

NOM :  
Prénom :  
Groupe :

## Examen

### **Graphes et langages**

*Calculatrice, téléphone et documents ne sont pas autorisés.  
Ce document est composé du sujet de l'examen ainsi que du support de réponse.  
En aucun cas il ne s'agit d'une feuille de brouillon.*

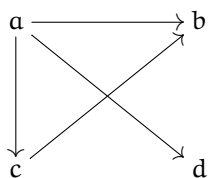


### Exercice 1

10 min

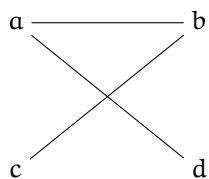
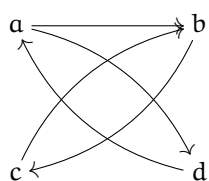
On a donné des représentations (sagittales ou matricielles) de 8 graphes. Il y en a 4 différents, les 4 autres étant une représentation différente de leur semblable. Relier les graphes lorsqu'ils sont semblable.

2

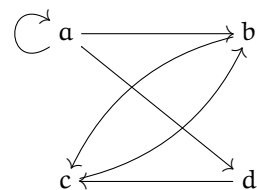
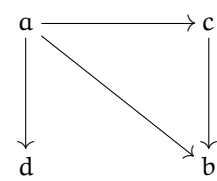


	a	b	c	d
a	1	1	0	1
b	0	0	1	0
c	0	1	0	0
d	0	0	1	0

	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	1	0	1	0
c	0	1	0	0
d	1	0	0	0



	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	0	1	0	0
d	1	0	0	0

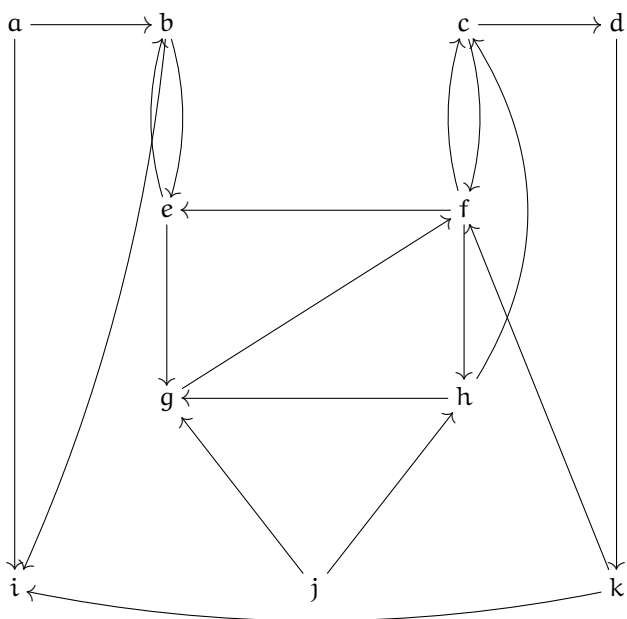


### Exercice 2

10 min

Déterminer  $\Gamma^{-5}(d, \mathcal{G})$  pour le graphe  $\mathcal{G}$  suivant.

2



Som( $\mathcal{G}$ )	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
$\Gamma^{-0}$											
$\Gamma^{-1}$											
$\Gamma^{-2}$											
$\Gamma^{-3}$											
$\Gamma^{-4}$											
$\Gamma^{-5}$											

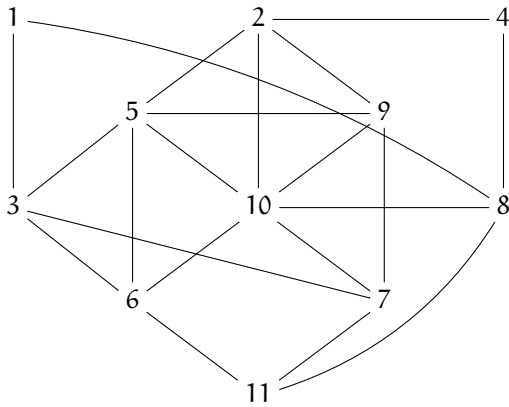
$$\Gamma^{-5}(d, \mathcal{G}) = \{ \quad \quad \quad \}$$

### Exercice 3

20  
min

Questions de cours.

1.



(a) Existe-t-il un circuit eulérien dans ce graphe? Justifier.

0.5

(b) Existe-t-il une chaîne eulérienne dans ce graphe? Justifier.

0.5

2. Combien de graphes satisfont les contraintes suivantes :

1

$\text{Som}(\mathcal{G})$	a	b	c	d	e
$d^{+1}(x, \mathcal{G})$	3	0	1	4	1
$d^{-1}(x, \mathcal{G})$	2	3	0	3	0

3. Soit  $\mathcal{G}$  un graphe non orienté. Quelle relation entre les arêtes et les sommets de  $\mathcal{G}$  définit un arbre.

