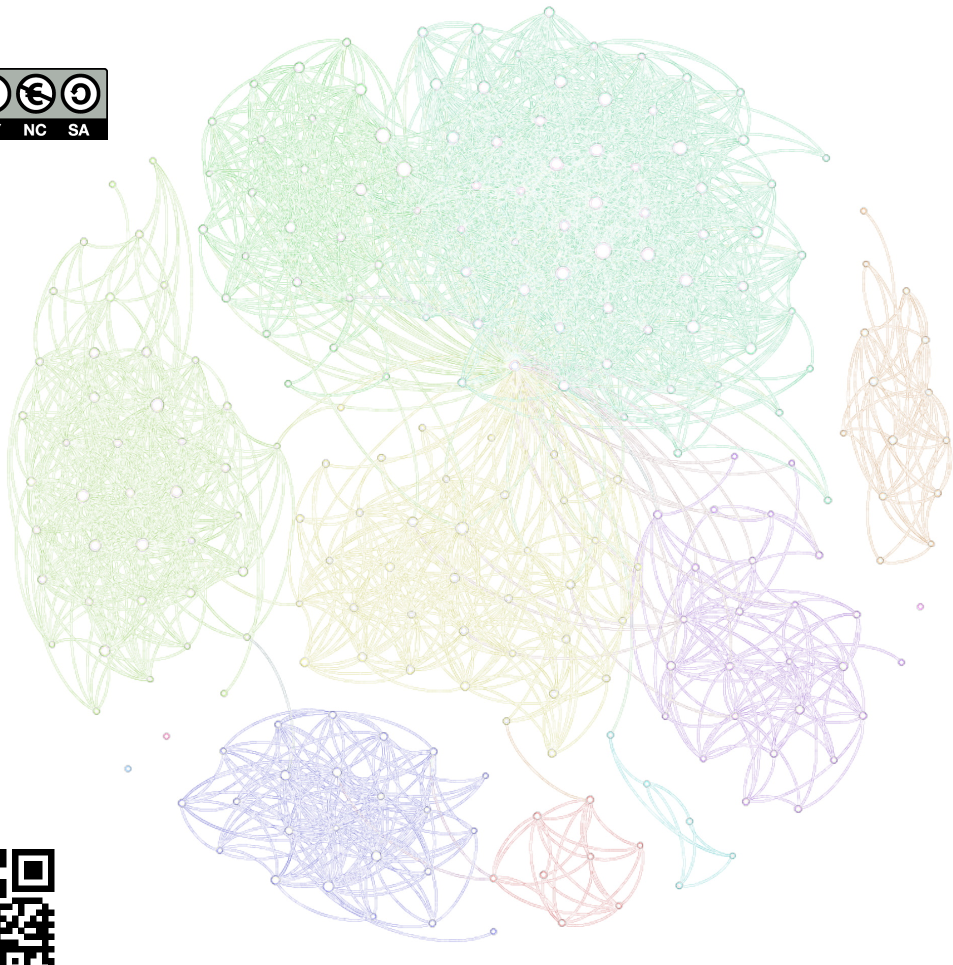
Graphes et langages
Exercices

David Hébert

hebert.iut@gmail.com

2024



Représentations des graphes et modélisation

Exercice 1

Donner la représentation sagittale et matricielle des graphes suivants (on prendra garde à l'orientation).

1. $\mathbf{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d\}$ et $\mathbf{Arc}(\mathcal{G}) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, d)\}$
2. $\mathbf{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d\}$ et $\mathbf{Ar}(\mathcal{G}) = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
3. $\mathbf{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e\}$ et $\mathbf{Arc}(\mathcal{G}) = \{(a, b), (a, d), (b, e), (c, c)(c, a)(c, e), (d, e), (e, e)\}$
4. $\mathbf{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $\mathbf{Ar}(\mathcal{G}) = \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$
5. $\mathbf{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ et $\mathbf{Arc}(\mathcal{G}) = \{(a, k), (c, j), (d, c), (e, g), (g, f), (h, e), (i, d), (j, i), (k, b), (l, a)\}$

Exercice 2

Pour résoudre un problème particulièrement difficile, on utilise 11 algorithmes, numérotés de 1 à 11.

— L'algorithme 10 nécessite les résultats de l'algorithme 11.
— L'algorithme 7 nécessite les résultats des algorithmes 10, 9 et 8.
— L'algorithme 5 nécessite les résultats des algorithmes 6 et 7.
— L'algorithme 4 nécessite les résultats de l'algorithme 7.
— L'algorithme 2 nécessite les résultats des algorithmes 3, 4 et 5.
— L'algorithme 1 nécessite les résultats des algorithmes 2 et 7.

Représenter la situation à l'aide d'un graphe. On donnera la représentation sagittale et matricielle. Challenge : pour la représentation sagittale, faire en sorte que les arcs du graphes ne se coupent pas (on parle de graphe planaire).

Exercice 3

Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation "être diviseur strict de". On donnera la représentation sagittale et matricielle. Challenge : pour la représentation sagittale, faire en sorte que les arcs du graphes ne se coupent pas.

Exercice 4

Représenter la situation à l'aide d'un graphe.

1. **Pierre, papier, ciseaux**. Le papier enveloppe la pierre. La pierre casse les ciseaux. Les ciseaux coupent le papier.

2. **Pierre, papier, ciseaux, lézard, Spock**.
   — Le papier enveloppe la pierre
   — La pierre écrase le lézard
   — Le lézard empoisonne Spock
   — Spock casse les ciseaux
   — Les ciseaux décapitent le lézard
   — Le lézard mange le papier
   — Le papier réfute Spock
   — Spock vaporise la pierre
   — La pierre casse les ciseaux
   — Les ciseaux coupent le papier.

Exercice 5

Construire un graphe non orienté dont les sommets sont les lettres (non accentuées) du mot "mathématiques" et dont les arêtes représentent la relation "est à coté de la lettre" dans le mot "mathématiques". On donnera la représentation sagittale et matricielle. Challenge : pour la représentation sagittale, faire en sorte que les arcs du graphes ne se coupent pas.

Exercice 6

Construire un graphe dont les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets étant reliés si les faces correspondantes ont une arête commune. Challenge...

Exercice 7

Construire le graphe dont les sommets sont les sous-ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$, deux sommets étant reliés si leur intersection est non vide. Challenge ...

Exercice 8

Construire un graphe représentant la situation suivante : trois pays envoient chacun deux espions à une conférence, chacun devant entrer en contact avec tous les espions des autres pays.

Exercice 9

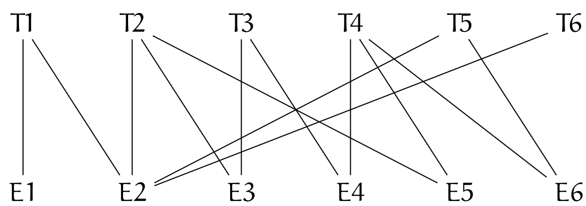
Le conseil d'administration d'une entreprise est composé de 7 personnes. Chacune de ces personnes influence un certain nombre de ses collègues :

— André influence Béatrice, Carole et Gaston.
— Béatrice n'influence personne.
— Carole influence Gaston et Fabienne.
— Daniel influence André et Béatrice.
— Étienne n'influence personne.
— Fabienne influence tout le monde sauf Étienne.
— Gaston influence Daniel.

Représenter la situation à l'aide d'un graphe. Challenge...

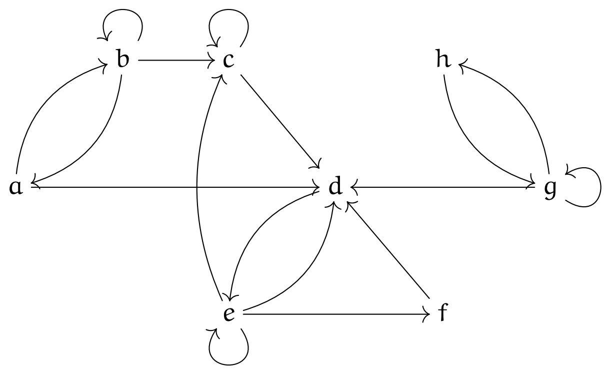
Exercice 10

Dans le graphe ci-contre (on parle de graphe bi-parti), les sommets $\mathsf{T1}$ à $\mathsf{T6}$ représentent des travailleurs et les sommets $\mathsf{E1}$ à $\mathsf{E6}$ des emplois. Une arête relie un travailleur à un emploi si le travailleur a les qualifications nécessaires pour occuper cet emploi. Comment affecter les emplois aux travailleurs afin de minimiser le nombre de sans-emploi (un travailleur ne peut effectuer qu'un emploi et un emploi ne peut-être occupé que par un travailleur) ?



