

NOM :  
Prénom :  
Groupe :

## Examen

### Théorie des graphes

- *La calculatrice n'est pas autorisée.*
- *Tous documents, téléphones portables, et tout moyen de communication sont prohibés.*
- *Ce document est composé du sujet de l'examen ainsi que du support de réponse.*
- *Il ne s'agit en aucun cas d'une feuille de brouillon.*
- *Vous êtes autorisé à pleurer (en silence).*
- *Assurez-vous de ne pas laisser tomber vos larmes sur la copie.*
- *Position fœtale permise.*
- *L'utilisation du 49.3 ne permet pas de résoudre les problèmes.*



### Exercice 1

20  
min

Donner la liste de tous les arbres à 4 sommets (A, B, C et D). Il y en a 16. Il pourra être astucieux de passer par la représentation matricielle.

4

**Exercice 2**15  
min

Soient  $x$ ,  $s$  et  $a$  trois entiers tel que  $x \geq 1$  et  $s \geq 2$ . Soit  $\mathcal{G}$  une forêt composée de  $x$  composantes connexes,  $s$  sommets et  $a$  arêtes. Donner une égalité simple entre la cardinalité de  $\mathbf{Som}(\mathcal{G})$  et la cardinalité de  $\mathbf{Ar}(\mathcal{G})$ . Justifier précisément. On pourra poser  $\mathcal{G}_i$  la  $i$ -ème composante connexe de  $\mathcal{G}$ .

3

**Exercice 3**5  
min

1. Soient  $\mathcal{G}$  un graphe et  $x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G})$ . Quelle propriété caractérise le fait que  $x$  est une source (entourer la bonne réponse) ?

1

- (a)  $\text{Card}(\Gamma^+(x, \mathcal{G})) = 0$       (b)  $\text{Card}(\Gamma^-(x, \mathcal{G})) = 0$       (c)  $\text{Card}(\Gamma^{+1}(x, \mathcal{G})) = 0$       (d)  $\text{Card}(\Gamma^{-1}(x, \mathcal{G})) = 0$

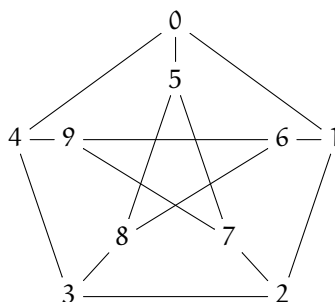
2. Soient  $\mathcal{G}$  un graphe et  $x \in \mathbf{Som}(\mathcal{G})$ . Quelle propriété caractérise le fait que  $x$  est un puits (entourer la bonne réponse) ?

1

- (a)  $\text{Card}(\Gamma^+(x, \mathcal{G})) = 1$       (b)  $\text{Card}(\Gamma^-(x, \mathcal{G})) = 1$       (c)  $\text{Card}(\Gamma^{+1}(x, \mathcal{G})) = 1$       (d)  $\text{Card}(\Gamma^{-1}(x, \mathcal{G})) = 1$

**Exercice 4**30  
min

Le but de cet exercice est de montrer que le nombre chromatique du graphe de Petersen  $\mathcal{P}$  est égale à 3 sans pour autant avoir de sous graphe de la forme de  $\mathcal{K}_3$ . Voici une représentation sagittale de  $\mathcal{P}$



1. Appliquer l'algorithme de Brelaz et proposer une coloration avec 3 couleurs.

1

| DSAT <sub>1</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| DSAT <sub>2</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>3</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>4</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>5</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>6</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>7</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>8</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>9</sub>  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>10</sub> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Coul               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

2. Prouver que  $X(\mathcal{P}) > 2$  (on pourra raisonner par l'absurde) puis que  $X(\mathcal{P}) = 3$ .

1

3. (a) Donner la liste des 12 chemins de longueur 3 partant de 0 qui ne passe pas deux fois par la même arête.

0.5

(b) Donner la liste des 12 chemins de longueur 3 partant de 5 qui ne passe pas deux fois par la même arête.

0.5

(c) En déduire qu'il n'existe aucun sous graphe de  $\mathcal{P}$  de la forme  $\mathcal{K}_3$ .