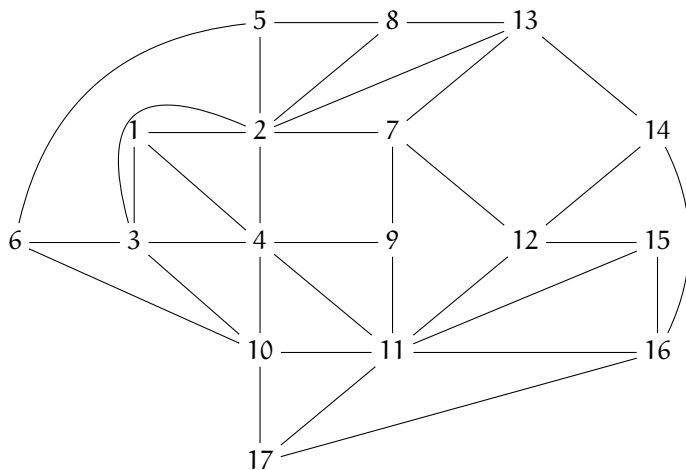
1

4. Dessiner la clique orienté à 4 sommets.

1

5. Sans proposer de coloration donner la valeur du nombre chromatique de ce graphe. Justifier.

1



**Exercice 4**

Dans cet exercice, on cherche à déterminer tous les graphes  $\mathcal{G}$  satisfaisants les contraintes suivantes :

<b>Som</b> ( $\mathcal{G}$ )	a	b	c	d	e
$d^{+1}(x, \mathcal{G})$	3	0	1	4	1
$d^{-1}(x, \mathcal{G})$	2	3	1	3	0

1. Indiquer dans la matrice ci-dessous, tous les coefficients déterminés sans faire d'hypothèse supplémentaire :

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

2. Vérifier qu'il existe exactement un graphe solution satisfaisant  $(c, b) \in \text{Arc}(\mathcal{G})$ . On donnera sa matrice en complétant le graphe ci-dessous.

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

3. Vérifier qu'il existe exactement un graphe solution satisfaisant  $(c, b) \notin \text{Arc}(\mathcal{G})$ . On donnera sa matrice en complétant le graphe ci-dessous.

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

4. Justifier que les deux graphes précédemment déterminés sont les seuls répondants aux contraintes initiales.

0.5

0.5

0.5

**Exercice 5**

Soit  $\mathcal{G}$  le graphe orienté tel que  $\text{Som}(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$  et tel que sa matrice booléenne soit

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
b	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
d	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
f	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
i	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
j	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

1. Déterminer les 4 composantes connexes fortes de  $\mathcal{G}$ .

2

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$\Gamma^+$										
$\Gamma^-$										

$$\text{CCF}(\quad, \mathcal{G}) = \{ \quad \}$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$\Gamma^+$										
$\Gamma^-$										

$$\text{CCF}(\quad, \mathcal{G}) = \{ \quad \}$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$\Gamma^+$										
$\Gamma^-$										

$$\text{CCF}(\quad, \mathcal{G}) = \{ \quad \}$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$\Gamma^+$										
$\Gamma^-$										

$$\text{CCF}(\quad, \mathcal{G}) = \{ \quad \}$$

2. Dessiner le graphe réduit de  $\mathcal{G}$ .

1

### Exercice 6

30  
min

De retour à cul-de-sac après avoir aidé les nains d'Erebor à vaincre Smaug et défaire le armées d'orques, Bilbon Sacquet pense à inviter ses 13 amis nains pour un banquet. Le problème c'est que ces 13 nains ont développé certaines affinités (toujours réciproque) et refusent catégoriquement de venir en même temps que d'autre nain.

1. **Balin** ne veut pas manger avec Gloin, Ori, Fili, Nori et Kili.
2. **Bifur** ne veut pas manger avec Ori, Thorin, Bombur, Dori, Bofur, Fili et Nori.
3. **Bofur** ne veut pas manger avec Bifur, Dori, Ori, Fili, Nori et Dwalin.
4. **Bombur** ne veut pas manger avec Thorin, Bifur, Fili et Dori.
5. **Dori** ne veut pas manger avec Bombur, Bifur et Bofur.
6. **Dwalin** ne veut pas manger avec Bofur, Nori, Kili et Oin.
7. **Fili** ne veut pas manger avec Balin, Ori, Bifur, Bombur, Bofur et Nori.
8. **Gloin** ne veut pas manger avec Balin.
9. **Kili** ne veut pas manger avec Balin, Nori, Dwalin et Oin.
10. **Nori** ne veut pas manger avec Kili, Balin, Fili, Bifur, Bofur et Dwalin.
11. **Oin** ne veut pas manger avec Kili et Dwalin.
12. **Ori** ne veut pas manger avec Balin, Fili, Bofur, Bifur et Thorin.
13. **Thorin** ne veut pas manger avec Ori, Bifur et Bombur.

Pour aider Bilbon à organiser cet évènement on considère le graphe non orienté  $\mathcal{G}$  où les sommets représentent les nains (numérotés de 1 à 13; 1=Balin, 2=Bifur etc). Deux sommets étant reliés si les nains correspondant ne veulent pas manger ensemble.

1. Donner la représentation sagittale de  $\mathcal{G}$ .

2

8

12

13

1

2

9

7

4

10

3

5

11

6

2. Appliquer l'algorithme de Brélaz pour donner une borne de  $X(\mathcal{G})$ .

2

Som																						
DSAT <sub>1</sub>																						
DSAT <sub>2</sub>																						
DSAT <sub>3</sub>																						
DSAT <sub>4</sub>																						
DSAT <sub>5</sub>																						
DSAT <sub>6</sub>																						
DSAT <sub>7</sub>																						
DSAT <sub>8</sub>																						
DSAT <sub>9</sub>																						
DSAT <sub>10</sub>																						
DSAT <sub>11</sub>																						
DSAT <sub>12</sub>																						
DSAT <sub>13</sub>																						
DSAT <sub>14</sub>																						

$$X(\mathcal{G}) \leq$$

3. Déterminer la valeur exacte de  $X(\mathcal{G})$ .

1

4. Combien de repas différent Bilbon devra organiser au minimum pour éviter tout conflit. Vous justifierez la réponse en indiquant en plus qui inviter et quand.

1