Exercice 11

Désorienter les graphes suivants :



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
d	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
f	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
g	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
h	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
i	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Exercice 12

Pour rentrer chez lui (enfin chez Moe) Homer doit traverser un fleuve avec une barque. Il est accompagné de sa petite Maggie, son chien Petit-Papa-Noël et des billes de poison dans un bocal. Il ne peut prendre qu'un passager dans la barque. Sauf que Maggie prend les billes de poison pour des bonbons et si Homer ne l'en empêche pas elle en mangera. En plus Petit-Papa-Noël embête Maggie si Homer ne l'en empêche pas.

On représente la situation sur une rive par un ensemble $E = \{\varnothing, M, P, C, MP, MC, PC, MPC\}$ dont les éléments décrivent les situations suivantes :

— $\varnothing$: il n'y a rien sur la rive.
— M : il n'y a que Maggie sur la rive.
— P : il n'y a que le poison sur la rive.
— C : il n'y a que le chien sur la rive.
— MP : il n'y a que Maggie et le poison sur la rive.
— MC : il n'y a que Maggie et le chien sur la rive.
— PC : il n'y a que le poison et le chien sur la rive.
— MPC : Maggie, le poison et le chien sont sur la rive.

Les Simpsons - Maggie s'éclipse (S20E13)

On considère le graphe $\mathcal{G}$ dont les sommets sont des triplets (rg, rd, H) où rg est un élément de E décrivant l'état de la rive gauche, rd celui de la rive droite. Ces deux éléments devant respecter qu'à tout moment il y a toujours sur les deux rives Maggie, le poison et le chien. L'élément H appartient l'ensemble $\{\mathtt{gauche}, \mathtt{droite}\}$ et décrit la position d'Homer.

1. Décrire l'ensemble **Som**$(\mathcal{G})$ en respectant les conditions de l'énoncé : Maggie ne peut rester seule sur une rive avec le poison ou le chien (il y a 10 sommets).
2. On reliera deux sommets du graphe si l'on peut passer de l'un à l'autre par le transbordement d'au plus un passager. Donner la représentation sagittale du graphe.
3. Proposer deux solutions différentes pour Homer.

Exercice 13

Vous êtes dans une antichambre d'un temple très ancien. Face à vous, une relique magnifique et extrêmement précieuse ($_$) posée sur un piédestal. Mais la galerie est piégée ! Si le poids sur le piédestal de la relique varie un énorme rocher va déferler et vous écraser.

Vos recherches vous ont appris que la relique pèse exactement 3kg. Vous avez à votre disposition, une jarre de 6 litres remplis d'eau, une gourde de 5 litres vide et une bouteille de 1 litre vide mais aucun moyen de mesure.

Comment prendre la relique et rester en vie ?

Ah ! Vous êtes également pourchassé par des pilleurs de tombe extraterrestres, mutants, zombies et venant du futur d'une dimension parallèle du farwest la nuit ; ils arrivent... vous devez donc trouver la solution la plus rapide (on pourra utiliser un ordinateur pour faire des calculs compliqué).


Indiana Jones - Les aventuriers de l'arche perdu

Pour cela on représente la situation par un graphe dont les sommets sont des triplets (a, b, c) où a, b et c sont des entiers tels que :

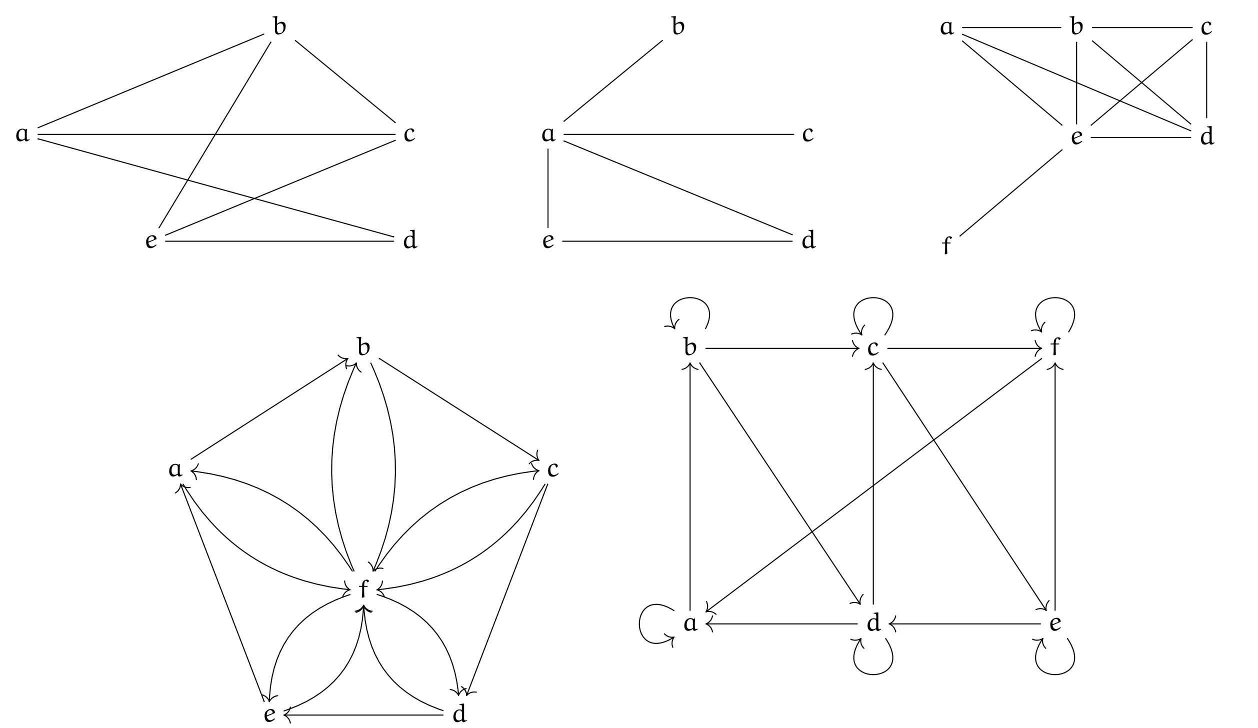
— $0 \leqslant a \leqslant 6$ représente le contenu (en litre) de la jarre de 6 litres,
— $0 \leqslant b \leqslant 5$ représente le contenu (en litre) de la gourde de 5 litres,
— $0 \leqslant c \leqslant 1$ représente le contenu (en litre) de la bouteille de 1 litre,
— $a + b + c = 6$.

1. Donner l'ensemble des sommets de ce graphe (il y en a 12).
2. On reliera deux sommets entre eux si l'on peut passer de l'un à l'autre par un (et un seul) transvasement d'un récipient à un autre. Donner la représentation matricielle de ce graphe.
3. En déduire deux solutions différentes au problème dont celle minimisant le nombre de transvasement.
4. Mêmes questions avec des récipients de 8 (plein), 5 (vide) et 3 litres (vide), pour obtenir 4 litres (24 sommets).

Graphes standards

Exercice 14

Déterminer parmi les graphes suivants, les sous-graphes standards maximaux, c'est à dire les sous-graphes qui sont des cliques, chaines ou cycles à n sommets pour n le plus grand possible.



Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Déterminer $\sharp(\mathbf{Arc}(\mathcal{K}_n))$ et $\sharp(\mathbf{Ar}(\mathcal{K}_n))$.