1



3. S'il existe déterminer le noyau de ce graphe. Justifier.

1.5

4. En déduire une stratégie non perdante.

1

### Exercice 6

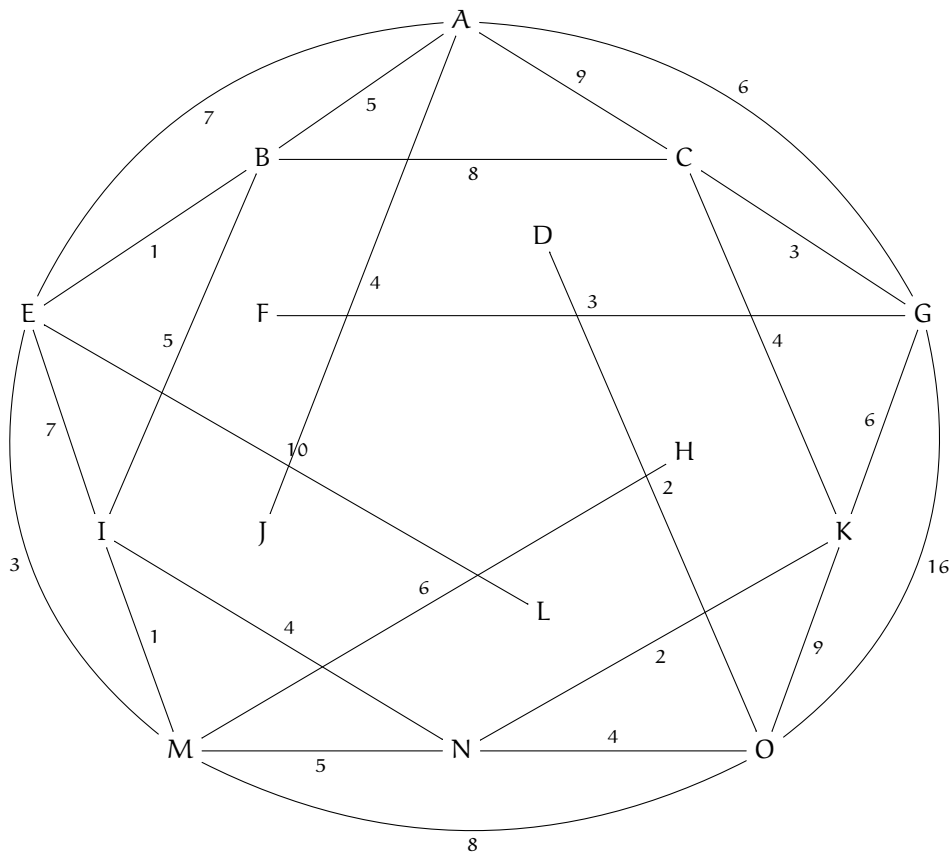
60  
min

Dans le pays d'Amestris, un *petit être dans une fiole* a la volonté de créer une *Pierre philosophale*. L'ingrédient principale de cette pierre est des âmes humaines. Le *petit être dans une fiole* a dessiné, des années durant un cercle de transmutation dans les sous-sol de tout le pays.



Mais les frères Elric, Alchimistes d'état, ont découvert les plans du *petit être dans une fiole*. Ils décident de passer à l'offensive.

Modélisons le cercle de transmutation national à l'aide d'un graphe valué - la valuation représentant le nombre de milliers d'âmes humaines nécessaire à l'activation de la branche.



1. Appliquer l'algorithme de Prim que vous initialiserez au sommet J.

2

|  | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

2. Sur la représentation sagittale surligner les arêtes associées à un arbre couvrant de poids minimal.

1

3. Appliquer l'algorithme de Dijkstra partant du sommet D.

2

|  | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

4. Le *petit être dans une fiole* se trouve en J très affaibli. Il doit se rendre en D pour récupérer sa *colère*. Pour ne pas dépérir, il va suivre les arêtes de son cercle de transmutation et absorber les âmes nécessaires à l'activation de la branche. Pour ne pas éveiller les soupçons des humains, il va choisir le chemin lui faisant consommer le moins d'âmes. Quel est ce chemin et combien de millier d'âmes va-t-il absorber au minimum ? Justifier.

0.5



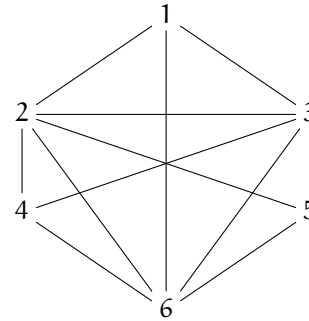
5. Les frères Elric ont découvert que pour annuler l'impact du cercle de transmutation, il suffisait de connecter les pentagones intérieur et extérieur par des arêtes et de former la clique  $\mathcal{K}_5$ . Ils ont donc entrepris de creuser dans le sous-sol d'Amestris et sont parvenu à créer de nouvelles arêtes à ce graphe :

$$\{E, F\}, \{A, D\}, \{G, H\}, \{L, O\}, \{J, M\}$$

Le moment fatidique est arrivé. Le *petit être dans une fiole* à activer son cercle de transmutation. Les frères Elric, dans la ville de Briggs en A doivent parcourir ce nouveau cercle, c'est à dire traverser toutes les arêtes, et revenir à Briggs pour fermer le cercle. Il ne peuvent en aucun cas repasser par une arête déjà visiter sous risque de rendre la contre attaque caduc. Expliquez en quoi cela est possible ou impossible. Vous justifierez précisément.

1

6. Le colonel alchimiste d'état *Roy Mustang* dispose d'une alchimie extrêmement rare et puissante. Mais aussi très difficile à manipuler. C'est le pouvoir de la *flamme absolue*. Voici le cercle de transmutation et le graphe associé.



- (a) Le graphe est-il planaire ? Si oui, proposer une représentation planaire, si non expliquer précisément la raison de l'impossibilité. (b) Appliquer l'algorithme de Brelaz.

1

|                   |  |  |  |  |  |  |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|
|                   |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>1</sub> |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>2</sub> |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>3</sub> |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>4</sub> |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>5</sub> |  |  |  |  |  |  |
| DSAT <sub>6</sub> |  |  |  |  |  |  |
| Coul              |  |  |  |  |  |  |

- (c) Donner la valeur exacte du nombre chromatique. Justifier.

1

(d) Pour utiliser le pouvoir de *la flamme absolue*, le colonel doit activer les sommets du graphes dans un certain ordre.

– Il doit activer tous les sommets.

– Il doit activer en même temps les sommets qui ne sont pas relié par une arête.

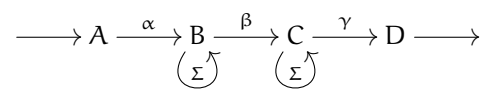
Expliquer comment Mustang peut activer son cercle.

0.5

### Exercice 7

20  
min

Sur l'alphabet  $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , on considère l'automate suivant



1. Déterminer l'ADEF associé.

2

2. Quel est le langage reconnu par cet automate ?

2