiser le nombre de sans-emploi (un travailleur ne peut effectuer qu'un emploi et un emploi ne peut-être occupé que par un travailleur) ?



### Exercice 11

Désorienter les graphes suivants :



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
d	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
f	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
g	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
h	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
i	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

## Exercice 12

Pour rentrer chez lui (enfin chez Moe) Homer doit traverser un fleuve avec une barque. Il est accompagné de sa petite Maggie, son chien Petit-Papa-Noël et des billes de poison dans un bocal. Il ne peut prendre qu'un passager dans la barque. Sauf que Maggie prend les billes de poison pour des bonbons et si Homer ne l'en empêche pas elle en mangera. En plus Petit-Papa-Noël embête Maggie si Homer ne l'en empêche pas.

On représente la situation sur une rive par un ensemble  $E = \{\emptyset, M, P, C, MP, MC, PC, MPC\}$  dont les éléments décrivent les situations suivantes :

- $\emptyset$  : il n'y a rien sur la rive.
- $M$  : il n'y a que Maggie sur la rive.
- $P$  : il n'y a que le poison sur la rive.
- $C$  : il n'y a que le chien sur la rive.
- $MP$  : il n'y a que Maggie et le poison sur la rive.
- $MC$  : il n'y a que Maggie et le chien sur la rive.
- $PC$  : il n'y a que le poison et le chien sur la rive.
- $MPC$  : Maggie, le poison et le chien sont sur la rive.



Les Simpsons - Maggie s'éclipse (S20E13)

On considère le graphe  $\mathcal{G}$  dont les sommets sont des triplets  $(rg, rd, H)$  où  $rg$  est un élément de  $E$  décrivant l'état de la rive gauche,  $rd$  celui de la rive droite. Ces deux éléments devant respecter qu'à tout moment il y a toujours sur les deux rives Maggie, le poison et le chien. L'élément  $H$  appartient l'ensemble  $\{\text{gauche, droite}\}$  et décrit la position d'Homer.

1. Décrire l'ensemble **Som**( $\mathcal{G}$ ) en respectant les conditions de l'énoncé : Maggie ne peut rester seule sur une rive avec le poison ou le chien (il y a 10 sommets).
2. On reliera deux sommets du graphe si l'on peut passer de l'un à l'autre par le transbordement d'au plus un passager. Donner la représentation sagittale du graphe.
3. Proposer deux solutions différentes pour Homer.

## Exercice 13

Vous êtes dans une antichambre d'un temple très ancien. Face à vous, une relique magnifique et extrêmement précieuse ( $\$ \_ \$$ ) posée sur un piédestal. Mais la galerie est piégée! Si le poids sur le piédestal de la relique varie un énorme rocher va déferler et vous écraser.

Vos recherches vous ont appris que la relique pèse exactement 3kg. Vous avez à votre disposition, une jarre de 6 litres remplis d'eau, une gourde de 5 litres vide et une bouteille de 1 litre vide mais aucun moyen de mesure.

Comment prendre la relique et rester en vie?

Ah! Vous êtes également pourchassé par des pilliers de tombe extraterrestres, mutants, zombies et venant du futur d'une dimension parallèle du farwest la nuit; ils arrivent... vous devez donc trouver la solution la plus rapide (on pourra utiliser un ordinateur pour faire des calculs compliqué).



Indiana Jones - Les aventuriers de l'arche perdue

Pour cela on représente la situation par un graphe dont les sommets sont des triplets  $(a, b, c)$  où  $a, b$  et  $c$  sont des entiers tels que :

- $0 \leq a \leq 6$  représente le contenu (en litre) de la jarre de 6 litres,

- $0 \leq b \leq 5$  représente le contenu (en litre) de la gourde de 5 litres,
- $0 \leq c \leq 1$  représente le contenu (en litre) de la bouteille de 1 litre,
- $a + b + c = 6$ .

1. Donner l'ensemble des sommets de ce graphe (il y en a 12).
2. On reliera deux sommets entre eux si l'on peut passer de l'un à l'autre par un (et un seul) transvasement d'un récipient à un autre. Donner la représentation matricielle de ce graphe.
3. En déduire deux solutions différentes au problème dont celle minimisant le nombre de transvasement.
4. Mêmes questions avec des récipients de 8 (plein), 5 (vide) et 3 litres (vide), pour obtenir 4 litres (24 sommets).