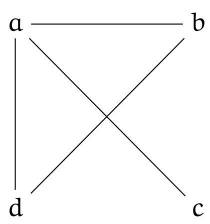
Langages, Chaines et chemins

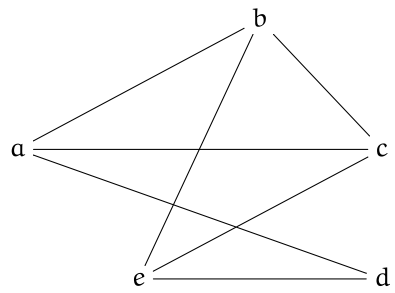
Exercice 16

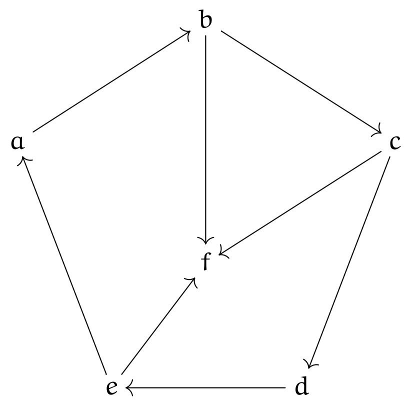
1. Décrire $\mathbb{N}$ comme langage sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. Décrire $\mathbb{Z}$ comme langage sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$.
3. Décrire $\mathbb{Q}$ comme langage sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -, /\}$.
4. Décrire l'ensemble des nombres décimaux comme langage sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$.

Exercice 17

Déterminer pour chacun des graphes suivants, toutes les chaines de longueur 2. On les classera dans l'ordre lexicographique (des sommets).







Exercice 18

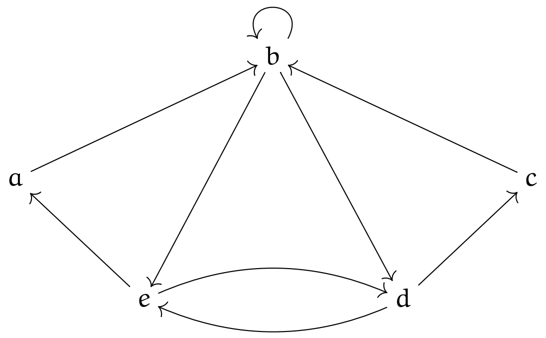
On considère les graphes orientés suivants décrits par leur matrice booléenne. Dans chacun des cas dire s'il existe une chaine de longueur 4 entre a et c.

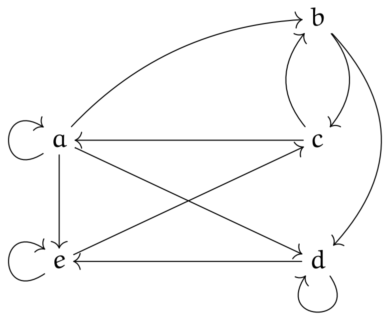
$$M_1 = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad M_2 = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

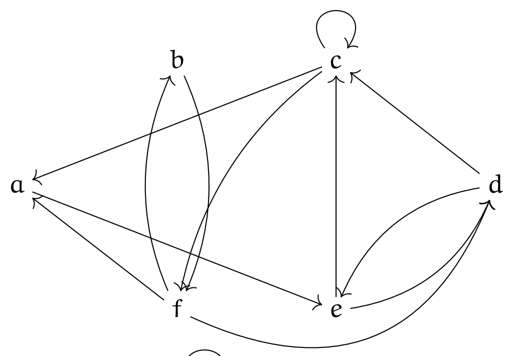
$$M_3 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad M_4 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

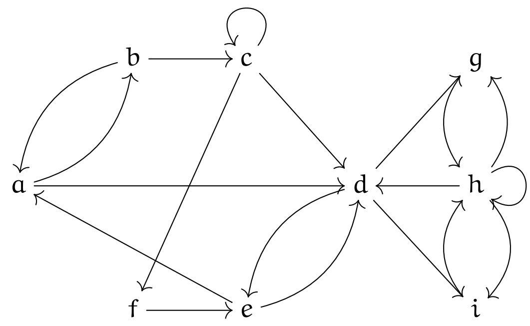
Exercice 19

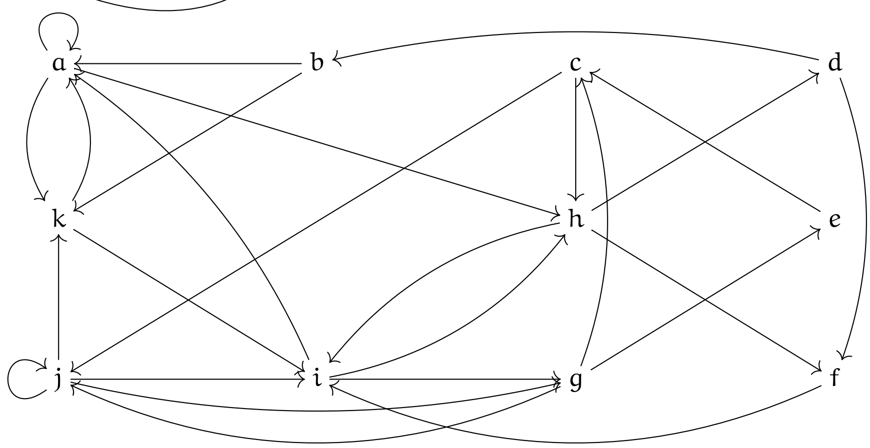
Pour chacun des graphes suivants déterminer $\Gamma^{-3}(a, \mathcal{G})$ et $\Gamma^{+4}(c, \mathcal{G})$.





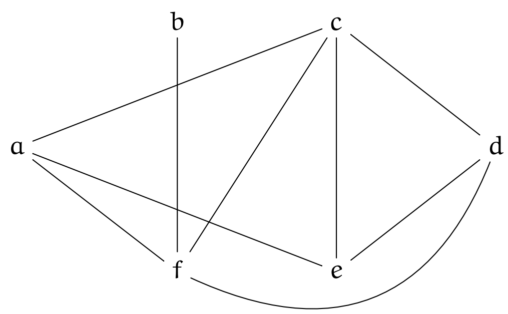


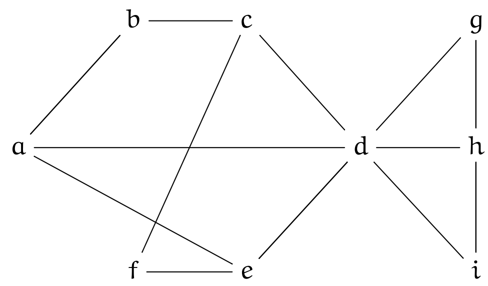


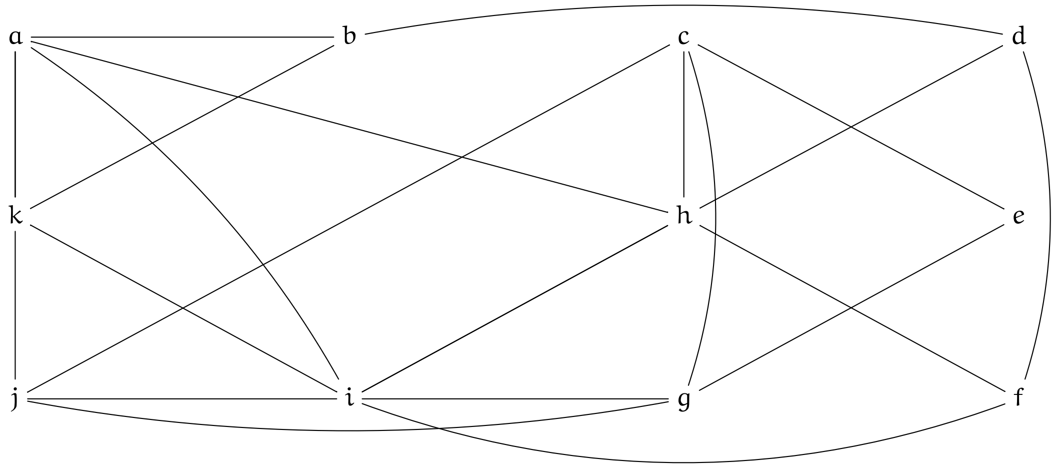


Exercice 20

Pour chacun des graphes suivants déterminer $\Gamma^3(b, \mathcal{G})$.





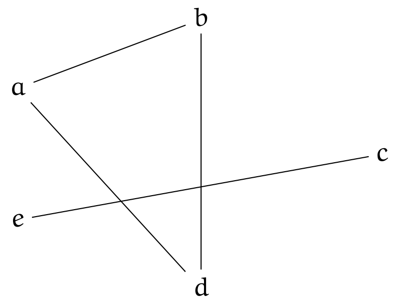


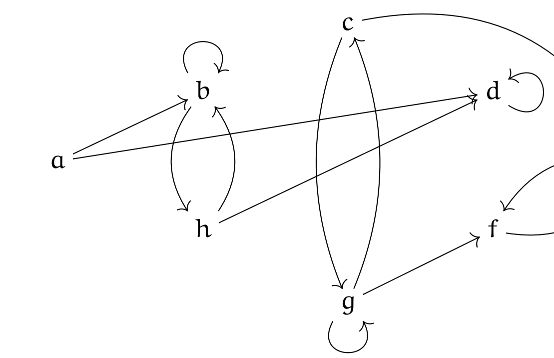
Exercice 21

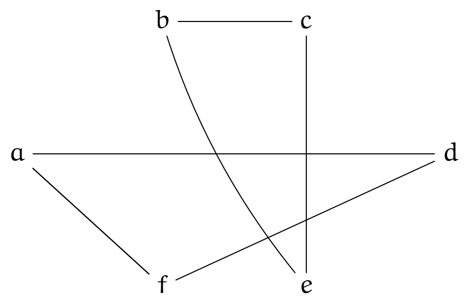
Professeur Layton et l'appel du spectre.

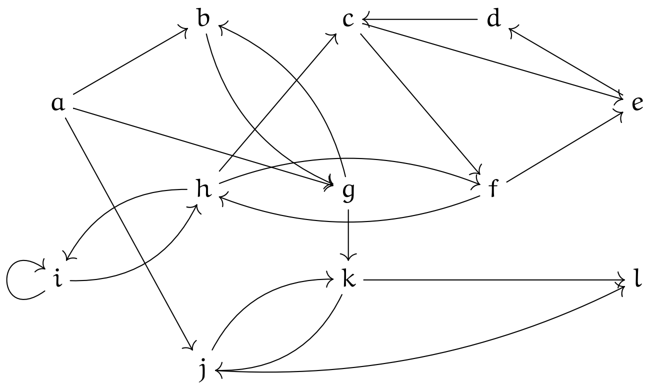
Exercice 22

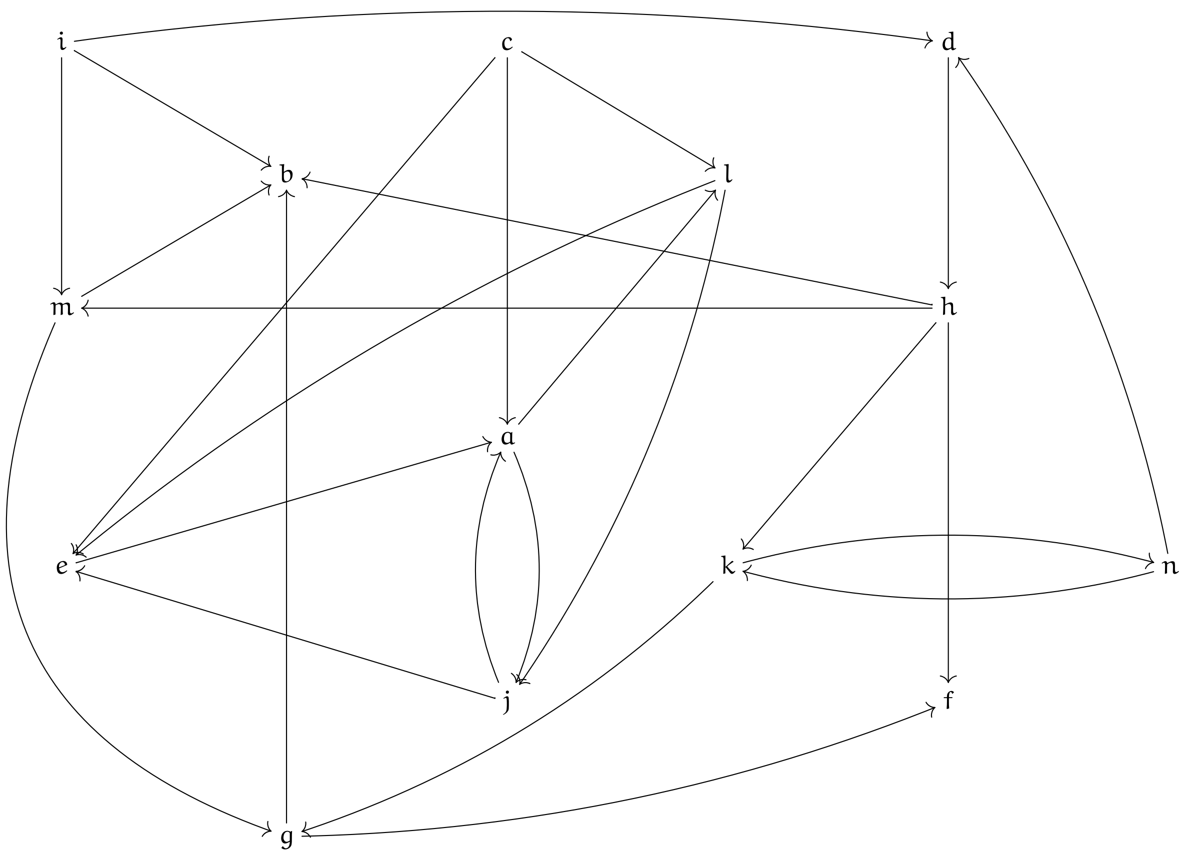
Pour chacun des graphes suivants déterminer $\mathrm{CC}(a, \mathcal{G})$.





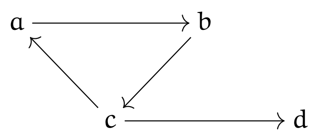


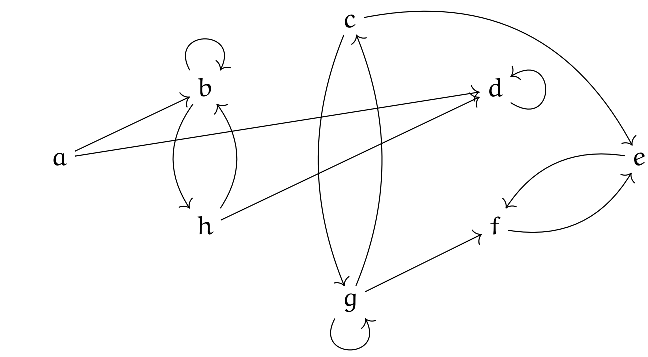


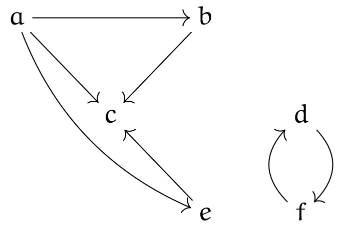


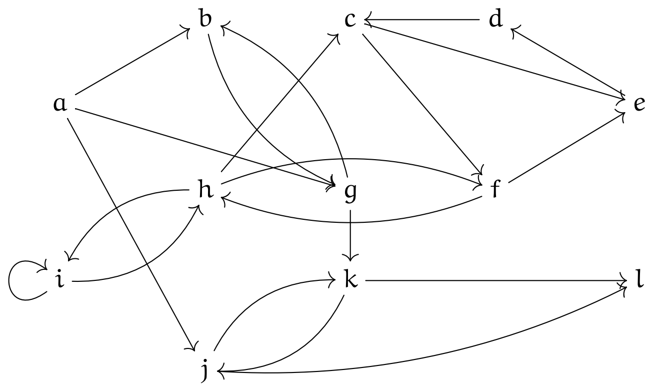
Exercice 23

Déterminer le graphe réduit des graphes suivants


a
b
c
d


c
b
d
a
e
h
f
g


a
b
c
d
e
f


b
c
d
a
e
h
g
f
i
k
l
j

Degrés

Exercice 24

Déterminer tous les graphes orientés $\mathcal{G}$ ayant les demi-degrés suivants :

1.

$\mathbf{Som}(\mathcal{G})$	α	β	γ	δ	ϵ
$d^{+1}(\bullet,\mathcal{G})$	2	3	1	0	3
$d^{-1}(\bullet,\mathcal{G})$	3	0	3	0	4

2.

$\mathbf{Som}(\mathcal{G})$	1	2	3	4	5	6
$d^{+1}(\bullet,\mathcal{G})$	2	3	1	0	3	2
$d^{-1}(\bullet,\mathcal{G})$	3	0	3	0	5	0

3.

$\mathbf{Som}(\mathcal{G})$	a	b	c	d	e	f
$d^{+1}(\bullet,\mathcal{G})$	1	3	2	0	1	0
$d^{-1}(\bullet,\mathcal{G})$	0	2	2	0	3	0

Exercice 25

1. Est-il possible de relier 5 ordinateurs de telle sorte que chacun ne soit connecté qu'à 2 autres machine ? Si oui proposer une configuration.
2. Est-il possible de relier 5 ordinateurs de telle sorte que chacun ne soit connecté qu'à 3 autres machine ? Si oui proposer une configuration.
3. Est-il possible de relier 6 ordinateurs de telle sorte que chacun ne soit connecté qu'à 3 autres machine ? Si oui proposer une configuration.

Exercice 26

Montrer que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.

Exercice 27

Comment tracer 5 segments sur une feuille de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?

Exercice 28

Un groupe de personne est tel que :
- chaque personne est membre de exactement deux associations,
- chaque association comprend exactement trois membres,
- deux associations quelconques ont toujours exactement un membre en commun.

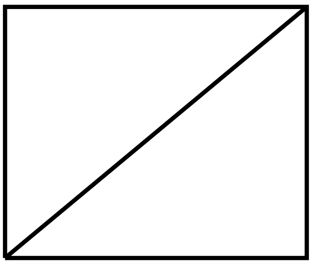
Combien y a-t-il de personnes et d'associations ?

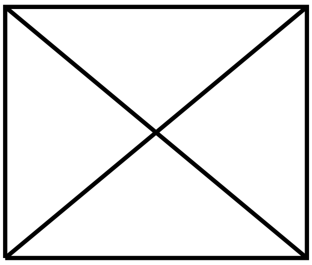
Exercice 29

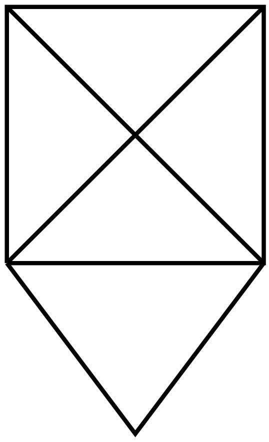
Dessiner un graphe non orienté a au moins deux sommets, tel que tous les sommets ont des degrés distincts.

Exercice 30

Reproduire ces dessins sans lever le crayon du papier et sans passer deux fois par la même arête.

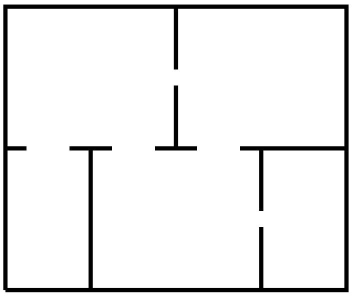


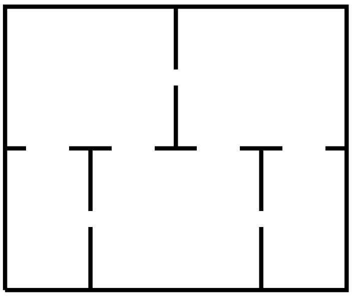


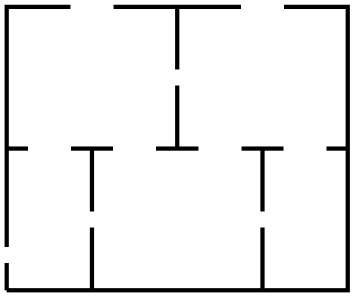


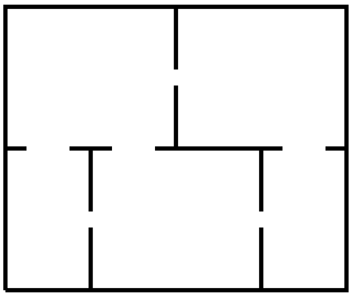
Exercice 31

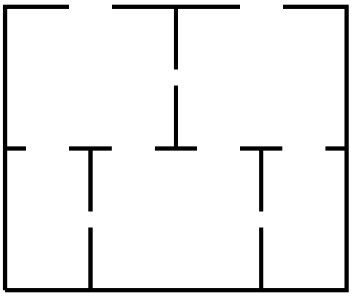
Voici les plans de plusieurs maisons. Pour chacune d'elle dire s'il est possible de la traverser en passant une et une seule fois par chaque porte et en revenant dans la pièce de départ.

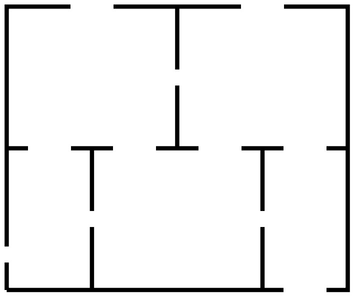
1. 

3. 

5. 

2. 

4. 

6. 

Exercice 32

Professeur Layton et l'appel du spectre.

Exercice 33

On dispose d'un fil de fer de 120 centimètres. Est-il possible de préparer la carcasse d'un cube de 10 centimètres d'arête sans couper le fil ? Si oui, proposer une solution, sinon indiquer le nombre au minimum qu'il faut couper le fil de fer.

Exercice 34

Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Le roi Arthur fait s'assoir ses $2n$ chevaliers autour de la table ronde. Chacun des chevalier possède au plus $n-1$ ennemis parmi les autres chevaliers (et cela est toujours réciproque). Prouver que Merlin peut trouver un arrangement des $2n$ chevaliers de sorte qu'aucun ne soit assis à coté de ses ennemis (seul des chevaliers s'assoient à la table ronde !).

Exercice 35

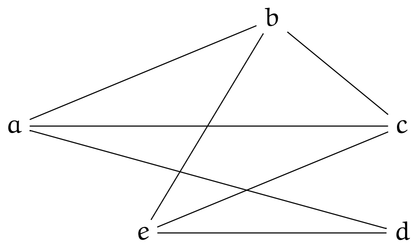
Dans un tableau à dix lignes et dix colonnes, on place les chiffres de 0 à 9 ; chaque chiffre apparaissant exactement dix fois.

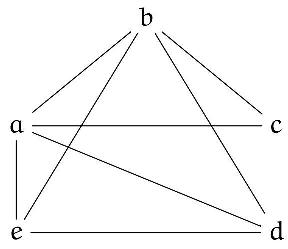
Prouver qu'il existe une ligne ou une colonne avec trois chiffres différents.

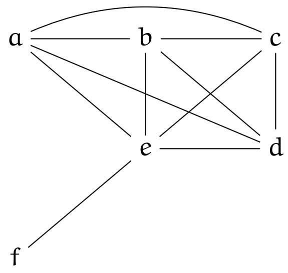
Coloration

Exercice 36

Pour chacun des graphes suivants indiquer s'il s'agit d'un graphe planaire. Si oui donner une représentation sagittale où les arêtes ne se croissent pas. Colorier ces graphes de telle sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. En déduire le nombre chromatique de chaque graphe.







Exercice 37

Colorier la carte des régions de France de sorte que chaque région ai une couleur différente de ses régions limitrophes. En déduire le nombre chromatique de cette carte.

Exercice 38

Organisons les rattrapages ! Ayant correctement justifié leurs absences, des étudiants sont conviés à participer à des examens de rattrapage. Pour des raisons techniques, il ne peut avoir qu'un examen de rattrapage par matière et évidement un étudiant ne peut passer qu'un seul examen par demi-journée. Voici la liste des étudiants et des matières qu'ils ont à rattraper :

— Jean : Communication et Réseau
— Élodie : PHP, Réseau et Analyse
— Pierre : Graphe, Java et Anglais
— Thomas : Algèbre et Analyse
— Jacques : Analyse, Java et Algèbre
— Paul : Algèbre et Anglais

1. Représenter le problème à l'aide d'un graphe non orienté dont les sommets sont les matières au programme du rattrapage. Une arête reliera deux sommets, c'est à dire deux matières, si au moins un même candidat doit rattraper ces matières.
2. Déterminer le nombre chromatique de ce graphe.
3. Combien de demi-journée doit-on prévoir pour ces rattrapages ?
4. Qui convoquer et quand ?

Exercice 39

Sept compagnies de voyages dans le temps proposent une journée inoubliable dans quatre époques différentes : la préhistoire, le moyen-âge, le futur et la fin des temps. A cause de raison thermotemporelle (ou électrotemporelle suivant que la constante de Planck-Lannister varie ou pas), une époque ne peut être visitée par plusieurs compagnie en même temps. De plus chaque compagnie propose des circuits différents :

1. La compagnie 'Paradoxale' : uniquement la préhistoire.
2. La compagnie 'Doloréane' : la préhistoire et le futur.
3. La compagnie 'Trou noir' : uniquement la fin des temps.
4. La compagnie 'Einstein' : le futur et lafin des temps.
5. La compagnie 'Chronos' : la préhistoire et le moyen-âge.
6. La compagnie 'Interstellar' : le moyen-âge et la fin des temps.
7. La compagnie 'H.G. Wells' : le moyen-âge et le futur.

Sur combien de jour minimum ces compagnies peuvent-elles organiser les visites ? Proposer une configuration.

Exercice 40

Un fabriquant de produit chimique doit répondre à une grosse commande de 6 produits : A, B, C, D, E et F. Pour satisfaire son client, il doit livrer ce produit le jour même et il y a une demi-journée de transport entre son usine et le client. La livraison doit donc se faire en une fois. De plus, pour des raisons de sécurité, certain produits ne peuvent pas voyager ensemble :

— A ne peut pas voyager avec B, C, D, E et F.
— B ne peut pas voyager avec A, C et E.
— C ne peut pas voyager avec A, B et D.
— D ne peut pas voyager avec A, C, E et F.
— E ne peut pas voyager avec A, B et D.
— F ne peut pas voyager avec A et D.

Combien de camion au minimum seront nécessaire pour répondre à cette commande ?

Et si de plus E et C ne peuvent voyager ensemble ?

Exercice 41

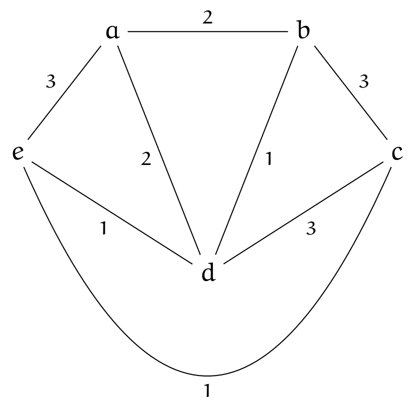
Dans un pays donné, on désire réorganiser les voies de communication de façon à relier entre elles les 11 plus grandes villes. Elles doivent être reliées deux à deux soit par un canal, soit par un chemin de fer.

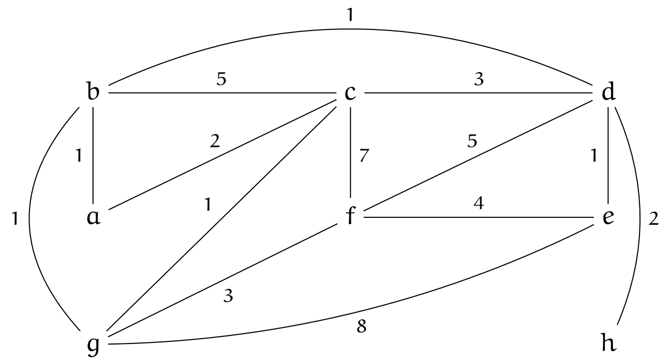
Or les ingénieurs du pays, s'ils savent parfaitement faire passer une voie ferrée au-dessus d'un canal, ne savent pas faire passer une voie ferrée au-dessus d'une autre, ni un canal au-dessus d'un autre ! Peut-on les aider, et leur proposer un tracé ? (On pourra placer les villes comme on le désire).

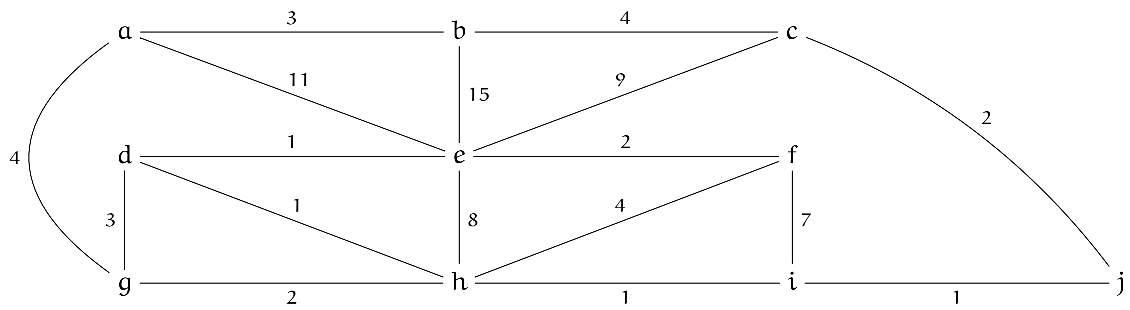
Solution de Djisktra

Exercice 42

Appliquer la solution de Djikstra aux graphes suivants pour déterminer les chemins les plus court partant de a et atteignant tous les autres sommets du graphe :







Exercice 43

Dans cet Exercice on donne les graphes orientés valués par leur matrice. On indique la valuation directement dans la matrice (ainsi 0 indique qu'il n'existe pas d'arc et 3 indique qu'il existe un arc valué de valeur 3).

Pour chacun des graphes suivants, donner les plus cours chemins partant de a.

1.

	a	b	c	d
a	0	0	2	0
b	3	0	0	1
c	0	0	0	1
d	1	3	1	0

2.

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	2	2	0
b	0	0	0	0	3	0
c	1	0	0	2	0	2
d	0	2	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	0
f	0	1	0	2	4	0

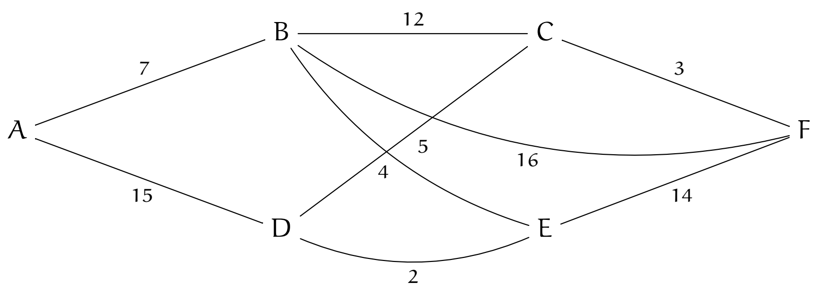
3.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	0	0	3	0	1	1	0	4	3	0	0
b	1	2	0	7	0	0	0	0	2	0	0
c	0	5	0	0	0	1	0	2	1	0	0
d	1	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0
e	0	5	0	5	0	0	2	0	1	7	0
f	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
g	0	0	1	0	0	0	0	0	7	0	0
h	0	1	0	1	0	0	0	0	0	8	0
i	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	7
j	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
k	0	9	1	1	0	0	2	0	0	1	0

4.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
a	0	0	0	0	7	0	0	0	3	0	0	0	9	9	1	0	2	0	1	9	0	0	7	0	0	0
b	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
c	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	0	8	0	0
d	0	4	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e	1	0	0	0	0	0	7	0	0	5	1	0	0	0	0	0	1	0	9	0	0	0	0	5	0	1
f	1	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	1	1	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
h	3	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	4	0	8	0	0	8	0	4
i	0	0	0	0	2	0	0	0	8	0	0	0	2	0	0	0	0	9	0	1	0	0	0	0	0	0
j	0	0	3	0	7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
k	0	0	0	0	0	4	0	0	5	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5	0	0	0	0	1	0	0	0
m	0	0	0	0	0	1	0	0	0	7	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n	0	0	1	4	0	0	0	5	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
o	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0
p	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q	0	0	0	0	7	7	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	2	0	0	7	0	0	0	0	0	0
r	0	0	0	0	8	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s	0	0	2	0	0	0	0	7	0	3	0	0	7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
u	0	3	0	0	1	0	4	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	5	0	0
v	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	1	0	0	4	0	1	0	0	0	0	0	0
w	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	5	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	4	0	0	0
y	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
z	4	0	0	0	5	0	8	2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0

5.



Exercice 44

Le prince est parti à la recherche du trésor ; il peut accomplir les actions suivantes :

- Du point de départ, aller à la ville du marché, en contournant la rivière par un gué : 4 jours.
- Du point de départ, traverser la forêt : 1 jour.
- Depuis la forêt, abattre des arbres pour traverser la rivière, et se rendre à la ville du marché : 2 jours.
- Depuis la forêt, se rendre à la capitale provinciale en traversant les marais : 7 jours.
- S'équiper chaudement au marché, et partir pour le col du nord : 5 jours.
- Trouver un bon cheval au marché, et se rendre à la capitale provinciale par la grand-route : 3 jours.
- Depuis le col du nord, se rendre au refuge du devin : 3 jours.
- Depuis la capitale provinciale, se rendre au refuge du devin : 4 jours.
- Se rendre de la capitale provinciale au palais du roi, en étant retardé par des contrôles : 10 jours.

— Au sortir du devin, partir directement chercher l'épée, et la trouver après s'être perdu par manque de carte : 20 jours.
— Au sortir de chez le devin, au mépris de ses avis, se rendre directement à la grotte et tuer le dragon avec un canif : 32 jours (il faut du temps pour le tuer avec un canif).
— Bien conseillé par le devin, prendre un raccourci pour le palais du roi : 5 jours.
— Un fois arrivé au palais du roi, séduire la bibliothécaire, puis trouver les cartes qui expliquent l'emplacement de l'épée et du trésor : 6 jours.
— En utilisant les cartes trouvées dans la bibliothèque, faire tout le tour de la montagne, et traverser un labyrinthe qui mène directement au trésor : 30 jours.
— En utilisant les cartes, aller chercher l'épée pour combattre le dragon : 7 jours.
— S'entraîner à l'épée, puis tuer le dragon : 8 jours.
— Une fois l'épée trouvée, au lieu d'affronter le dragon, utiliser l'épée pour creuser un tunnel par dessous, et déboucher directement dans la cachette du trésor : 18 jours.
— Une fois le dragon tué, résoudre l'énigme qui ouvre la cachette du trésor : 9 jours.

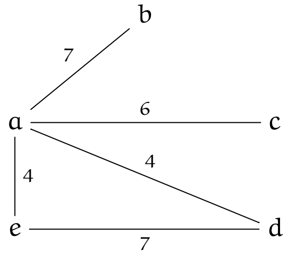
Comment doit-il faire pour récupérer le trésor le plus vite possible ? Quel temps lui faudra-t-il ?

Arbres couvrant de poids minimum

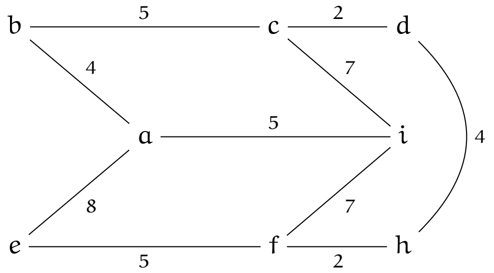
Exercice 45

Pour chacun des graphes suivants déterminer un arbre couvrant de poids minimum.

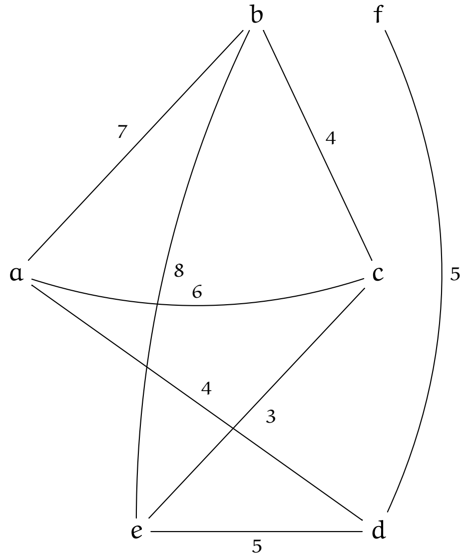
1.



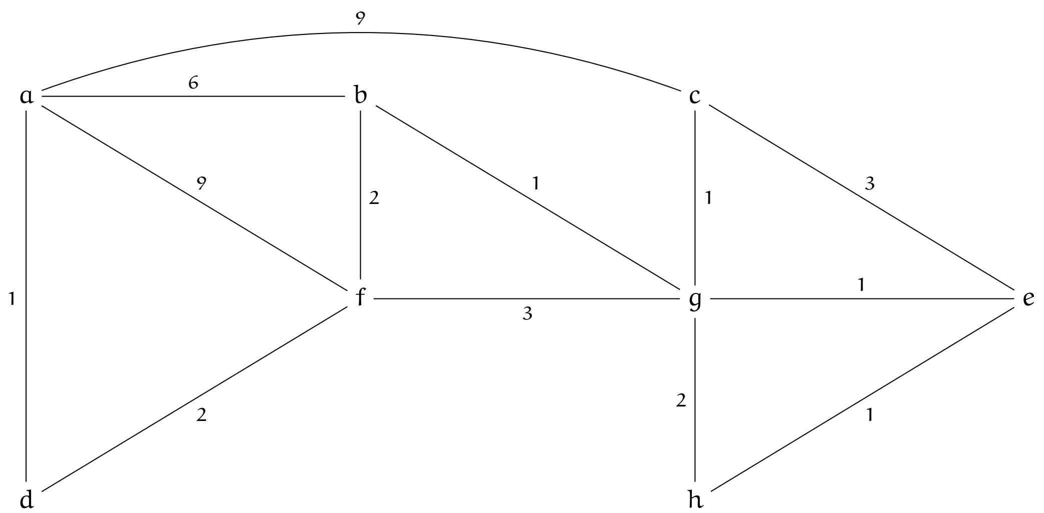
2.



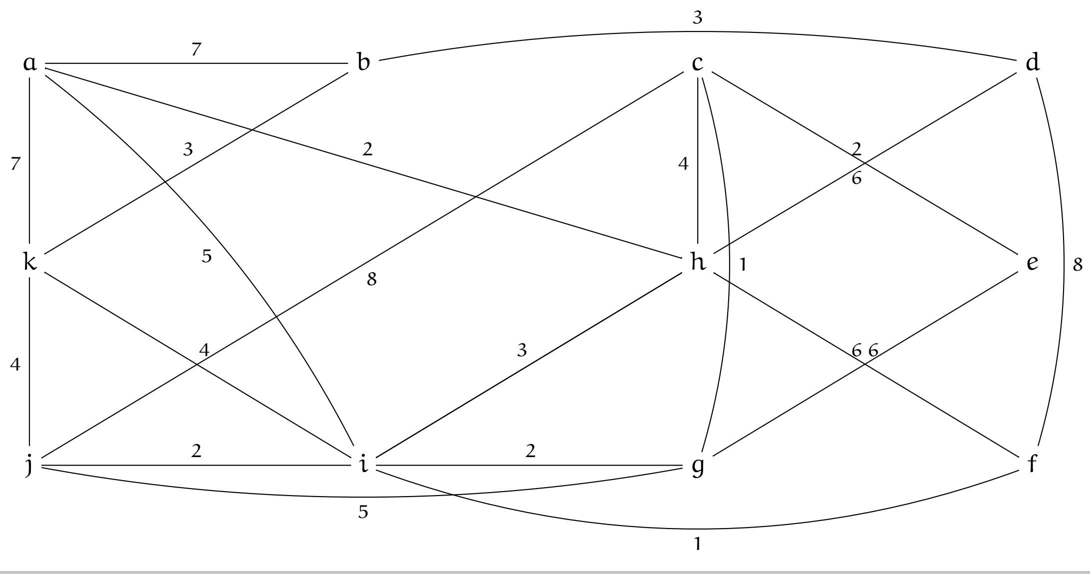
3.



4.



5.



Exercice 46

Dans cet Exercice on donne les graphes valués par leur matrice. On indique la valuation directement dans la matrice (ainsi 0 indique qu'il n'existe pas d'arc et 3 indique qu'il existe un arc valué de valeur 3).

Pour chacun des graphes suivants, donner un arbre couvrant de poids minimum.

1.

	a	b	c	d
a	0	2	3	0
b	2	0	1	1
c	3	1	0	2
d	0	1	2	0

2.

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	4	0	3	3	0	5
b	4	0	2	1	1	0	3
c	0	2	0	2	4	1	0
d	3	1	2	0	3	0	1
e	3	1	4	3	0	1	2
f	0	0	1	0	1	0	0
g	5	3	0	1	2	0	0

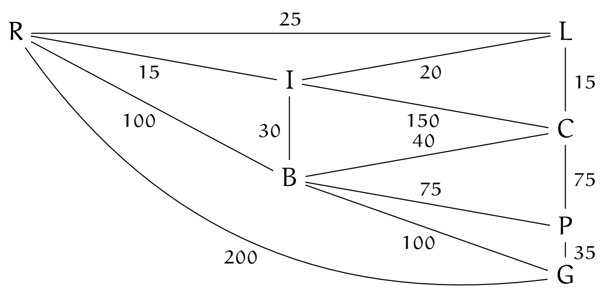
3.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	0	3	0	7	7	0	3	0	5	2	0
b	3	0	2	4	1	0	2	0	2	0	0
c	0	2	0	0	3	3	0	0	0	0	1
d	7	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	7	1	3	0	0	4	3	0	2	1	0
f	0	0	3	0	4	0	0	0	0	1	1
g	3	2	0	0	3	0	0	5	0	2	3
h	0	0	0	0	0	0	5	0	1	1	0
i	5	2	0	0	2	0	0	1	0	2	1
j	2	0	0	0	1	1	2	1	2	0	0
k	0	0	1	0	0	1	3	0	1	0	0

Exercice 47

On a décidé d'installer la fibre optique dans l'université. On a représenté les différentes zones de l'université ainsi qu'une distance approximative entre ces zones :

— I = IUT
— B = Bibliothèque
— R = Resto'U
— G = institut Galilée
— C = Couloir des associations
— L = département des Lettres
— P = Présidence

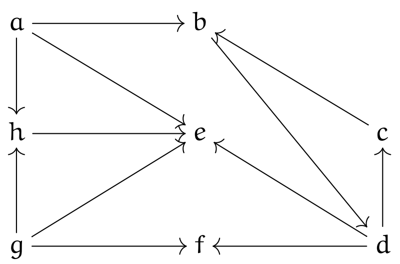


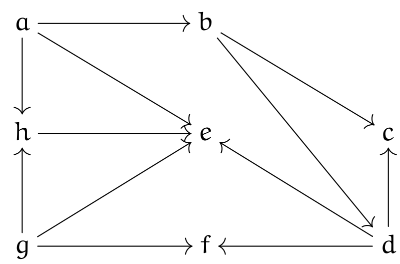
Sachant que l'on souhaite que toutes les zones de l'université soient fibrées et que 1 mètre de fibre optique coute 15€, déterminer le coût minimal d'installation.

Filtration par les sources

Exercice 48

Déterminer, lorsque cela est possible, une bonne numérotation N des graphes $\mathcal{G}$ suivants. Donner alors la matrice booléenne du graphe $\mathcal{G}^{N}$ et donner une représentation par couches.





	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	0	0	0	1	0	0	1	0	0
b	0	0	0	0	0	1	0	0	1
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e	1	0	0	0	0	0	0	1	0
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1
g	0	1	0	0	0	0	0	1	0
h	0	1	1	0	0	0	0	0	0
i	0	0	1	0	0	0	0	0	0

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	0	0	0	1	1	0	0	1	0
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0	0	1
f	0	0	1	0	0	0	0	0	0
g	0	1	0	0	0	0	0	0	0
h	0	1	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	1	0	0

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
d	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
f	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
i	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
j	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
k	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
l	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Exercice 49

Vous venez de télécharger la dernière application à la mode : le *téléportis*. En fonction de l'endroit ou vous vous trouvez dans le monde, vous disposez une liste de destination possible. En choisissant une destination vous vous téléporter directement à cet endroit moyennant finance. Voici la liste :

- À La Havane le téléportis propose Doha pour 15€ et Jérusalem pour 10€.
- À Londre le téléportis propose Prague pour 1.5€ et Jérusalem pour 30€.
- À Madrid le téléportis propose Prague pour 1 €
- À Doha le téléportis propose Islamabad pour 13.5€

— À Islamabad le téléportis propose Moscou pour 10.5€, Madrid pour 7€ et Londre pour 3€.
— À Paris le téléportis propose La Havane pour 3€, Doha pour 7.5€ et Brazzaville pour 4€.
— À Brazzaville le téléportis propose Doha pour 10€ et Jérusalem pour 15€.
— À Prague le téléportis propose Jérusalem pour 6€.
— À Helsinki le téléportis propose Doha pour 15€.
— À Moscou le téléportis propose Prague pour 0.5€ et Jérusalem pour 25€.

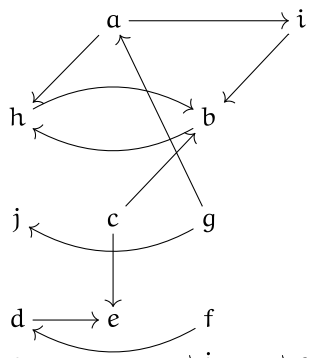
1. Combien de ville pourrez-vous visiter au maximum ? D'où devrez-vous partir et où arriverez-vous ?
2. Quel est le voyage le plus long et le moins cher que vous puissiez faire ?

Théorie des JCIP2

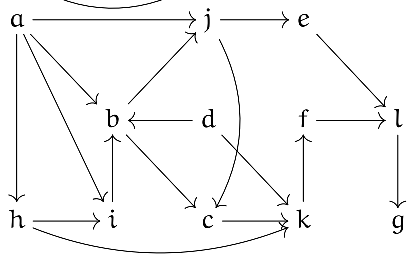
Exercice 50

Pour chacun des graphes suivants déterminer, si cela est possible, un noyau.

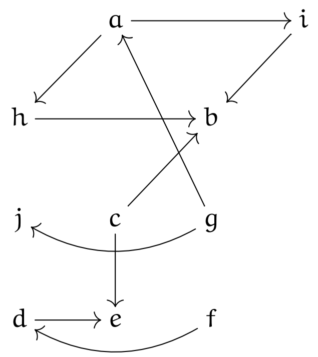
1.



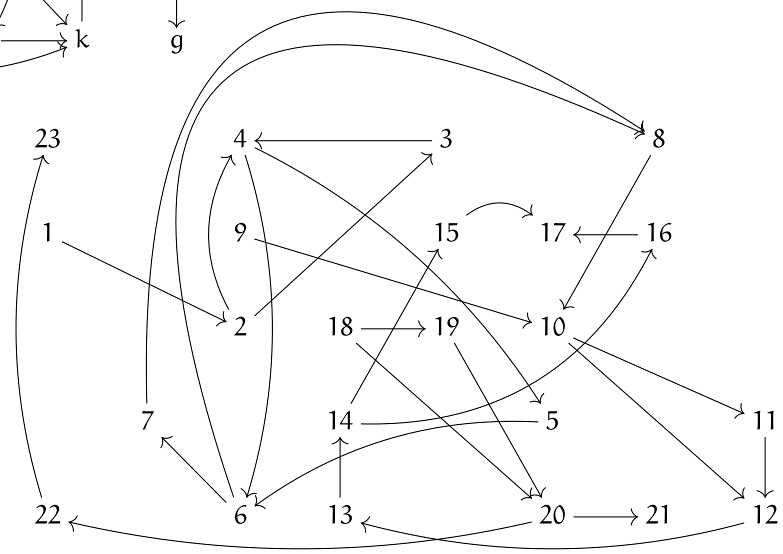
2.



3.



4.



Exercice 51

On considère le jeu suivant : en partant de 0, chaque joueur annonce un nombre en ajoutant un ou deux au nombre annoncé par son adversaire ; le premier arrivé à 10 à gagné.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe.
2. Déterminer un noyau au graphe précédent.
3. En déduire une stratégie non perdante.

Exercice 52

On considère le jeu suivant : 13 allumettes sont alignés face au deux joueurs. Chaque joueur extrait de la ligne une, deux ou trois allumettes. Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe.
2. Déterminer un noyau au graphe précédent.
3. En déduire une stratégie non perdante.
4. Déterminer une stratégie non perdante lorsque le nombre initial d'allumette est quelconque.

Exercice 53

Deux joueurs se trouvent devants deux tas : un tas de n allumettes et autre avec $n+1$ allumettes. A tour de rôle, chaque joueur enlève une allumette dans l'un des tas ou dans les deux. Le gagnant est celui qui enlève la dernière allumette.

On représente la situation à l'aide d'un graphe où chaque sommet est un coupe (x_1, x_2) où x_i désigne le nombre d'allumette du tas i. Les arcs représentent les mouvements des joueurs.

1. Représenter le graphe pour $n = 2$. Déterminer une stratégie non perdante.
2. Représenter le graphe pour $n = 3$. Déterminer une stratégie non perdante.
3. Déterminer une stratégie non perdante pour un n quelconque.